

논술고사 문제지 (오후 1)

자연계열 (120분)

모집단위		전형유형	논술우수자
수험번호		성명	

■ 일반 유의사항

1. 시험시간은 120분, 배점은 100점입니다.
2. 답안을 구상할 때 문제지의 여백이나 문제지 내의 연습장을 사용하십시오.
3. 답안은 반드시 해당 문항의 답란에 작성하고, 답란 밖에는 작성하지 마십시오.
4. 답안을 작성할 때 반드시 흑색 필기구만을 사용하십시오 (연필, 샤프 사용 가능, 사인펜 불가).
5. 답안을 정정할 때 두 줄을 긋고 정정하십시오 (수정 테이프, 지우개 사용 가능, 수정액 불가).

※ 답안지는 절대 교체할 수 없습니다.

■ 답안 작성 유의사항

1. 수험번호, 성명 등 신상에 관련된 사항을 답란이나 답안지의 여백에 드러내지 마십시오.
2. 풀이과정이나 설명 없이 간략히 답만 쓰면 0점 처리됩니다.
3. 풀이의 과정을 순차적으로 서술하되, 필요한 경우에 수식 및 그림을 사용할 수 있으며, 수식은 반드시 문장 속에 포함 시키십시오.



인하대학교
INHA UNIVERSITY

논술고사 (자연계열)

[문제 1] (30점) 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오.

(가) 두 함수 $f(x), g(x)$ 가 닫힌 구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때, 두 곡선 $y = f(x), y = g(x)$ 와 두 직선 $x = a, x = b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는 다음과 같다.

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

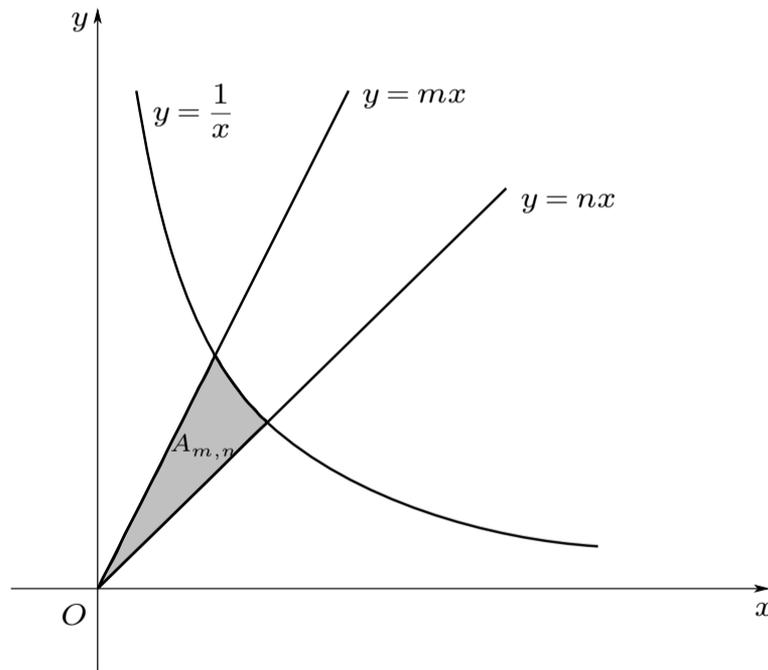
(나) 함수 $f(x)$ 가 닫힌 구간 $[a, b]$ 에서 연속이면 다음이 성립한다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x = \int_a^b f(x) dx, \quad \Delta x = \frac{b-a}{n}, \quad x_k = a + k \Delta x$$

(다) (정적분의 부분적분법) 닫힌 구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 열린 구간 (a, b) 에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 에 대하여 $f'(x)$ 와 $g'(x)$ 가 $[a, b]$ 에서 연속이면 다음이 성립한다.

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx$$

(※) 아래 그림과 같이 곡선 $y = \frac{1}{x}$ ($x > 0$)과 두 직선 $y = mx, y = nx$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 $A_{m,n}$ 이라 하자. (단, m, n 은 $m > n$ 인 자연수이다.)



(1-1) $A_{m,n}$ 을 m, n 으로 나타내시오. (15점)

(1-2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{A_{n+k,n}}{n}$ 의 값을 구하시오. (15점)

논술고사 (자연계열)

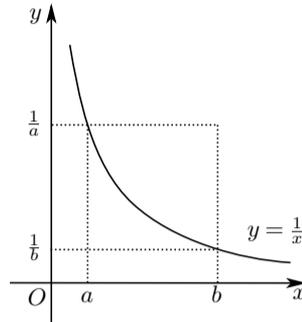
[문제 2] (35점) 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오.

(가) $0 < a < b$ 일 때, 부등식

$$\frac{1}{b} < \frac{\ln b - \ln a}{b - a} < \frac{1}{a}$$

은 아래와 같이 직사각형의 넓이와 정적분 사이의 관계를 비교하면 보일 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{1}{b}(b-a) &< \int_a^b \frac{1}{x} dx < \frac{1}{a}(b-a) \\ \frac{1}{b}(b-a) &< \ln b - \ln a < \frac{1}{a}(b-a) \\ \frac{1}{b} &< \frac{\ln b - \ln a}{b-a} < \frac{1}{a} \end{aligned}$$



(나) (수열의 극한값의 대소 관계) 수렴하는 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 에 대하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$$

일 때,

(1) 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n \leq b_n$ 이면 $\alpha \leq \beta$ 이다.

(2) 수열 $\{c_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n \leq c_n \leq b_n$ 을 만족시키고 $\alpha = \beta$ 이면 수열 $\{c_n\}$ 은 수렴하고 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \alpha$ 이다.

(다) 수열 $\{a_n\}, a_n > 0$ 에 대하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha > 0$ 이면 다음이 잘 알려져 있다.

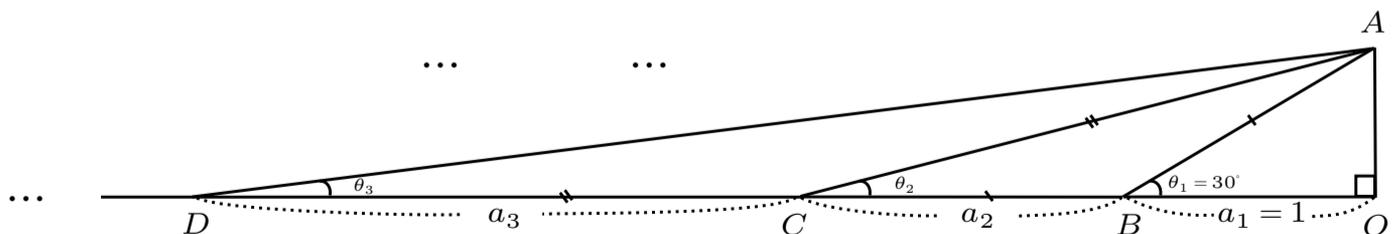
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{\ln a_n\} = \ln \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right\} = \ln \alpha$$

(라) 다음 삼각함수의 극한이 성립한다.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

(2-1) 제시문 (가), (나) 그리고 (다) 를 모두 이용하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{2n}\right)^n$ 의 값을 구하시오. (15점)

(2-2) 아래 그림과 같은 도형이 있다.



여기서, $\overline{OB} = a_1 = 1, \overline{AB} = \overline{BC} = a_2, \overline{AC} = \overline{CD} = a_3, \dots, \angle ABO = \theta_1 = 30^\circ, \angle ACB = \theta_2, \angle ADC = \theta_3, \dots$

(a) 위 그림으로부터 $\sin^2 15^\circ$ 의 값을 구하시오. (5점)

(b) 위 그림으로부터 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{a_{n+1}}$ 의 값을 구하시오. (15점)

논술고사 (자연계열)

[문제 3] (35점) 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오.

(가) 점 (x_1, y_1, z_1) 을 지나고 벡터 $\vec{u} = (a, b, c)$ 에 평행한 직선의 방정식은

$$\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c} \quad (\text{단, } abc \neq 0)$$

(나) 좌표공간에서 두 평면

$$\alpha : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

$$\beta : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

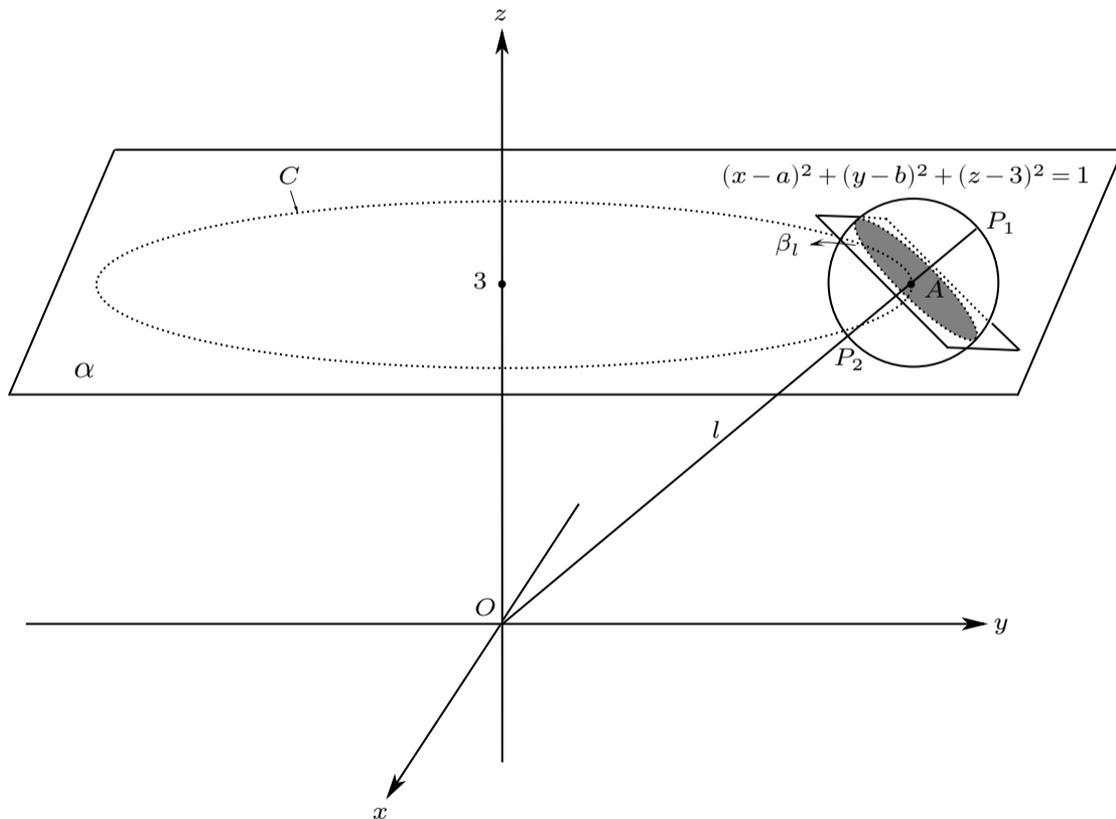
이 이루는 각의 크기를 θ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$)라 하면

$$\cos \theta = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

(다) (정사영의 넓이) 평면 α 위의 도형 F 의 평면 α' 위로의 정사영을 F' 이라 하자. F, F' 의 넓이를 각각 S, S' 이라고 할 때, 두 평면 α, α' 이 이루는 각의 크기가 θ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$)이면

$$S' = S \cos \theta$$

(※) 아래 그림과 같이 좌표공간에서 xy 평면에 평행하고 점 $(0, 0, 3)$ 을 지나는 평면을 α 라 하자. 평면 α 위에 중심이 $(0, 0, 3)$ 이고 반지름의 길이가 4인 원 C 위의 한 점 $A(a, b, 3)$ 을 중심으로 하는 구 $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-3)^2 = 1$ 이 있다. 이때, 두 점 O 와 A 를 지나는 직선을 l 이라 하자. (단, O 는 원점이다.)



(3-1) 직선 l 과 구의 두 교점 P_1 과 P_2 의 좌표를 a, b 로 나타내시오. (15점)

(3-2) 직선 l 에 수직이고 점 A 를 지나는 평면을 β_l 이라 할 때, 구와 평면 β_l 의 교선으로 둘러싸인 평면도형을 F 라 하자. 점 A 의 y 좌표인 b 가 $0 \leq b \leq 4$ 를 만족하면서 원 C 위를 움직일 때, 도형 F 의 평면 α 위로의 정사영들로 이루어진 도형의 넓이를 구하시오. (20점)

논술고사 (자연계열)

<연습장>

논술고사 (짜연계열)

<연 습 장>

논술고사 (자연계열)

<연습장>

논술고사 (자연계열)

<연습장>

논술고사 (자연계열)

<연습장>