2018학년도 인하대학교 수시모집 논술고사 자연계열 (오전)

해설, 예시 답안, 평가 기준

■ 문항 1

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사		
전형명	논술우수자(오전)		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	■ 1번 □ 2번 □ 3번
출제 범위	핵심개념 및 용어	최대 · 최소 정리, 사잇값 정리, 치환적분법	

2. 출제 의도

최대 · 최소 정리와 사잇값 정리를 이해하고 이를 문제에 적용하고 응용할 수 있는지를 평가하고자 하였다. 최대 · 최소 정리와 사잇값 정리는 미적분 I, II에 걸쳐 매우 중요한 역할을 한다. 또한 이를 바탕으로 한 넓이 문제는 학생들의 미적분개념 형성 및 평가에 중추 역할을 하고 있다. 이와 같은 미적분의 개념들 평가하기 위하여 공교육의 현실과 수준을 반영하는 것이 마땅하다. 이를 위하여 학생들이 익숙한 내용과 수준으로 제시문과 발문을 교과서로부터 차용했으며 논제를 파악하는데 어려움이 없도록 충분한 정보를 제공하였다. 본 문제평가를 통하여 학생들이 학교에서 배운 지식을 객관적으로 평가하고 이를 바탕으로 창의적 발전가능성을 알아보고자 하였다.

3. 출제 근거

1) 교육과정 근거

적용 교육과정	**■ 교육과학기술부 고시 제2011-361호 [별책8] “수학과 교육과정“의 일반과목**
	□ 수학Ⅰ □ 수학Ⅱ □ 확률과 통계 ■ 미적분Ⅰ ■ 미적분Ⅱ □ 기하와 벡터

관련 성취기준	제시문	성취기준	과목명: (미적분 I, 미적분 II)
	(가), (나), (다)	성취기준 1	[미적분 I]-나. 함수의 극한과 연속-2) 함수의 연속 미적1222. 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
		성취기준 2	[미적분 I]-나. 함수의 극한과 연속-2) 함수의 연속 미적1222. 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
		성취기준 3	[미적분 II]-라. 적분법-1) 여러 가지 적분법 미적2411. 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

2) 자료 출처

가) 교과서 내

교과서 내

도서명	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부
미적분 I	이준열 외	천재교육	2017	85	(가)	○
미적분 I	이강섭 외	미래엔	2017	77	(가)	○
미적분 I	황선욱 외	좋은책 신사고	2017	77	(나)	○
미적분 I	신항균 외	㈜지학사	2017	75	(나)	○
미적분 II	황선욱 외	좋은책 신사고	2017	143	(다)	○
미적분 II	김창동 외	㈜교학사	2017	167	(다)	○

나) 교과서 외 자료를 활용한 경우 - 없음

4. 문항 해설

(1-1) 닫힌 구간에서 연속인 함수 $f(x), g(x)$에 최대 · 최소 정리를 이용하여 각 함수 $f(x), g(x)$의 최댓값과 최솟값이 존재함을 보이고 이 함수들 사이의 부등식관계에 사잇값 정리를 적용하여 함수 $f(x)g(x)$의 정적분의 값을 만족하는 점의 존재성을 보일 수 있다.

(1-2) (a) 함수의 극대값 조건과 제시문 (나)를 이용하여 주어진 조건들을 만족하는 함수를 구할 수 있다.

(b) $g(x)=x^2$이라 하고 함수 $f(x)$에 (1-1)의 결과를 적용하여 부등식이 만족함을 보일 수 있다.

5. 채점 기준

하위 문항번호	채점 기준	배점
(1-1)	최대・최소정리로부터 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 놓으면 3점	3점
	양변에 $g(x)>0$를 곱하여 적분하여 다음과 같이 표현하면 3점 $$m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M\int_a^b g(x)dx$$	3점
	제시문 (나)의 사잇값 정리에 의해 $k=\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}=f(c)$를 만족하는 c가 a와 b사이에 존재함을 서술하면 4점	4점
(1-2)(a)	$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=-\dfrac{x}{2}$이므로 제시문 (다)에 의해 $\ln f(x)=-\dfrac{x^2}{4}+C$ (C는 적분상수)임을 보이면 4점	4점
	함수 $f(x)=e^Ce^{-\frac{x^2}{4}}$를 구하면 2점, $x=0$에서 극대임을 보이면 2점	4점
	극댓값 $f(0)=e^C=1$을 구하고 함수 $f(x)=e^{-\frac{x^2}{4}}$를 구하면 2점	2점
(1-2)(b)	$g(x)=x^2$ 이라 놓으면 5점	5점
	(1-1)에 의해 $$\int_1^2 x^2f(x)dx=f(c)\int_1^2 x^2dx$$ 를 만족하는 $c\in(1,2)$가 존재함을 서술하면 6점	6점
	$f(x)$는 $[1,2]$에서 감소함수임을 이용하여 다음을 보이면 4점 $$\int_1^2 x^2f(x)dx=f(c)\int_1^2 x^2dx=f(c)\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right)<f(1)\frac{7}{3}=e^{-\frac{1}{4}}\frac{7}{3}=\frac{7}{3\sqrt[4]{e}}$$	4점

6. 예시 답안

(1-1) $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속함수이므로 제시문 (가)의 최대 · 최소정리에 의해 최댓값 M, 최솟값 m을 갖는다. 즉 모든 $x\in[a,b]$에 대하여 $m \le f(x) \le M$이다. 양변에 $g(x)>0$를 곱하여 적분하면 다음과 같다.

$$m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M\int_a^b g(x)dx$$

한편 $g(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이고 $g(x)>0$이므로 $\int_a^b g(x)dx>0$이다.

따라서 $k=\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$는 $m<k<M$을 만족하는 $f(x)$의 사잇값이고 제시문 (나)의 사잇값 정리에 의해 $k=\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}=f(c)$를 만족하는 c가 a와 b사이에 존재한다. 즉 $\int_a^b f(x)g(x)dx=f(c)\int_a^b g(x)dx$를 만족하는 c가 a와 b사이에 존재한다.

(1-2)(a)

$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=-\dfrac{x}{2}$이므로 제시문 (다)에 의해 $\ln f(x)=-\dfrac{x^2}{4}+C$ (C는 적분상수)이다. 그러므로 $f(x)=e^Ce^{-\frac{x^2}{4}}$이다. 조건에서 $f(x)>0$이고 $f'(x)=-\dfrac{x}{2}f(x)$이므로 $x<0$에서는 $f'(x)>0$이고 $x>0$에서는 $f'(x)<0$이다. 따라서 $x=0$에서 극대이고 이때 극댓값 $f(0)=e^C=1$이므로 $f(x)=e^{-\frac{x^2}{4}}$이다.

(1-2)(b)

$g(x)=x^2$ 이라 놓으면 (1-1)에 의해 $\int_1^2 x^2f(x)dx=f(c)\int_1^2 x^2dx$를 만족하는 $c\in(1,2)$가 존재하고 $f(x)$는 $[1,2]$에서 감소함수이므로

$$\int_1^2 x^2f(x)dx=f(c)\int_1^2 x^2dx=f(c)\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right)<f(1)\frac{7}{3}=e^{-\frac{1}{4}}\frac{7}{3}=\frac{7}{3\sqrt[4]{e}}$$

이다.

■ 문항 2

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사		
전형명	논술우수자(오전)		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	□ 1번 ■ 2번 □ 3번
출제 범위	핵심개념 및 용어	수열의 귀납적 정의, 급수의 수렴/발산, 입체의 부피	

2. 출제 의도

수열의 급수문제는 미적분 I, II에 걸쳐 매우 중요한 역할을 한다. 또한 이를 바탕으로 한 부피 문제는 학생들의 적분개념 형성 및 평가에 중추 역할을 하고 있다. 이와 같은 적분의 개념들 평가하기 위하여 공교육의 현실과 수준을 반영하는 것이 마땅하다. 이를 위하여 학생들이 익숙한 내용과 수준으로 제시문과 발문을 교과서로부터 차용했으며 논제를 파악하는데 어려움이 없도록 충분한 정보를 제공하였다. 본 문제평가를 통하여 학생들이 학교에서 배운 지식을 객관적으로 평가하고 이를 바탕으로 창의적 발전가능성을 알아보고자 하였다. 특히, [문제 2]는 급수의 판정과 구분구적법을 이해하고 계산하는 능력을 평가하고자 하였다.

3. 출제 근거

1) 교육과정 근거

적용 교육과정	**■ 교육과학기술부 고시 제2011-361호 [별책8] "수학과 교육과정"의 일반과목** □ 수학Ⅰ ■ 수학Ⅱ □ 확률과 통계 ■ 미적분Ⅰ ■ 미적분Ⅱ □ 기하와 벡터		
관련 성취기준	관련 제시문	성취기준	과목명: (수학 II, 미적분 I, 미적분 II)
	(가) (나) (다) (라)	성취기준 1	[수학II]-다. 수열 3) 수학적 귀납법 수학2332/2333. 수학적 귀납법의 원리를 이해하고, 이를 이용하여 자연수에 관한 명제를 증명할 수 있다.
		성취기준 2	[미적분 I]-가. 수열의 극한, 2) 급수

		미적1121. 급수의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다.
	성취기준 3	[미적분 II]-라. 적분법, 2) 정적분의 활용 미적2422. 입체도형의 부피를 구할 수 있다.

2) 자료 출처

교과서 내

도서명	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부
미적분 I	류희찬 외	천재교과서	2017	50, 51	(가)	○
미적분 I	이강섭 외	미래엔	2017	33, 34	(나), (다)	○
미적분 II	류희찬 외	천재교과서	2017	186	(마)	○

4. 문항 해설

(2-1) 여러 교과서에서 다루고 있는 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 의 발산을 보이는 오램의 방법은 급수의 항을 1개, 2개, 4개, 8개, …씩 묶어서 급수가 발산함을 보였다. 이 내용을 그대로 급수의 항을 피보나치수열의 수의 개수 1개, 1개, 2개, 3개, 5개, …씩 묶어 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 의 발산을 보이는 내용이다. 제시문에 주어진 내용을 이해한다면 충분히 어렵지 않게 해결할 수 있는 문제이다. (2-2)는 닮은 삼각형의 비례 관계식으로부터 이차방정식을 구성하도록 하고, 이들을 바탕으로 원뿔대의 부피를 구할 수 있는지 평가하는 문항이다.

5. 채점 기준

하위문항 번호	채점 기준	배점
(2-1)	피보나치수열 $\{a_n\}$ 을 이용하면 다음 부등식을 얻을 수 있다. $1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{13}\right)+\left(\frac{1}{14}+\cdots+\frac{1}{21}\right)+$ $>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{3}{8}+\frac{5}{13}+\frac{8}{21}+\cdots$	3점
	$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{a_{n+2}}$	5점

	제시문 (가)에 의해서 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}+a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{a_{n+1}}{a_n}}=\frac{1}{1+\phi}\neq 0$ 이므로	5점
	제시문 (다)에 의해서 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{a_{n+2}}$ 이 발산한다. 따라서 제시문 (라)에 의하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 도 발산한다.	2점
(2-2) (a)	$OA=OB=OE=2$ 이고 Q는 $AQ=FQ$를 만족하는 OE의 중점이므로 $OQ=1$이고 $\tan\theta=\frac{OF}{AO}=\frac{OQ+QF}{AO}=\frac{OQ+AQ}{AO}$	5점
	$=\frac{OQ+\sqrt{AO^2+OQ^2}}{AO}=\frac{1+\sqrt{2^2+1}}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\phi$	5점
(2-2) (b)	원뿔 ABF에서 O를 좌표평면의 원점, 직선 AB를 x축, 직선 OF를 y축이라 하자. $\overline{OF}=2\tan\theta=2\phi=2\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1+\sqrt{5}$ 이다.	3점
	$y=h$를 지나 y축에 수직인 평면으로 원뿔 ABF를 자른 단면을 $S(h)$라 하면 단면의 모양은 원이다. 이 원의 반지름의 길이를 r라 하면 비례식 $r:2=2\phi-h:2\phi$로부터 $r=\frac{4\phi-2h}{2\phi}=2-\frac{1}{\phi}h$ 이다.	5점
	적분식 표현 또는 ϕ의 결과식 또는 $\sqrt{5}$가 들어있는 값 등이 맞으면 2점 **(참고)** $V=\int_0^2\pi\left(2-\frac{1}{\phi}h\right)^2dh=-\frac{8\pi\phi}{3}\left(\left(1-\frac{1}{\phi}\right)^3-1\right)=\frac{16}{3}(3-\sqrt{5})\pi$ $V=\int_0^2\pi\left(2-\frac{1}{\phi}h\right)^2dh=8\pi\left(1-\frac{1}{\phi}+\frac{1}{3\phi^2}\right)=\frac{16}{3}(3-\sqrt{5})\pi$ $V=\int_0^2\pi\left(2-\frac{1}{\phi}h\right)^2dh=\frac{\phi\pi}{3}\left(8-\left(2-\frac{2}{\phi}\right)^3\right)=\frac{16}{3}(3-\sqrt{5})\pi$ $V=\int_{\sqrt{5}-1}^{\sqrt{5}+1}\pi\left(\frac{2}{\sqrt{5}+1}x\right)^2dx=\frac{16}{3}(3-\sqrt{5})\pi$	2점

6. 예시 답안

(2-1) 피보나치수열 $\{a_n\}$을 이용하면 다음 부등식을 얻을 수 있다.

$$1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{13}\right)+\left(\frac{1}{14}+\cdots+\frac{1}{21}\right)+\cdots$$

$$>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{3}{8}+\frac{5}{13}+\frac{8}{21}+\cdots=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{a_{n+2}}$$

제시문 (가)에 의해서 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}+a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{a_{n+1}}{a_n}}=\frac{1}{1+\phi}\neq 0$ 이므로

제시문 (다)에 의해서 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{a_{n+2}}$ 이 발산한다. 따라서 제시문 (라)에 의하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 도 발산한다.

(2-2)(a)

$OA=OB=OE=2$ 이고 Q 는 $AQ=FQ$ 를 만족하는 OE 의 중점이므로 $OQ=1$ 이고

$$\tan\theta=\frac{OF}{AO}=\frac{OQ+QF}{AO}=\frac{OQ+AQ}{AO}$$

$$=\frac{OQ+\sqrt{AO^2+OQ^2}}{AO}=\frac{1+\sqrt{2^2+1}}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\phi$$

(2-1) (15점)

피보나치수열 $\{a_n\}$ 을 이용하면 다음 부등식을 얻을 수 있다.

$$1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{13}\right)+\left(\frac{1}{14}+\cdots+\frac{1}{21}\right)+\cdots$$

$$>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{3}{8}+\frac{5}{13}+\frac{8}{21}+\cdots$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{a_{n+2}}$$

제시문 (가)에 의해서 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}+a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{a_{n+1}}{a_n}}=\frac{1}{1+\phi}\neq 0$ 이므로

제시문 (다)에 의해서 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{a_{n+2}}$ 이 발산한다. 따라서 제시문 (라)에 의하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 도 발산한다.

(2-2) (a) (10점)

$OA=OB=OE=2$ 이고 Q 는 $AQ=FQ$ 를 만족하는 OE 의 중점이므로 $OQ=1$ 이고

$$\tan\theta=\frac{OF}{AO}=\frac{OQ+QF}{AO}=\frac{OQ+AQ}{AO}$$

$$=\frac{OQ+\sqrt{AO^2+OQ^2}}{AO}=\frac{1+\sqrt{2^2+1}}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\phi$$

(2-2) (b) (10점)

원뿔 ABF에서 O를 좌표평면의 원점, 직선 AB를 x축, 직선 OF를 y축이라 하자. $\overline{OF}=2\tan\theta=2\phi=2\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1+\sqrt{5}$ 이다. $y=h$를 지나 y축에 수직인 평면으로 원뿔 ABF를 자른 단면을 $S(h)$라 하면 단면의 모양은 원이다. 이 원의 반지름의 길이를 r라 하면 비례식 $r:2=2\phi-h:2\phi$ 로부터 $r=\frac{4\phi-2h}{2\phi}=2-\frac{1}{\phi}h$ 이다.

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 \pi\left(2-\frac{1}{\phi}h\right)^2 dh = \pi\left[\frac{1}{3}\left(2-\frac{1}{\phi}h\right)^3(-\phi)\right]_0^2 \\ &= -\frac{8\pi\phi}{3}\left(\left(1-\frac{1}{\phi}\right)^3-1\right) \\ &= \frac{16}{3}(3-\sqrt{5})\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 \pi\left(2-\frac{1}{\phi}h\right)^2 dh = \pi\int_0^2\left(4-\frac{4}{\phi}h+\frac{1}{\phi^2}h^2\right)dh = \pi\left[4h-\frac{2}{\phi}h^2+\frac{1}{3\phi^2}h^3\right]_0^2 \\ &= 8\pi\left(1-\frac{1}{\phi}+\frac{1}{3\phi^2}\right) \\ &= \frac{16}{3}(3-\sqrt{5})\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 \pi\left(2-\frac{1}{\phi}h\right)^2 dh = \pi\int_2^{2-\frac{2}{\phi}} t^2(-\phi)dt = \phi\pi\left[\frac{1}{3}t^3\right]_{2-\frac{2}{\phi}}^2 \\ &= \frac{\phi\pi}{3}\left(8-\left(2-\frac{2}{\phi}\right)^3\right) \\ &= \frac{16}{3}(3-\sqrt{5})\pi \end{aligned}$$

(별해) 옆으로 눕어서 하는 경우 여러 가지 적분식이 나올 수 있습니다.

$$\int_{\sqrt{5}-1}^{\sqrt{5}+1}\pi\left(\frac{2}{\sqrt{5}+1}x\right)^2 dx = \frac{16}{3}(3-\sqrt{5})\pi$$

■ 문항 3

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사		
전형명	논술우수자(오전)		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	□ 1번 □ 2번 ■ 3번
출제 범위	핵심개념 및 용어	좌표공간, 공간좌표, 공간벡터, $P(x,y,z)$	

2. 출제 의도

좌표공간에서의 내분점과 벡터의 내적의 개념을 구의 성질에 적용하여 주어진 조건에 맞는 벡터문제를 해결할 수 있는지를 평가하고자 하였다. 이를 위하여 학생들이 익숙한 내용과 수준으로 제시문과 발문을 교과서로부터 차용했으며 논제를 파악하는데 어려움이 없도록 충분한 정보를 제공하였다. 본 문제평가를 통하여 학생들이 학교에서 배운 지식을 객관적으로 평가하고 이를 바탕으로 창의적 발전가능성을 알아보도록 출제하였다.

3. 출제 근거

1) 교육과정 근거

적용 교육과정	**■ 교육과학기술부 고시 제2011-361호 [별책8] “수학과 교육과정“의 일반과목** □ 수학Ⅰ □ 수학Ⅱ □ 확률과 통계 □ 미적분Ⅰ □ 미적분Ⅱ ■ 기하와 벡터		
관련 성취기준	제시문	성취기준	과목명: (기하와 벡터)
	공통	성취기준 1	[기하와 벡터]-다. 공간도형과 공간벡터-2) 공간좌표 기벡1323. 좌표공간에서 선분의 내분점과 외분점의 좌표를 구할 수 있다.
		성취기준 2	[기하와 벡터]-다. 공간도형과 공간벡터-3) 공간벡터 기벡1332. 두 공간벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.

2) 자료 출처

교과서 내						
도서명	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부
기하와 벡터	김창동 외	㈜교학사	2017	73	(가)	○
기하와 벡터	이강섭 외	미래앤	2017	183	(가)	○
기하와 벡터	류희찬 외	천재교과서	2017	105	(가)	○

4. 문항 해설

(3-1) $\overrightarrow{ON}$은 선분 AB를 $2:1$로 내분점이므로 제시문에 의해 구하고 벡터의 덧셈법칙을 이용하면 쉽게 표현할 수 있다.

(3-2) (a) $\overrightarrow{OP}=s\vec{a}+t\vec{b}$, 벡터의 내적성질, 그리고 구 위의 점들에 관한 성질 ($\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{BP}$)을 이용하면 주어진 조건으로부터 s,t를 구할 수 있다.

(3-2) (b) 삼각형의 비는 높이의 비에 의해 구할 수 있으므로 제시문, (3-1), (3-2))(a)의 결과를 이용하여 높이의 비를 구하여 계산한다.

5. 채점 기준

하위문항 번호	채점 기준	배점
(3-1)	$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\vec{a}$, $\overrightarrow{ON}=\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}$를 구하면 5점	5점
	$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\left(\frac{2\vec{b}+\vec{a}}{3}\right)-\frac{1}{2}\vec{a}=-\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$로 표현하면 5점	5점
(3-2)(a)	$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=(s-1)\vec{a}+t\vec{b}$, $\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}=s\vec{a}+(t-1)\vec{b}$이고 두 점 A,B가 구 위의 점이므로 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{BP}$ 임을 언급하면 4점	4점
	$0=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AP}=(s-1)\vec{a}\cdot\vec{a}+t\vec{a}\cdot\vec{b}\Rightarrow (s-1)+t\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{a}\cdot\vec{a}}=0\Rightarrow (s-1)+\frac{1}{4}t=0$	4점
	$0=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{BP}=s\vec{a}\cdot\vec{b}+(t-1)\vec{b}\cdot\vec{b}\Rightarrow s\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{b}\cdot\vec{b}}+(t-1)=0\Rightarrow \frac{2}{5}s+(t-1)=0$	4점
	$s=\frac{5}{6}$, $t=\frac{2}{3}$를 구하면 3점	3점

(3-2)(b)	$\overrightarrow{OQ}=\frac{5}{9}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{b}$ 를 구하면 5점	5점
	실수 t $(0<t<1)$ 에 대해서 $\overrightarrow{ON}=t\overrightarrow{OQ}+(1-t)\vec{b}=\frac{5}{9}t\vec{a}+\left(1-\frac{5}{9}t\right)\vec{b}$ 이다. 계수를 비교하여 $\frac{1}{3}=\frac{5}{9}t \Rightarrow t=\frac{3}{5}$ 를 구하면 3점	3점
	$\overrightarrow{ON}=\frac{3}{5}\overrightarrow{OQ}+\frac{2}{5}\vec{b}$ 가 선분 QB 의 $2:3$ 으로 내분함을 언급하고 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{2}{5}$ 를 구하면 2점	2점

6. 예시 답안

(3-1) $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\vec{a},\ \overrightarrow{ON}=\frac{2\vec{b}+\vec{a}}{3}$ 이므로

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\left(\frac{2\vec{b}+\vec{a}}{3}\right)-\frac{1}{2}\vec{a}=-\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$$

(3-2)(a) $\overrightarrow{OP}=s\vec{a}+t\vec{b}$ 이므로

$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=(s-1)\vec{a}+t\vec{b},\quad \overrightarrow{BP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}=s\vec{a}+(t-1)\vec{b}$ 이고

두 점 A,B 가 구 위의 점이므로 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{AP},\ \overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{BP}$ 이다.

(1) $0=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AP}=(s-1)\vec{a}\cdot\vec{a}+t\vec{a}\cdot\vec{b}$

$\Rightarrow (s-1)+t\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{a}\cdot\vec{a}}=0$

$\Rightarrow (s-1)+\frac{1}{4}t=0$

(2) $0=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{BP}=s\vec{a}\cdot\vec{b}+(t-1)\vec{b}\cdot\vec{b}$

$\Rightarrow s\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{b}\cdot\vec{b}}+(t-1)=0$

$\Rightarrow \frac{2}{5}s+(t-1)=0$

위 식을 연립하여 풀면 $s=\frac{5}{6},\ t=\frac{2}{3}$ 이다.

(3-2)(b) $\overrightarrow{OP}$ 와 선분 AB 의 교점을 Q 라 하면 (3-1)에 의해 $\overrightarrow{OP}=\frac{5}{6}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$ 이므로

$$\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OP}=\frac{5}{6}k\vec{a}+\frac{2}{3}k\vec{b}$$

(k 는 0이 아닌 실수)이고 $\overrightarrow{OQ}$ 는 $\overrightarrow{AB}$ 의 내분점이므로 제시문에 의해

$\frac{5}{6}k+\frac{2}{3}k=1$, 즉 $k=\frac{2}{3}$이다. 즉 $\overrightarrow{OQ}=\frac{5}{9}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{b}$이다. 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점이 N이므로 $\overrightarrow{ON}=\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}$이다.

또한 실수 $t\ (0<t<1)$에 대해서 $\overrightarrow{ON}=t\,\overrightarrow{OQ}+(1-t)\vec{b}=\frac{5}{9}t\,\vec{a}+\left(1-\frac{5}{9}t\right)\vec{b}$이다. 계수를 비교하면 $\frac{1}{3}=\frac{5}{9}t \Rightarrow t=\frac{3}{5}$이다. 따라서 $\overrightarrow{ON}=\frac{3}{5}\overrightarrow{OQ}+\frac{2}{5}\vec{b}$이다. 즉 점 N은 선분 QB의 $2:3$으로 내분한다. 결국 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{2}{5}$이다.