2018학년도 수시모집

논술고사 문제지 (오전)

자연계열 (120분)

모집단위		전형유형	논술우수자
수험번호		성　　명	

■ 일반 유의사항

1. 시험시간은 120분, 배점은 100점입니다.
2. 답안을 구상할 때 문제지의 여백이나 문제지 내의 연습장을 사용하시오.
3. 답안은 반드시 해당 문항의 답란에 작성하고, 답란 밖에는 작성하지 마시오.
4. 답안을 작성할 때 반드시 흑색 필기구만을 사용하시오(연필, 샤프 사용 가능, 사인펜 불가).
5. 답안을 정정할 때 두 줄을 긋고 정정하시오(수정 테이프, 지우개 사용 가능, 수정액 불가).

※ **답안지는 절대 교체할 수 없습니다.**

■ 답안 작성 유의사항

1. 수험번호, 성명 등 신상에 관련된 사항을 답란이나 답안지의 여백에 드러내지 마시오.
2. 풀이과정이나 설명 없이 간략히 답만 쓰면 0점 처리됩니다.
3. 풀이의 과정을 순차적으로 서술하되, 필요한 경우에 수식 및 그림을 사용할 수 있으며, 수식은 반드시 문장 속에 포함 시키시오.

인하대학교
INHA UNIVERSITY

논술고사 (자연계열)

[문제 1] (35점) 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오.

(가) (최대·최소 정리) 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속이면, $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

(나) (사이값 정리) 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$이면, $f(a) < k < f(b)$ (또는 $f(b) < k < f(a)$)인 임의의 실수 k에 대하여

$$f(c) = k$$

를 만족시키는 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.

(다) 함수 $F(x)$의 도함수가 $f(x)$일 때, 함수 $F(x)$를 $f(x)$의 부정적분이라 하고, 기호로 $\int f(x)dx = F(x) + C$ (단, C는 적분상수)와 같이 나타낸다. 연속인 도함수를 갖는 함수 $f(x)$에 대하여 다음이 성립한다.

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$$

(1-1) 함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속인 함수이고 함수 $g(x)$는 $[a,b]$에서 $g(x) > 0$인 연속함수이면

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$$

를 만족하는 c가 a와 b 사이에 존재함을 보이시오. (10점)

(1-2) 실수 전체 집합에서 연속함수 $f(x)$는 $f(x) > 0$이고 $f'(x) = -\frac{x}{2}f(x)$를 만족한다. 함수 $f(x)$는 1을 극댓값으로 갖는다.

(a) 함수 $f(x)$를 구하시오. (10점)

(b) 부등식 $\int_1^2 x^2 f(x)dx < \frac{7}{3\sqrt[4]{e}}$이 성립함을 보이시오. (15점)

논술고사 (자연계열)

[문제 2] (35점) 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오.

(가) 피보나치수열 $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$ 은 다음과 같이 귀납적으로 정의된 수열이다.

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n\ (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

피보나치수열에서 이웃하는 두 항 사이의 비 $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 의 값을 차례로 구해보면, n 이 한없이 커질 때, $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 의 값은 황금비 $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 에 수렴함이 알려져 있다.

(나) 1350년 경 프랑스의 수학자 오렘은 다음과 같이 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 을 1개, 2개, 4개, 8개, ... 씩 괄호 ( )로 묶어서 부등식

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots$$

이 성립함을 보이고, 이를 이용하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 이 발산함을 증명하였다.

(다) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 이다. 즉 $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ 이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 발산한다.

(라) $\{c_n\}$ 과 $\{d_n\}$ 은 모든 항이 양수인 수열이다. 모든 자연수 n 에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} c_k \le \sum_{k=1}^{n} d_k$ 이고 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 이 발산하면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ 도 발산한다.

(마) (입체도형의 부피) 닫힌 구간 $[a, b]$ 의 임의의 점 x 를 지나 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이가 $S(x)$ 인 입체의 부피 V 는

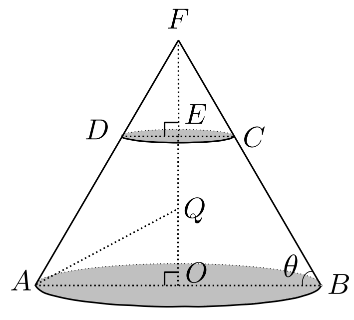
$$V = \int_a^b S(x)dx \qquad (\text{단, } S(x) \text{는 닫힌 구간 } [a, b] \text{에서 연속})$$

(2-1) 다음은 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 을 피보나치수열에 나타난 수만큼의 항으로 괄호 ( )로 묶어서 나타낸 것이다.

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{13}\right) + \left(\frac{1}{14} + \cdots + \frac{1}{21}\right) + \cdots$$

이를 이용하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 이 발산함을 보이시오. (15점)

(2-2) 아래 그림과 같이 선분 AB 가 지름인 원을 밑면으로 하는 원뿔 ABF 가 있다. 여기서 $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OE} = 2$ 이고 선분 OE 의 중점 Q 는 $\overline{AQ} = \overline{FQ}$ 를 만족한다. (단, O 는 원뿔 ABF 의 밑면인 원의 중심이다.)



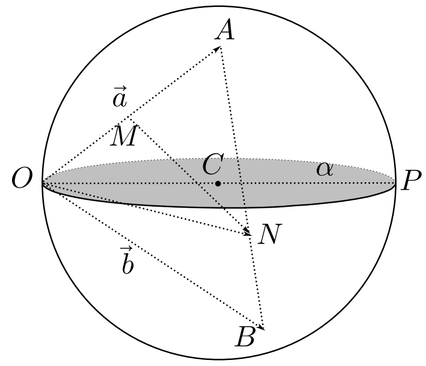
(a) $\angle ABF = \theta\ (0 < \theta < \frac{\pi}{2})$ 라 하자. $\tan\theta$ 의 값을 구하시오. (10점)

(b) 제시문 (마) 를 이용하여 원뿔대 $ABCD$ 의 부피를 구하시오. (10점)

[문제 3] (30점) 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오.

> 두 점 A, B의 위치벡터를 각각 $\vec{a}, \vec{b}$라 할 때, 선분 AB를 $m:n$ $(m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점 P의 위치벡터 $\vec{p}$는 다음과 같다.
>
> $$\vec{p} = \frac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}$$

(※) O를 원점으로 갖는 좌표공간에 중심이 C이고 선분 OP를 지름으로 하는 구에서 두 점 O, P를 포함하는 평면 중 하나를 α라 하자. 아래 그림과 같이 두 점 A, B를 평면 α에 대하여 서로 반대편에 위치하고 네 점 O, A, P, B가 한 평면에 놓이도록 구 위에 A, B를 잡자. $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$라 하자. 선분 OA의 중점을 M, 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점을 N이라 하자.



(3-1) 벡터 $\overrightarrow{MN}$을 $\vec{a}, \vec{b}$로 나타내시오. (10점)

(3-2) 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 다음을 만족한다고 하자.

$$\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \frac{1}{4}, \quad \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{b}\cdot\vec{b}} = \frac{2}{5}$$

(a) 벡터 $\overrightarrow{OP}$를 $\overrightarrow{OP} = s\vec{a} + t\vec{b}$로 나타낼 때, 실수 s, t의 값을 구하시오. (10점)

(b) 삼각형 OPN의 넓이를 S_1, 삼각형 OPB의 넓이를 S_2라 할 때, $\dfrac{S_1}{S_2}$의 값을 구하시오. (10점)

<연 습 장>

<연 습 장>

논술고사 (자연계열)

<연 습 장>

논술고사 (자연계열)

<연 습 장>

〈연 습 장〉