

논술고사 문제지 (오전)

자연계열 (120분)

모집단위		전형유형	논술우수자(일반)
수험번호		성명	

■ 일반 유의사항

1. 시험시간은 120분, 배점은 문항 당 25점입니다.
2. 답안을 구상할 때 문제지의 여백이나 문제지 내의 연습장을 사용하십시오.
3. 답안은 반드시 해당 문항의 답란에 작성하고, 답란 밖에는 작성하지 마시오.
4. 답안을 작성할 때 반드시 흑색 필기구만을 사용하십시오 (연필, 샤프 사용 가능, 사인펜 불가).
5. 답안을 정정할 때 두 줄을 긋고 정정하십시오 (수정 테이프, 지우개 사용 가능, 수정액 불가).

※ 답안지는 절대 교체할 수 없습니다.

■ 답안 작성 유의사항

1. 수험번호, 성명 등 신상에 관련된 사항을 답란이나 답안지의 여백에 드러내지 마시오.
2. 풀이의 과정을 순차적으로 서술하되, 필요한 경우에 수식 및 그림을 사용할 수 있으며, 수식은 반드시 문장 속에 포함 시키시오.



인하대학교
INHA UNIVERSITY

논술고사 (자연계열)

[문제 1] (25점) 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오.

(가) 복소수 $\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ 는 이차방정식 $x^2 + x + 1 = 0$ 의 하나의 해로서 $\omega^3 = 1$ 이 성립한다.

(나) 이항정리에 의해 모든 자연수 n 과 복소수 α 에 대하여 다음 식이 성립한다.

$$(1 + \alpha)^n = {}_n C_0 + {}_n C_1 \alpha + {}_n C_2 \alpha^2 + \cdots + {}_n C_n \alpha^n$$

(※) 수열 $\{a_n\}$ 은 다음과 같이 이항계수의 합으로 정의된다. 이때, m 은 $\frac{n}{3}$ 을 넘지 않는 최대 정수이다.

$$a_n = {}_n C_0 + {}_n C_3 + {}_n C_6 + \cdots + {}_n C_{3m}$$

(1-1) $\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ 일 때, 음이 아닌 정수 k 에 대하여 다음 등식이 성립함을 보이시오. (5점)

$$\frac{1 + \omega^k + \omega^{2k}}{3} = \begin{cases} 1, & k \text{가 } 3 \text{의 배수일 때} \\ 0, & k \text{가 } 3 \text{의 배수가 아닐 때} \end{cases}$$

(1-2) 자연수 n 에 대하여 다음 등식이 성립함을 보이시오. (10점)

$$a_n = \frac{2^n + (1 + \omega)^n + (1 + \omega^2)^n}{3}$$

(1-3) 자연수 n 이 3의 배수일 때, $\left| a_n - \frac{2^n}{3} \right|$ 의 값을 구하시오. (5점)

(1-4) 자연수 n 이 3의 배수가 아닐 때, $\left| a_n - \frac{2^n}{3} \right|$ 의 값을 구하시오. (5점)

논술고사 (자연계열)

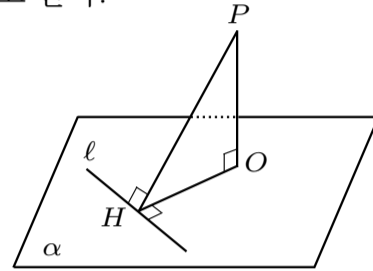
[문제 2] (25점) 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오.

(가) 한 직선 위에 있지 않은 서로 다른 세 점은 평면을 결정한다.

(나) 직선 l 이 평면 α 위의 서로 다른 두 직선 m, n 의 교점 O 를 지나고 m, n 과 각각 수직이면 직선 l 은 평면 α 에 수직이다.

(다) 평면 α 위에 있지 않은 한 점 P 와 평면 α 위의 직선 l , 직선 l 위의 한 점 H , 평면 α 위에 있으면서 직선 l 위에 있지 않은 점 O 에 대하여 다음의 성질이 성립한다. 이를 삼수선의 정리라고 한다.

- (1) $\overline{PO} \perp \alpha, \overline{OH} \perp l$ 이면 $\overline{PH} \perp l$ 이다.
- (2) $\overline{PO} \perp \alpha, \overline{PH} \perp l$ 이면 $\overline{OH} \perp l$ 이다.
- (3) $\overline{PH} \perp l, \overline{OH} \perp l, \overline{PO} \perp \overline{OH}$ 이면 $\overline{PO} \perp \alpha$ 이다.



(※) 평면 α 와 평면 α 위에 있지 않은 두 점 P, Q 가 주어졌다. (단, 직선 PQ 는 α 와 수직이 아니다.) 점 P 를 지나고 직선 PQ 에 수직인 평면을 α' 라 두고 α 와 α' 의 교선을 l 이라 하자. 점 Q 에서 α 에 내린 수선의 발을 R 이라 하고, R 에서 l 에 내린 수선의 발을 S 라 하자.

(2-1) 선분 PS 와 l 이 수직임을 보이시오. (5점)

(2-2) 네 점 P, Q, R, S 는 같은 평면에 있음을 보이시오. (10점)

(2-3) 좌표공간의 점 P, Q 에 대하여 Q 의 좌표가 $(2, 3, 4)$ 이고, α 가 xy 평면이라 하자. 직선 l 의 방정식이 $x + 2y = 6, z = 0$ 일 때, $\triangle PRS$ 의 외접원의 반지름을 구하시오. (10점)

논술고사 (자연계열)

[문제 3] (25점) 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오.

(가) ‘ x 는 6의 약수이다.’, ‘ $x = 2x - 1$ ’ 과 같이 변수 x 를 포함한 문장이나 식의 참, 거짓이 x 의 값에 따라 판별될 때, 그 문장이나 식을 조건이라고 한다. 또, 전체집합 U 의 원소 중에서 조건을 참이 되게 하는 x 의 값의 집합을 그 조건의 진리집합이라고 한다.

(나) 명제 $p \rightarrow q$ 에서 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라고 할 때

- $P \subset Q$ 이면 명제 $p \rightarrow q$ 는 참이다.
- $P \not\subset Q$ 이면 명제 $p \rightarrow q$ 는 거짓이다.

(※) a, b 가 상수일 때, 실수의 집합을 전체집합으로 하는 조건 p, q, r 이 다음과 같다.

p : $x > a - b$ 이고 $x < b - a$ 이다.

q : $x > a - b$ 이고 $x < b - a$ 이며, x 는 정수이다.

r : $x \geq a + 1$ 또는 $x \leq b - 2$ 이다.

(3-1) 조건 p 의 진리집합이 공집합일 때, 두 상수 a, b 가 만족하는 부등식을 구하시오. (5점)

(3-2) 명제 $p \rightarrow r$ 이 거짓이 되도록 하는 정수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 를 모두 구하시오. (10점)

(3-3) 명제 $q \rightarrow r$ 이 거짓이 되도록 하는 정수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 를 모두 구하시오. (10점)

논술고사 (자연계열)

[문제 4] (25점) 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오.

(가) 닫힌 구간 $[a, b]$ 에서 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 연속이고 $f(x) \leq g(x)$ 이면 다음 부등식이 성립한다.

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

(나) 모든 실수 x 에 대하여 함수 $g(x)$ 가 미분가능하고 $g(x) > 0$ 일 때 다음이 성립한다.

$$\frac{d}{dx} (e^{-x}g(x)) = e^{-x} (g'(x) - g(x))$$

(다) 모든 실수 x 에 대하여 함수 $g(x)$ 가 미분가능하고 $g(x) > 0$ 일 때 다음이 성립한다.

$$\frac{d}{dx} (\ln g(x)) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

(※) 실수 전체에서 정의된 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 는 미분가능하다.

(4-1) 실수 $0 \leq x \leq 3$ 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이고, $f(0) = 1$, $f(3) = 2$ 인 함수 $f(x)$ 에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오. (5점)

$$1 \leq \int_1^2 f(x) dx \leq 2$$

(4-2) 실수 $x \geq 0$ 에 대하여 $g'(x) \geq g(x)$ 이고 $g(0) = 1$ 일 때, $x \geq 0$ 에서 $g(x) \geq e^x$ 임을 보이시오. (10점)

(4-3) 실수 $0 \leq x \leq 3$ 에 대하여 $g'(x) \geq g(x)$ 이고, $g(0) = 1$, $g(3) = e^4$ 인 함수 $g(x)$ 에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오. (10점)

$$\frac{3}{2} \leq \int_1^2 \ln g(x) dx \leq \frac{5}{2}$$

논술고사 (짜연계열)

<연 습 장>