2017학년도 인하대학교 수시모집 모의논술고사 자연계열
해설, 예시 답안, 평가 기준

■ [문제 1] (25점)

1. 일반 정보

유형	논술고사	
전형명	논술우수자	
계열(과목) 및 문항번호	자연계 수학문제1	
출제범위	과목명	수학 I, 수학 II, 미적분 I
	내용영역 또는 핵심개념/용어	나머지 정리, 수열의 귀납적 정의, 수열의 극한
답안 작성 시간	30분	

2. 문항 및 제시문 출제 근거

적용 교육과정	교육과학기술부 고시 제 2011-361호 [별책 8]				
성취기준	1. 수학 I, 다항식, 나머지정리 : 나머지정리의 의미를 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다. 2. 수학 II, 수열, 수학적 귀납법 : 수열의 귀납적 정의를 이해한다. 4. 미적분 I, 수열의 극한, 수열의 극한 : 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.				
※ 문제 출제에 활용한 고등학교 교과서					
참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 I	이준열 외 9인	천재교육	2014	32~33
	수학 II	정상권 외 7인	㈜금성출판사	2014	164
	수학 II	김창동 외 14인	㈜교학사	2014	154
	미적분 I	정상권 외 7인	㈜금성출판사	2014	11~27

3. 출제 의도 및 해설

▶ 출제의도

다항식의 나눗셈으로부터 피보나치 수열과 황금비를 얻는 과정에서 식을 정리하는 능력, 식을 변형하여 논리적으로 증명하는 능력, 수열의 극한을 계산하는 능력 등을 평가하기 위한 것이다.

▶ 해설

(가) 주제 분석

다항식의 나눗셈으로부터 피보나치 수열과 황금비를 얻는 과정을 소재로 삼았다.

(나) 제시문 해설

피보나치 수열과 황금비를 설명하였다.

(다) 제시문 출처

고등학교『수학 II』교과서, 조도연 12인, 경기도교육청, 2014년, 168쪽 활용

(라) 논제 해설

(1-1)은 x^n 을 x^2-x-1 로 나누었을 때 나머지가 $a_n x+b_n$ 일 때, 다항식의 나눗셈 표현과 나머지 정리를 사용하여 상수 a_n 을 이차방정식 $x^2-x-1=0$ 의 두 근 α, β $(\alpha<\beta)$의 식으로 나타내는 것이고, (1-2)는 (1-1)에서 얻은 수열 $\{a_n\}$ 이 피보나치 수열임을 증명하는 것이다. (1-3)은 제시문의 정보를 활용하여 피보나치 수열에서 황금비를 구하는 문제이다.

4. 채점기준(평가기준)

- 나머지정리의 의미를 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있는 능력
- 수열의 귀납적 정의에 대한 기본 지식
- 수열의 극한을 계산하는 능력
- 논제의 요구사항을 논리적, 체계적으로 서술하는 능력

5. 예시 답안

(1-1) (8점) $x^n=(x^2-x-1)q_n(x)+a_n x+b_n$ 이라 두자. 여기서 $q_n(x)$ 는 x^n 을 x^2-x-1 로 나눈 몫이고, $n=1$ 일 때, $q_1(x)=0$ 이다. 이 식에 α,β 를 대입하면, $\alpha^n=a_n\alpha+b_n$, $\beta^n=a_n\beta+b_n$ 을 얻는다. 여기서 b_n 을 소거하여 a_n 에 대하여 풀면 $a_n=\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$ 이다.

(1-2) (10점) 먼저 α,β 는 $x^2-x-1=0$ 의 근이므로

$$\alpha+\beta=1,\ \alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=-1,\ \alpha^2=\alpha+1,\ \beta^2=\beta+1 \text{ ---(1)}$$

을 만족한다. 우선 초기조건을 확인하자. $a_1=\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha-\beta}=1$, $a_2=\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta}=\alpha+\beta=1$ $(\because (1))$

한편
$$\begin{aligned} a_n+a_{n+1} &= \frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}+\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta} \\ &= \frac{\alpha^n(1+\alpha)-\beta^n(1+\beta)}{\alpha-\beta} = \frac{\alpha^n\alpha^2-\beta^n\beta^2}{\alpha-\beta} \quad (\because (1)) \\ &= \frac{\alpha^{n+2}-\beta^{n+2}}{\alpha-\beta} = a_{n+2} \end{aligned}$$

이다. 그러므로 수열 $\{a_n\}$ 은 피보나치 수열이다.

(1-3) (7점) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha^n-\beta^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n-\beta}{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n-1}$ 이다. 여기서 $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|=\left|\dfrac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right|<1$ 이므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n=0$ 이다. 따라서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\beta=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 이다.

■ [문제 2] (25점)

1. 일반 정보

유형	논술고사	
전형명	논술우수자	
계열(과목) 및 문항번호	자연계 수학문제2	
출제범위	과목명	확률과 통계
	내용영역 또는 핵심개념/용어	경우의 수, 원순열, 조합, 여사건의 확률
답안 작성 시간	30분	

2. 문항 및 제시문 출제 근거

적용 교육과정	교육과학기술부 고시 제 2011-361호 [별책 8]				
성취기준	3. 확률과 통계, 순열과 조합, 경우의 수 : 합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다. 3. 확률과 통계, 순열과 조합, 순열과 조합 : 원순열을 이해하고, 그 순열의 수를 구할 수 있다. 3. 확률과 통계, 순열과 조합, 확률 : 여사건의 확률의 뜻을 알고, 이를 활용할 수 있다.				
※ 문제 출제에 활용한 고등학교 교과서					
참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	확률과 통계	류희찬 외 17인	천재교과서	2015	13~45 79~97
	확률과 통계	황선욱 외 10인	좋은책 신사고	2014	11~34 61~75
	확률과 통계	신항균 외 11인	㈜지학사	2014	13~31 63~79
	확률과 통계	김창동 외 14인	㈜교학사	2014	12~47 76~91

3. 출제 의도 및 해설

▶ 출제의도

n명의 학생을 문제 구성(※)에서 정한 방법으로 조 편성을 하는 경우로 원순열의 개념 파악 능력, 논리적으로 두 개 조로 편성하는 추론 능력, 앞의 결과를 이용하여 여사건의 확률을 계산하는 능력 등을 평가하기 위한 것이다.

▶ 해설

(가) 주제 분석

n명의 학생을 문제 구성(※)에서 정한 방법으로 조 편성을 할 때, 편성된 조가 한 개, 두 개, 세 개 이상일 확률을 구하는 내용을 소재로 삼았다.

(나) 제시문 해설

제시문 (가)에서는 원순열의 개념을 설명하고 구하는 공식을 제공하였다. 제시문 (나)에서는 n번째 조화수의 개념을 설명하고 1번째 조화수의 값부터 8번째 조화수의 값을 제공하였다.

(다) 제시문 출처

제시문 (가) : 고등학교『확률과 통계』교과서, 이강섭 외 14인, ㈜미레엔, 2014년, 18쪽 활용
제시문 (나) : 창작

(라) 논제 해설

n명의 학생을 문제 구성(※)에서 정한 방법으로 조 편성을 하는 경우로 (2-1)은 편성된 조가 한 개가 될 확률을 구하는 것인데, n명을 한 개의 원형 책상에 배열하는 원순열로 파악하여 구할 수 있다. (2-2)는 편성된 조가 두 개가 될 확률을 조화수가 포함된 식으로 나타내는 것인데, 1번 학생이 포함된 조와 포함되지 않은 조로 구별한 후 원순열과 조화수를 적용하여 구할 수 있다. (2-3)은 $n=8$일 때, 세 개 이상의 조로 편성될 확률을 구하는 것인데, 앞의 두 결과와 여사건의 확률을 이용하여 구할 수 있다.

4. 채점기준(평가기준)

- 문제 구성(※) 이해 능력 및 제시문 활용 능력
- 경우의 수, 순열, 조합, 확률의 기본 지식
- 논리적인 추론 능력
- 논제의 요구사항을 논리적, 체계적으로 서술하는 능력

5. 예시 답안

(2-1) (5점) 학생들이 종이를 뽑는 전체 경우의 수는 $n!$이 된다. 이 때 편성된 조가 한 개가 될 경우의 수는 처음부터 학생들을 한 개의 원형 책상에 둘러서게 하는 경우의 수와 같다. 즉 원순열의 개수 $(n-1)!$과 같다. 따라서 편성된 조가 한 개가 될 확률은 $\dfrac{(n-1)!}{n!}=\dfrac{1}{n}$이다.

(2-2) (10점) 편성된 조가 두 개가 되는 경우의 수는 두 개의 원형 책상 A, B에 1번 학생이 포함된 조와 그렇지 않은 조의 학생들을 각각 둘러서게 하는 경우의 수와 같다. 이제 2번부터 n번까지의 학생들 중 1번 학생과 같이 책상 A에 배치할 학생을 $k-1$명을 선택한다. 이 경우의 수는

$$_{n-1}C_{k-1}=\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}$$

이다. 선택되지 않은 나머지 $n-k$명의 학생은 책상 B에 배치를 한다. 책상 B에 반드시 한 명 이상의 학생이 있어야 하므로, k의 범위는 $1\le k\le n-1$이 된다. 책상 A에 1번 학생과 선택된 k명의 학생을 둘러서게 배치를 하는 경우의 수는 $(k-1)!$이다. 책상 B에 나머지 $n-k$명의 학생을 둘러서게 배치를 하는 경우의 수는 $(n-k-1)!$이다. 그러므로 총 경우의 수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}\,(k-1)!\,(n-k-1)! &= \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(n-1)!}{(n-k)} \\ &= (n-1)!\left\{\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-2}+\cdots+\frac{1}{2}+1\right\} \\ &= (n-1)!\,H_{n-1}\end{aligned}$$

따라서 편성된 조가 두 개가 될 확률은 $\dfrac{(n-1)!\,H_{n-1}}{n!}=\dfrac{H_{n-1}}{n}$이다.

(2-3) (10점) 8명의 학생을 문제 구성(※)과 같이 조 편성을 할 때, $n=8$이므로, (2-1)에 의해서 정확히 1개의 조로 편성될 확률은 $\frac{1}{8}$이고, (2-2)에 의해서 정확히 2개의 조로 편성될 확률은 $\frac{H_7}{8}=\frac{363}{1120}$이 된다. 따라서 여사건 확률에 의해 세 개 이상의 조로 편성될 확률은 $1-\frac{1}{8}-\frac{363}{1120}=\frac{617}{1120}$이 된다.

■ [문제 3] (25점)

1. 일반 정보

유형	논술고사	
전형명	논술우수자	
계열(과목) 및 문항번호	자연계 수학문제3	
출제범위	과목명	수학 II, 수학 I, 미적분 I, 미적분 II
	내용영역 또는 핵심개념/용어	역함수, 삼차방정식, 다항함수의 극값, 역함수 미분법
답안 작성 시간	30분	

2. 문항 및 제시문 출제 근거

적용 교육과정	교육과학기술부 고시 제 2011-361호 [별책 8]				
성취기준	2. 수학 II, 함수, 유리함수와 무리함수 : 역함수의 뜻을 알고, 주어진 함수의 역함수를 구할 수 있다. 1. 수학 I, 방정식과 부등식, 여러 가지 방정식 : 간단한 삼차방정식과 사차방정식을 풀 수 있다. 4. 미적분 I, 다항함수의 미분법, 도함수의 활용 : 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. 5. 미적분 II, 미분법, 여러 가지 미분법 : 역함수를 미분할 수 있다.				
※ 문제 출제에 활용한 고등학교 교과서					
참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 II	김창동 외 14인	㈜교학사	2014	67~84
	수학 I	조도연 외 16인	경기도교육청	2014	85 111~112
	미적분 I	김창동 외 14인	㈜교학사	2014	118~123
	미적분 II	우정호 외 24인	동아출판	2014	137~138

3. 출제 의도 및 해설

▶ 출제의도

이 문제는 문제에서 약간 비틀어 정의한 함수를 제시문에서 언급하는 부분역함수로 이해할 수 있음을 파악하는 능력과 제시문의 역함수 미분법을 구체적으로 적용하는 능력을 평가하기 위한 것이다.

▶ 해설

(가) 주제 분석

제시문에서 설명된 부분역함수와 역함수 미분법을 소재로 삼았다.

(나) 제시문 해설

제시문 (가)에서는 역함수의 정의와 일대일 함수는 역함수를 갖는다는 것을 설명하였다. 제시문

(나)에서는 일대일 함수가 아닌 경우에도, 정의역의 어떤 부분집합에 국한하여 볼 때 일대일인 경우는 역함수(이 역함수를 부분역함수라 부른다)를 생각할 수 있음을 예를 들어 설명하였다. 제시문 (다)에서는 역함수 미분법을 설명하고 역함수 미분공식을 제공하였다.

(다) 제시문 출처

제시문 (가) : 고등학교『수학 II』교과서, 김창동 외 14인, ㈜교학사, 2014년, 67~84쪽 활용

제시문 (나) : 창작

제시문 (다) : 고등학교『미적분 II』교과서, 우정호 외 24인, 동아출판, 2014년, 137~138쪽 활용

(라) 논제 해설

(3-1)은 실수 t가 부등식 $-16 < t < 16$을 만족할 때, 삼차방정식 $x^3 - 12x - t = 0$이 서로 다른 세 개의 실근을 가짐을 증명하는 것인데, 미분을 이용하여 삼차함수 $f(x) = x^3 - 12x$의 극댓값과 극솟값을 구하여 해결할 수 있다. (3-2)는 (3-1)에서 존재가 밝혀진 세 실근이 t의 함수 $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$일 때, $\frac{1}{f_1{}'(t)} + \frac{1}{f_2{}'(t)} + \frac{1}{f_3{}'(t)}$을 간단히 하는 것인데, $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$가 함수 $f(x)$의 부분역함수들임을 인지하면 문제의 식을 세 실근의 대칭식으로 표현할 수 있게 되며, 여기에 근과 계수와의 관계와 역함수 미분법을 적용하면 요구하는 값을 얻을 수 있다. (3-3)은 제시문과 (3-1)과 (3-2)에서 논의된 역함수의 미분법을 이용한 계산문제이지만, 함수의 대칭성을 이용하여 계산 없이 결과를 유추할 수도 있는 문제이다.

4. 채점기준(평가기준)

- 제시문 이해 및 활용 능력
- 미분에 대한 기본 지식
- 역함수 미분법을 구체적으로 적용하는 능력
- 논제의 요구사항을 논리적, 체계적으로 서술하는 능력

5. 예시 답안

(3-1) (7점) 삼차함수 $f(x) = x^3 - 12x$를 미분하면 $f'(x) = 3(x+2)(x-2)$이고 따라서 $x = -2$일 때 극댓값 16, $x = 2$일 때 극솟값 -16을 가진다. 그러므로 $-16 < t < 16$인 t에 대하여 방정식

$$f(x) = x^3 - 12x = t$$

는 구간 $x < -2$, $-2 < x < 2$, $x > 2$에서 각각 한 개의 실근을 가진다.

(3-2) (10점) (3-1)의 풀이에서와 같이 $f(x) = x^3 - 12x$라고 두자. 변수 t에 대한 함수 $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$

는 각각 구간 $\alpha < x < -2$, $-2 < x < 2$, $2 < x < \beta$에서의 함수 $f(x)$의 부분역함수들이라고 볼 수 있다. 여기서 α와 β는 $\alpha < -2$, $\beta > 2$, $f(\alpha) = -16$, $f(\beta) = 16$을 만족하는 실수이다. 편의상 $x_1 = f_1(t)$, $x_2 = f_2(t)$, $x_3 = f_3(t)$라 두면 x_1, x_2, x_3은 삼차방정식 $x^3 - 12x - t = 0$의 세 근이 된다. 근과 계수와의 관계에서

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0,\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -12,\ x_1x_2x_3 = t$$

이다. 역함수미분법을 이용하여 문제의 식을 정리하면

$$\begin{aligned}\frac{1}{f_1{}'(t)}+\frac{1}{f_2{}'(t)}+\frac{1}{f_3{}'(t)} &= f'(x_1)+f'(x_2)+f'(x_3)\\ &= 3x_1^2-12+3x_2^2-12+3x_3^2-12\\ &= 3(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-36\\ &= 3(x_1+x_2+x_3)^2-6(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)-36\\ &=-6(-12)-36=36\end{aligned}$$

이다.

(3-3) (8점) 편의상 $g_1(x)<0<g_2(x)$라고 하자. 이 두 함수들은 모두 $f(0)$보다 큰 모든 실수들에서 정의되어 있다. 실수 a가 부등식 $a>f(0)$을 만족한다고 하자. 이때 $x_0=g_1(a)$라 두면 $f(x_0)=f(-x_0)=a$이다. 따라서 $g_2(a)=-x_0$이고 $g_1(a)+g_2(a)=0$이다. 또한 합성함수의 미분에 의해

$$f'(-x_0)=-f'(x_0)$$

이다. 이제 문제의 두 번째 식의 값은

$$g_1{}'(a)+g_2{}'(a)=\frac{1}{f'(x_0)}+\frac{1}{f'(-x_0)}=0$$

이다.

■ [문제 4] (25점)

1. 일반 정보

유형	논술고사	
전형명	논술우수자	
계열(과목) 및 문항번호	자연계 수학문제4	
출제범위	과목명	미적분 I, 기하와 벡터
	내용영역 또는 핵심개념/용어	정적분과 미분의 관계, 평면운동에서 점이 이동한 거리
답안 작성 시간	30분	

2. 문항 및 제시문 출제 근거

적용 교육과정	교육과학기술부 고시 제 2011-361호 [별책 8]
성취기준	4. 미적분 I, 다항함수의 적분법, 정적분 : 부정적분과 정적분의 관계를 이해하고, 이를 이용하여 정적분을 구할 수 있다. 6. 기하와 벡터, 평면벡터, 평면 운동 : 정적분을 이용하여 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다.

※ 문제 출제에 활용한 고등학교 교과서

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	미적분 I	김창동 외 14인	㈜교학사	2014	165~166
	미적분 I	우정호 외 24인	동아출판	2014	200~201
	기하와 벡터	이준열 외 9인	천재교육	2014	124~125
	기하와 벡터	신항균 외 11인	㈜지학사	2014	114~115

3. 출제 의도 및 해설

▶ 출제의도

이 문제는 수리논술의 본래 취지에 부합하기 위해서 제시문을 읽고 이해하는 능력과 증명을 논리적으로 서술하는 능력을 평가하기 위한 것이다.

▶ 해설

(가) 주제 분석

평면 위의 두 점 A와 B가 있을 때, 점 A에서 점 B까지 움직인 거리를 최소로 하는 운동은 직선 AB를 따라 움직이는 것임을 소재로 삼았다.

(나) 제시문 해설

제시문 (가)에서는 좌표평면 위를 움직이는 점이 시간 t에서 위치가 매개변수 표현식으로 주어졌을 때, 점이 움직인 거리를 구하는 공식을 제공하였다. 제시문 (나)에서는 구간 $[a,b]$에서 정의된 연속인 함수 $h(x)$가 구간 전체에서 $h(x) \geq 0$을 만족하고 $\int_a^b h(x)\,dx = 0$이면, 구간 전체에서

인하대학교 INHA UNIVERSITY

$h(x)=0$임을 증명하였다. 제시문 (다)에서는 평면 위의 두 점 A와 B가 있을 때, 점 A에서 점 B까지 움직인 거리를 최소로 하는 운동은 직선 AB를 따라 움직이는 것임을 $A(0,0)$와 $B(1,0)$에 대해서 증명하였다.

(다) 제시문 출처

제시문 (가) : 고등학교『기하와 벡터』교과서, 이준열 외 9인, 천재교육, 2014년, 124~125쪽 활용

제시문 (나) : 창작

제시문 (다) : 창작

(라) 논제 해설

(4-1)은 $[a,b]$에서 정의된 연속 함수 $h(x)$가 구간 전체에서 $h(x)\geq 0$을 만족하고 $\int_a^b h(x)\,dx=0$이면, 구간 전체에서 $h(x)=0$임을 증명하는 과정의 일부분을 마무리 하도록 하였다. 정적분과 미분의 관계를 이용하여 한 두 줄 이내인 논리적인 전개로 핵심이 되는 문장을 쓰는 것을 요구하고 있다. (4-2)는 평면 위의 두 점 $A(0,0)$와 $B(1,0)$가 있을 때, 점 A에서 점 B까지 움직인 거리를 최소로 하는 운동은 직선 AB를 따라 움직이는 것임을 증명하는 과정의 일부분을 마무리 하도록 하였다. 제시문 (나)의 결과를 적용하는 것이다. (4-3)은 난이도가 높은 문제로서 이 문제를 해결하기 위해서는 먼저 주어진 식을 특정하게 설정한 점의 운동에서 점이 이동한 거리로 해석하고 제시문 (다)를 이용해서 이 점이 어떤 경로로 움직이는지 파악하여 이를 계산해 내는 것이다.

4. 채점기준(평가기준)

- 정적분과 미분의 관계 적용 능력
- 제시문 이해 및 활용 능력
- 추론 능력
- 논제의 요구사항을 논리적, 체계적으로 서술하는 능력

5. 예시 답안

(4-1) (5점) $H(x)=\int_a^x h(t)\,dt$라고 하면, 위의 등식으로부터 모든 $x\in[a,b]$에 대하여 $H(x)=0$이다. 그런데, 정적분과 미분의 관계로부터 $0=H'(x)=h(x)$이다.

(4-2) (10점) $h(x)=\sqrt{\{f'(x)\}^2+\{g'(x)\}^2}-\sqrt{\{f'(x)\}^2}$라고 하면, 위 등식으로부터 $\int_a^b h(t)\,dt=0$이고, 구간 $[a,b]$에서 $\{f'(x)\}^2+\{g'(x)\}^2\geq\{f'(x)\}^2$이므로 $h(x)\geq 0$이다. 제시문 (나)에 의하여 구간 $[a,b]$에서 $h(x)=0$이 성립한다. 따라서 모든 $x\,(a\leq x\leq b)$에 대하여 $\sqrt{\{f'(x)\}^2+\{g'(x)\}^2}=\sqrt{\{f'(x)\}^2}$ 이므로
$g'(x)=0$이다. 이는 $g(x)$는 상수 함수임을 의미하고, $g(a)=0$이므로 구간 $[a,b]$에서 $g(x)=0$이다.

(4-3) (10점) 점 Q는 위치가 $0\leq t\leq\frac{\pi}{2}$일 때 $x=f(t),\,y=g(t)$이고, $\frac{\pi}{2}\leq t\leq\pi$일 때

$$x=2f(t)-f\left(\frac{\pi}{2}\right),\ y=3g(t)-2g\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

로 주어지는 평면운동을 한다고 하자. 그러면, 문제의 식은 점 Q가 시각 $t=0$에서 시각 $t=\pi$까지 움직인 거리이다. 문제의 조건에서 점 Q는 시각 $t=0$일 때 원점에 위치하고 시각 $t=\frac{\pi}{2}$일 때, 직선 $y=1$ 위에 있고 시각 $t=\pi$에서는 좌표가 점 $(1,-2)$이고, 시각 $t=0$에서 시각 $t=\pi$까지 움직인 거리를 최소로 하는 운동이다. 이 운동은 제시문 (다)에 의하여 아래 [그림1]에서 직선 $O\to A\to B$ 운동이다. 아래 [그림1]에서 시각 $t=\frac{\pi}{2}$일 때 점 $A(f(\frac{\pi}{2}),1)$는 원점 O와 시각 $t=\pi$일 때 점 $B(1,-2)$을 직선 $y=1$에 대칭시킨 점 $C(1,4)$를 지나는 직선 $y=4x$ 위에 있다. 따라서 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{4}$이다. $0\le t\le\frac{\pi}{2}$일 때,

$$f(t)=x=\frac{1}{4}y=\frac{1}{4}g(t)=\frac{1}{4}\sin^2 t$$

이다. 따라서 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{4}\sin^2\frac{\pi}{3}=\frac{1}{4}\frac{3}{4}=\frac{3}{16}$이다.