2017학년도 모의고사

논술고사 문제지

(자연계열) : 120분

학 교 명		전형유형	논술
학년 (반)		성 명	

■ 일반 유의사항

1. 시험시간은 120분, 배점은 100점 만점입니다.
2. 각 문항의 답안은 반드시 해당 답란에 작성하시오.
3. 답안을 구상할 때 문제지의 여백이나 문제지 내의 연습장을 사용하시오.
4. 답안을 작성할 때 반드시 흑색 필기구만 사용하시오(연필, 샤프 사용 가능, 사인펜 불가).
5. 답안을 정정할 때 두 줄을 긋고 정정하시오(수정액, 수정 테이프, 지우개 사용 가능).

※ 답안지는 절대 교체할 수 없습니다.

■ 답안 작성 유의사항

1. 제목은 쓰지 말고, 논제 번호를 명시한 후 답안을 작성하시오.
2. 제시된 분량을 지키시오.
3. 제시문의 문장을 그대로 옮기지 마시오.
4. 수험번호, 성명 등 신상에 관련된 사항을 답란이나 답안지의 여백에 드러내지 마시오.
5. 풀이의 과정을 순차적으로 서술하되, 필요한 경우에 수식 및 그림을 사용할 수 있으며, 수식은 반드시 문장 속에 포함 시키시오.

논술고사 (자연계열)

수학 : 100점

[문제 1] (25점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

피사의 레오나르도로 널리 알려진 레오나르도 피보나치가 1202년 토끼의 번식을 언급하면서 다음과 같은 수열을 연구하였다.

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ 233,\ 377,\ 610,\ 987,\ \cdots$$

이를 피보나치 수열(Fibonacci sequence)이라 부르고, 다음과 같이 관계식으로 정의할 수 있다.

$$f_1 = 1,\ f_2 = 1,\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

이 피보나치 수열에서 이웃하는 두 항의 비의 극한값, 즉 $\lim_{n\to\infty}\frac{f_{n+1}}{f_n}$의 값은 황금비가 된다.

(1-1) 다항식 x^n 을 $x^2 - x - 1$ 로 나누었을 때 나머지를 $a_n x + b_n$ 이라고 하자. (단, a_n, b_n 은 상수이다.) 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 a_n 을 이차방정식 $x^2 - x - 1 = 0$ 의 두 근 $\alpha,\ \beta\ (\alpha < \beta)$ 의 식으로 나타내시오. (8점)

(1-2) 수열 $\{a_n\}$ 은 피보나치 수열임을 보이시오. (10점)

(1-3) 황금비를 구하시오. (7점)

논술고사 (자연계열)

[문제 2] (25점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) '원순열'은 서로 다른 n개를 원형으로 나열하는 것을 말한다. 서로 다른 n개를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $n!$ 인데, 이것을 원형으로 나열하면 그 전체에는 같은 것이 n가지 씩 있다. 따라서 원순열의 경우의 수는

$$\frac{n!}{n} = (n-1)!$$

이다.

(나) 'n번째 조화수 (n-th Harmonic number)'란 1부터 n까지의 정수의 역수의 합을 말하며 H_n으로 나타낸다.

$$H_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

조화수는 매우 느리게 커진다. 1,000,000번째 조화수 조차도 15 보다 작지만 조화수는 결국 발산한다. 처음 8개의 조화수를 계산하면 다음과 같다.

$$H_1 = 1,\ H_2 = \frac{3}{2},\ H_3 = \frac{11}{6},\ H_4 = \frac{25}{12},\ H_5 = \frac{137}{60},\ H_6 = \frac{49}{20},\ H_7 = \frac{363}{140},\ H_8 = \frac{761}{280}$$

(※) 1번부터 n번까지 번호가 부여된 n명의 학생이 있다. 1번부터 n번까지 번호가 적힌 n장의 카드를 n명의 학생이 각각 한 장씩 뽑는다. 각 학생은 자기가 뽑은 카드의 번호와 같은 번호가 부여된 학생의 왼손을 오른손으로 잡는다. 이렇게 손을 잡아 만든 학생들의 연결 형태를 생각해 보면, 몇 개의 원 모양이 된다. (이 원 모양 중 일부는 한 명 혹은 두 명으로도 구성될 수 있다.) 이 때, 서로 한 원 모양으로 연결되어 있는 학생들끼리 같은 조로 편성한다.

예를 들어, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7번 학생이 뽑은 카드의 번호가 각각 4, 7, 5, 2, 3, 6, 1번이라면, 3개의 조로 편성되며, 3개의 조는 각각 1, 4, 2, 7번 학생, 3, 5번 학생, 6번 학생으로 편성된다.

(2-1) 편성된 조가 한 개가 될 확률을 구하시오. (5점)

(2-2) 편성된 조가 두 개가 될 확률을 조화수가 포함된 식으로 나타내시오. (10점)

(2-3) 8명의 학생을 위와 같이 조 편성을 할 때, 세 개 이상의 조로 편성될 확률을 구하시오. (10점)

논술고사 (자연계열)

[문제 3] (25점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 집합 X에서 정의된 함수 $f(x)$의 역함수는 $f(x)$의 치역 Y에서 정의된 함수 $g(x)$로, X에 속한 임의의 x에 대해서 $g(f(x))=x$를 만족하는 것이다. 함수 $f(x)$가 역함수를 갖는다면 $f(x)$는 일대일 함수이다.

(나) 함수 $f(x)$가 일대일 함수가 아닌 경우에도, 정의역의 어떤 부분집합 I에 국한하여 볼 때는 일대일인 경우가 있다. 이때 함수 $f(x)$가 부분집합 I에서만 정의된 것으로 보고 역함수 $g(x)$를 생각할 수 있는데, 이러한 함수 $g(x)$를 부분집합 I에서 $f(x)$의 부분역함수라 부른다. 예를 들어, 함수 $f(x)=x^2$은 구간 $x \ge 0$에서 부분역함수 $g_1(x)=\sqrt{x}$와 구간 $x \le 0$에서 부분역함수 $g_2(x)=-\sqrt{x}$를 가진다.

(다) 역함수의 미분법 : 미분가능한 함수 $f(x)$가 역함수 $g(x)$를 갖는다고 하자. 한 점 $x=a$에서 $f'(a) \neq 0$일 때, 함수 $g(x)$는 $x=b=f(a)$에서 미분가능하고 $g'(b)=\dfrac{1}{f'(a)}$이다.

(3-1) 실수 t가 부등식 $-16 < t < 16$을 만족할 때, 삼차방정식 $x^3-12x-t=0$은 서로 다른 세 실근을 가짐을 보이시오. (7점)

(3-2) (3-1)에서와 같이 $-16 < t < 16$일 때, 삼차방정식 $x^3-12x-t=0$의 세 실근을 크기 순서대로 각각 $f_1(t) < f_2(t) < f_3(t)$라고 두면, t의 함수 $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$는 모두 미분가능하다. 이때 $\dfrac{1}{f_1{}'(t)}+\dfrac{1}{f_2{}'(t)}+\dfrac{1}{f_3{}'(t)}$을 간단히 하시오. (10점)

(3-3) 실수 전체에서 정의된 함수 $f(x)$는 우함수이고 미분가능하며 $x>0$에서 $f'(x)>0$이고 또한 $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$라고 한다. 구간 $x<0$과 $x>0$에서의 $f(x)$의 부분역함수를 각각 $g_1(x)$, $g_2(x)$라고 할 때, $a>f(0)$인 실수 a에 대하여 $g_1(a)+g_2(a)$와 $g_1{}'(a)+g_2{}'(a)$의 값을 구하시오. (8점)

논술고사 (자연계열)

[문제 4] (25점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치가 $x=f(t)$, $y=g(t)$일 때, $t=a$에서 $t=b$ $(a \le b)$까지 점 P가 움직인 거리 s는 식 $s=\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt$로 주어진다.

(나) 구간 $[a,b]$에서 정의된 연속인 함수 $h(x)$가 구간 전체에서 $h(x) \ge 0$을 만족하고 $\int_a^b h(x)\,dx=0$이면, 구간 전체에서 $h(x)=0$임을 다음과 같이 증명할 수 있다.

모든 $x \in [a,b]$에 대하여 $h(x) \ge 0$이므로, $\int_a^x h(t)dt \ge 0$이고 $\int_x^b h(t)dt \ge 0$이다. 그런데,

$$\int_a^x h(t)\,dt+\int_x^b h(t)\,dt=\int_a^b h(x)\,dx=0$$

이고 좌변의 두 항은 모두 음이 아닌 실수이므로, $\int_a^x h(t)\,dt=0$이고 $\int_x^b h(t)\,dt=0$이다.

㉠

따라서 구간 $[a,b]$에서 $h(x)=0$이다.

(다) 평면 위의 두 점 $A(a_1,a_2)$, $B(b_1,b_2)$가 있을 때, 점 A에서 점 B까지 움직인 거리를 최소로 하는 운동은 직선 AB를 따라 움직이는 것이다. 이 명제를 $A(0,0)$와 $B(1,0)$에 대해서 다음과 같이 증명할 수 있다.

점 P의 시각 t $(a \le t \le b)$에서의 위치가 $x=f(t)$, $y=g(t)$일 때(단, $f(t)$, $g(t)$는 도함수가 연속인 함수), 점 P가 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 $A(0,0)$에서 점 $B(1,0)$까지 움직인 거리를 최소로 하면서 운동한다고 하자. 점 P에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 Q라고 하면, Q는 $t=a$에서 $t=b$까지 직선 AB 위를 움직이고 Q의 좌표는 $(f(t),0)$이다. $\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2 \ge \{f'(t)\}^2$이므로, 점 P가 움직인 거리 $\int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt$는 점 Q가 움직인 거리 $\int_a^b \sqrt{0^2+\{f'(t)\}^2}\,dt$보다 크거나 같다. 점 Q도 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 $A(0,0)$에서 점 $B(1,0)$까지 운동하는데, 점 P는 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 $A(0,0)$에서 점 $B(1,0)$까지 움직인 거리를 최소로 하는 운동이라고 가정하였으므로,

$$\int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt=\int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2}\,dt$$

이 성립한다.

㉡

따라서 점 P와 점 Q는 임의의 시각 $t \in [a,b]$에서 같은 위치를 갖고, 점 P는 직선 AB를 따라 운동한다.

일반적인 두 점 $A(a_1,a_2)$, $B(b_1,b_2)$에 대하여도 비슷한 방법으로 증명할 수 있다.

논술고사 (자연계열)

(4-1) 제시문 (나)의 ㉠에 들어갈 내용을 2줄 이내로 쓰시오. (5점)

(4-2) 제시문 (다)의 ㉡에 들어갈 내용을 문구 “제시문 (나)에 의하여”가 포함되도록 논리적으로 쓰시오. (10점)

(4-3) 도함수가 연속이고 $f(0)=0$, $2f(\pi)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$인 함수 $f(t)$와 $g(t)=\sin^2 t$에 대하여, 시각 t에서의 위치가 $x=f(t),\ y=g(t)\ \ (0\le t\le \pi)$로 주어지는 점 P가 식

$$\int_0^{\pi/2}\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt+\int_{\pi/2}^{\pi}\sqrt{\{2f'(t)\}^2+\{3g'(t)\}^2}\,dt$$

의 값을 최소로 하는 평면운동을 할 때, $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$의 값을 구하시오. (10점)

<연 습 장>

<연 습 장>

<연 습 장>