2016학년도 수시모집

논술고사 문제지 (오후)

(자연계열) : 120분

모집단위		전형유형	논술우수자(일반)
수험번호		성　　명	

■ 일반 유의사항

1. 시험시간은 120분, 배점은 100점 만점입니다.
2. 답안을 구상할 때 문제지의 여백이나 또는 문제지 내의 연습장을 사용하시오.
3. 답안을 작성할 때 반드시 흑색 필기구만을 사용하시오(연필, 샤프 사용 가능, 사인펜 불가).
4. 답안을 정정할 때 두 줄을 긋고 정정하시오(수정액, 수정 테이프, 지우개 사용 가능).
5. 답안은 반드시 해당 문제의 답란에 작성하고, 답란 밖에는 작성하지 마시오.

※ 답안지는 절대 교체할 수 없습니다.

■ 답안 작성 유의사항

1. 제목은 쓰지 말고, 논제 번호를 명시한 후 답안을 작성하시오.
2. 제시된 분량을 지키시오.
3. 제시문의 문장을 그대로 옮기지 마시오.
4. 수험번호, 성명 등 신상에 관련된 사항을 답란이나 답안지의 여백에 드러내지 마시오.
5. 풀이의 과정을 순차적으로 서술하되, 필요한 경우에 수식 및 그림을 사용할 수 있으며, 수식은 반드시 문장 속에 포함 시키시오.

인하대학교
INHA UNIVERSITY

논술고사 (자연계열)

수학 : 100점

[문제 1] (25점) 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오.

(가) '제곱수'란 어떤 양의 정수의 제곱이 되는 수이고, '세제곱수'란 어떤 양의 정수의 세제곱이 되는 수이다. 또한, '거듭제곱수'란 어떤 양의 정수 n과 2 이상의 정수 k에 대하여 n^k 꼴인 수를 말한다. 단, 1은 거듭제곱수이다.

(나) $31^2 = 961,\ 32^2 = 1024,\ 3^6 = 729$ 이다.

(1-1) 1 부터 1000 까지의 정수 중, 제곱수 또는 세제곱수인 정수의 개수를 구하시오. (10점)

(1-2) 제곱수나 세제곱수가 아닌 양의 정수들의 수열

$$2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ \cdots$$

에 대하여, 1000 번째 항을 구하시오. (7점)

(1-3) 1 부터 1000 까지의 양의 정수 중, 거듭제곱수의 개수를 구하시오. (8점)

논술고사 (자연계열)

[문제 2] (25점) 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오.

차수가 $n-1$ 이하인 다항식 $F(x)$를 서로 다른 1차식들의 곱인 n차 다항식 $P(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$으로 나누어 얻어진 유리식 $Q(x)=\dfrac{F(x)}{P(x)}$는 항상

$$Q(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{x-a_i}$$

의 꼴로 나타낼 수 있다.

(※) 양의 정수 n에 대하여 $P_n(x)=(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$이라 하고 $Q_n(x)=\dfrac{1}{P_n(x)}$이라 하자.

(2-1) 유리식 $Q_5(x)$를 제시문과 같이

$$Q_5(x)=\frac{b_1}{x-1}+\frac{b_2}{x-2}+\frac{b_3}{x-3}+\frac{b_4}{x-4}+\frac{b_5}{x-5}$$

로 나타낼 때, 상수 b_1, b_2, b_3, b_4, b_5의 값을 구하시오. (10점)

(2-2) 양의 정수 n에 대하여 $Q_n(x)$를 제시문과 같이 $Q_n(x)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{x-i}$로 나타낼 때, $(n-1)!\displaystyle\sum_{i=1}^{n}|b_i|$를 구하시오. (15점)

논술고사 (자연계열)

[문제 3] (25점) 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오.

평면 α 밖의 한 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발 P'을 평면 α에 내린 점 P의 정사영이라고 한다. 일반적으로 도형 F에 속하는 각 점을 평면 α에 내린 정사영 전체로 이루어진 도형 F'을 평면 α에 내린 도형 F의 정사영이라고 한다. 직선 ℓ이 평면 α와 수직이 아닐 때, 직선 ℓ을 평면 α에 내린 정사영 ℓ'은 직선이 된다.

(※) 구 $x^2+y^2+z^2=11$과 평면 $x+y+2z=6$이 만나서 이루는 원을 C라고 하자.

(3-1) 원 C의 반지름의 길이와 중심의 좌표를 구하시오. (5점)

(3-2) 방정식 $x-k=\dfrac{y+4}{4}=-\dfrac{z}{2}$로 주어지는 직선 ℓ의 평면 $x+y+2z=6$에 내린 정사영이 원 C의 중심을 지나도록 하는 상수 k의 값을 구하시오. (10점)

(3-3) 점 $I(-1,1,0)$와 $Q(-1,1,3)$, 원 C 위의 점 P에 대하여, 내적 $\overrightarrow{IP} \bullet \overrightarrow{IQ}$의 최댓값을 구하시오. (10점)

논술고사 (자연계열)

[문제 4] (25점) 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오.

(가) 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형을 x축의 둘레로 회전시킬 때 생기는 회전체를 x좌표가 x인 점을 지나 x축에 수직인 평면으로 자르면 그 단면은 반지름의 길이가 $|f(x)|$인 원이 된다. 그 단면의 넓이를 $S(x)$라고 하면 $S(x)=\pi\{f(x)\}^2$이 된다. 따라서 이 회전체의 부피는 다음과 같다.

$$V=\int_a^b S(x)\,dx=\pi\int_a^b \{f(x)\}^2\,dx$$

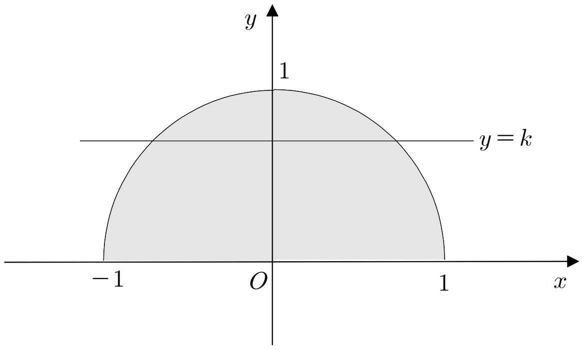
(나) 두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$가 미분가능할 때, 합성함수 $y=f(g(x))$도 미분가능하며 그 도함수는 다음과 같다.

$$\frac{d}{dx}f(g(x))=f'(g(x))g'(x)$$

(다) 함수 $f(x)$의 부정적분 중 하나를 $F(x)$라 하고, 함수 $h(x)$가 미분가능할 때, 제시문 (나)의 합성함수의 미분법을 이용하면 다음과 같은 미분공식을 얻는다.

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^{h(x)} f(t)\,dt\right)=\frac{d}{dx}(F(h(x))-F(a))=f(h(x))h'(x)$$

(※) 아래의 그림과 같이 부등식 $x^2+y^2\le 1$, $y\ge 0$으로 주어진 영역이 직선 $y=k\ (0<k<1)$에 의해 분할된 두 부분 중 위쪽 영역과 아래쪽 영역을 직선 $y=k$를 중심으로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피를 각각 $V_1(k)$, $V_2(k)$라고 하자.



(4-1) $V_1(k)-V_2(k)$를 구하시오. (10점)

(4-2) $V_1(k)$를 k에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dk}V_1(k)=C_1\int_k^1\sqrt{1-x^2}\,dx+C_2$$

로 나타낼 수 있다. 이때 상수 C_1과 C_2를 구하시오. (10점)

(4-3) $V_1(k)+V_2(k)$가 $k=c$에서 최솟값을 가질 때, $\int_0^c\sqrt{1-x^2}\,dx$의 값을 구하시오. (5점)

<연 습 장>

2016학년도 수시모집 논술우수자(일반) 논술고사(오후) 출제의도 및 해설

[문제 1] (25점)

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 / □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술우수자 자연계(오후)	
계열(과목) 및 문항번호	수학문제1	
출제범위	과목명	수학
	내용영역 또는 핵심개념/용어	집합의 연산 법칙 제곱수, 세제곱수, 거듭제곱수
답안 작성 시간	20분	

2. 문항 및 제시문 출제 근거

적용 교육과정	교육인적자원부 고시 제 2007-79호 [별책 8]				
성취기준	1. 수학, 수와 연산 : 집합의 연산법칙을 이해한다.				
※ 문제 출제에 활용한 고등학교 교과서					
참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	계승혁 외 3인	성지출판(주)	2009	15~23
	수학	이재학 외 6인	(주)금성출판사	2009	12~21

3. 출제의도

별다른 수학적 지식이 없이도 어떤 집합의 원소를 세는 문제로, 기본적인 수리적인 능력을 평가한다.

4. 해설

(가) 주제 분석

제곱수, 세제곱수, 그리고 거듭제곱수의 개수를 계산할 수 있다.

(나) 제시문 해설

제시문 (가)에서는 제곱수, 세제곱수, 거듭제곱수에 대한 정의를 제공하였다.

제시문 (나)에서는 $31^2=961,\ 32^2=1024,\ 3^6=729$ 을 제공하였다.

(다) 제시문 출처

창작

(라) 논제 해설

(1-1)에서는 합집합 $A\cup B$의 원소의 개수는 두 집합 A와 B의 원소의 개수의 합에서 교집합 $A\cap B$의 원소의 개수를 뺀 값임은 기본적인 사실이다. 이것을 이용하여 주어진 조건을 만족하는 원소를 꼼꼼히 써 주면 답을 쉽게 구할 수 있다. (1-2)에서는 제곱수나 세제곱수가 아닌 수 들을 나열했을 때 1000번째 항을 찾는 것으로 (1-1)의 결과와 제시문(나)를 이용하여 구할 수 있다. (1-3)에서는 (1-1)과 (1-2)의 결과를 활용하는 문제이다.

5. 채점기준(평가기준)

- 합집합의 원소의 개수를 구하는 능력
- 수리적인 계산 능력
- 논제의 요구사항을 논리적, 체계적으로 서술하는 능력

6. 모범답안

(1-1) (10점)

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$를 이용한다.

6 제곱수 : $1^6, 2^6, 3^6$ 로 3개

제곱수 : 1 ~ 31 까지 31개

세제곱수 : 1 ~ 10 까지 10개

$\therefore\ 31+10-3=38$ 개

(1-2) (7점)

1부터 1000까지 $1000-38=962$개 항이 있고 1000 이상인 수들 중에는 1001부터 연속인 38개의 수 중에 제곱수 또는 세제곱수는 $32^2=1024$ 하나만 있으므로 1000번째 항은 1039이다.

(1-3) (8점)

n의 거듭제곱수 중에서 1000 이하인 것의 개수를 $P(n)$이라 하자.

$P(1)=1,\ P(2)=8,\ P(3)=5,\ P(5)=3$

$P(6)=P(7)=P(10)=2$

$P(11)=\ \cdots\ =P(31)=1$ (이 중 16, 25, 27 은 제외)

$\because\ 1+8+5+3+2+2+2+(21-3)=41$ 개.

(별해) (1-1)에서 구한 38개의 수 외에 $2^5, 2^7, 3^5$ 3개만 추가하면 되므로 41개.

[문제 2] (25점)

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 / □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술우수자 자연계(오후)	
계열(과목) 및 문항번호	수학문제2	
출제범위	과목명	수학, 적분과 통계
	내용영역 또는 핵심개념/용어	항등식, 유리식 계산 이항정리, 이항계수
답안 작성 시간	30분	

2. 문항 및 제시문 출제 근거

적용 교육과정	교육인적자원부 고시 제 2007-79호 [별책 8]				
성취기준	1. 수학, 문자와 식 : 유리식의 뜻을 알고 그 계산을 할 수 있다. 6. 적분과 통계, 순열과 조합 : 이항정리를 이용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.				
※ 문제 출제에 활용한 고등학교 교과서 및 기타 자료					
참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	이재학 외 6인	(주)금성출판사	2009	94~98
	수학	계승혁 외 3인	성지출판(주)	2009	105~110
	수학	김수한 외 9인	(주)교학사	2009	92~96
	수학	황선욱 외 2인	좋은책 신사고	2009	94~98
	적분과 통계	최용준 외 9인	(주)천재교육	2010	91~96
	적분과 통계	성지출팜(주)	계승혁 외 5인	2010	94~99

3. 출제의도

고등학교 교과 과정에서 기본적으로 다루는 다항식과 유리식에 대한 기본적인 내용들을 잘 이해하고, 두 개 이상의 유리식을 분모가 같은 유리식으로 통분하는 과정에서 패턴인식과 처리능력을 평가한다.

4. 해설

(가) 주제 분석

주어진 유리식을 이해하고 분석하여 2개 이상의 유리식의 합으로 나타내고 분자들의 계수를 조합의 수로 논리적으로 표현할 수 있다.

(나) 제시문 해설

차수가 $n-1$ 이하인 다항식 $F(x)$를 서로 다른 1차식들의 곱인 n차 다항식

$$P(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$$

으로 나누어 얻어진 유리식 $Q(x)=\dfrac{F(x)}{P(x)}$는 항상

$$Q(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{x-a_i}$$

의 꼴로 나타낼 수 있다는 정보를 제공하였다.

(다) 제시문 출처

창작

(라) 논제 해설

(2-1)에서는 계산을 통해 계수들 b_i의 패턴을 인식하고 (2-2)에서는 일반적인 상황에서 b_i를 n의 식으로 표현하고 그 합을 구한다.

5. 채점기준(평가기준)

• 유리식의 합의 계산에서 통분 능력
• 논리적 분석 및 추론 능력
• 패턴인식과 처리능력
• 논제의 요구사항을 논리적, 체계적으로 서술하는 능력

6. 모범답안

(2-1) $P_5(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$에 대해 다음을 얻는다.

$$Q_5(x)=\frac{1}{P_5(x)}=\frac{b_1}{x-1}+\frac{b_2}{x-2}+\frac{b_3}{x-3}+\frac{b_4}{x-4}+\frac{b_5}{x-5}$$

$$\Rightarrow\quad 1=b_1\frac{P_5(x)}{x-1}+b_2\frac{P_5(x)}{x-2}+b_3\frac{P_5(x)}{x-3}+b_4\frac{P_5(x)}{x-4}+b_5\frac{P_5(x)}{x-5}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\quad 1=\;&b_1(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)\\&+b_2(x-1)(x-3)(x-4)(x-5)\\&+b_3(x-1)(x-2)(x-4)(x-5)\\&+b_4(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)\\&+b_5(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)\end{aligned}$$

$x=1$을 대입하면 $1=b_1(-1)(-2)(-3)(-4)=(4!)b_1 \quad \Rightarrow \quad b_1=\frac{1}{4!}=\frac{1}{24}$

$x=2$를 대입하면 $1=b_2(1)(-1)(-2)(-3)=-(3!)b_2 \quad \Rightarrow \quad b_2=-\frac{1}{3!}=-\frac{1}{6}$

$x=3$을 대입하면 $1=b_3(2)(1)(-1)(-2)=(2!)(2!)b_3 \quad \Rightarrow \quad b_3=\frac{1}{(2!)(2!)}=\frac{1}{4}$

$x=4$를 대입하면 $1=b_4(3)(2)(1)(-1)=-(3!)b_4 \quad \Rightarrow \quad b_4=-\frac{1}{3!}=-\frac{1}{6}$

$x=5$를 대입하면 $1=b_5(4)(3)(2)(1)=(4!)b_5 \quad \Rightarrow \quad b_5=\frac{1}{4!}=\frac{1}{24}$

(별해) $Q_2(x)=\frac{1}{(x-1)(x-2)}=\frac{-1}{x-1}+\frac{1}{x-2}$,

$$Q_3(x)=Q_2(x)\cdot\frac{1}{x-3}=\left(\frac{-1}{x-1}+\frac{1}{x-2}\right)\frac{1}{x-3}=\frac{-1}{(x-1)(x-3)}+\frac{1}{(x-2)(x-3)}$$
$$=\frac{-1}{2}\left(\frac{-1}{x-1}+\frac{1}{x-3}\right)+\left(\frac{-1}{x-2}+\frac{1}{x-3}\right)=\frac{1/2}{x-1}+\frac{-1}{x-2}+\frac{1/2}{x-3}$$

마찬가지 방법으로, $Q_4(x)=Q_3(x)\cdot\frac{1}{x-4}=\frac{-1/6}{x-1}+\frac{1/2}{x-2}+\frac{-1/2}{x-3}+\frac{1/6}{x-4}$

$$Q_5(x)=Q_4(x)\cdot\frac{1}{x-5}=\frac{1/24}{x-1}+\frac{-1/6}{x-2}+\frac{1/4}{x-3}+\frac{-1/6}{x-4}+\frac{1/24}{x-5}$$

따라서 $b_1=1/24$, $b_2=-1/6$, $b_3=1/4$, $b_4=-1/6$, $b_5=1/24$이다.

(2-2) (15점) $Q_n(x)=\frac{1}{P_n(x)}=\frac{b_1}{x-1}+\frac{b_2}{x-2}+\frac{b_3}{x-3}+\cdots+\frac{b_n}{x-n}$

$$\Rightarrow \quad 1=b_1\frac{P_n(x)}{x-1}+b_2\frac{P_n(x)}{x-2}+b_3\frac{P_n(x)}{x-3}+\cdots+b_n\frac{P_n(x)}{x-n}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad 1=\ & b_1(x-2)(x-3)(x-4)\cdots(x-n)\\ & +b_2(x-1)(x-3)(x-4)\cdots(x-n)\\ & +b_3(x-1)(x-2)(x-4)\cdots(x-n)\\ & \ddots\\ & +b_n(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-(n-1))\end{aligned}$$

$x=i$ $(i=1,2,3,\cdots,n)$이라 놓으면

$$1=b_1 0+b_2 0+\cdots+b_{i-1}0+b_i(-1)^{n-i}(i-1)!\,(n-i)!+b_{i+1}0+\cdots+b_n 0$$

$$\Rightarrow \quad b_i=\frac{(-1)^{n-i}}{(i-1)!\,(n-i)!}=\frac{(-1)^{n-i}}{(n-1)!}\frac{(n-1)!}{(i-1)!\,(n-i)!}=\frac{(-1)^{n-i}}{(n-1)!}\,{}_{n-1}C_{i-1}$$

$$\Rightarrow \quad (n-1)!\sum_{i=1}^{n}|b_i|=(n-1)!\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{(-1)^{n-i}}{(n-1)!}\,{}_{n-1}C_{i-1}\right|=\sum_{i=1}^{n}{}_{n-1}C_{i-1}=2^{n-1}.$$

[문제 3] (25점)

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 / □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술우수자 자연계(오후)	
계열(과목) 및 문항번호	수학문제3	
출제범위	과목명	기하와 벡터
	내용영역 또는 핵심개념/용어	구, 평면, 직선 정사영, 벡터의 내적
답안 작성 시간	30분	

2. 문항 및 제시문 출제 근거

적용 교육과정	교육인적자원부 고시 제 2007-79호 [별책 8]				
성취기준	7. 기하와 벡터 : 공간도형과 공간좌표, 벡터				
※ 문제 출제에 활용한 고등학교 교과서 및 기타 자료					
참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	기하와 벡터	황석근 외 12인	(주)교학사	2010	80~167
	기하와 벡터	김수환 외 13인	(주)교학사	2010	77~166
	기하와 벡터	계승혁 외 5인	성지출판(주)	2010	89~188
	기하와 벡터	정상권 외 8인	(주)금성출판사	2010	78~166
	기하와 벡터	김해경 외 23인	(주)더텍스트	2010	85~173

3. 출제의도

고등학교 교과 과정에서 기본적으로 다루는 구와 평면과의 관계, 정사영, 내적 등의 개념을 이해하고 활용할 수 있는지를 평가한다.

4. 해설

(가) 주제 분석

구와 평면과의 관계, 정사영, 내적 등의 개념을 알아보는 내용이다.

(나) 제시문 해설

정사영의 정의를 제공하였다.

(다) 제시문 출처

고등학교『기하와 벡터』교과서, 황석근 외 12인, (주)교학사, 2010년, 92쪽

(라) 논제 해설

(3-1)에서는 평면과 구가 만나서 이루는 원의 중심을 평면의 법선벡터를 이용해서 구하고 이로부터 반지름을 계산하는 문제이다. (3-2)에서는 정사영의 성질을 파악하는 문제이다. (3-3)에서는 내적의 성질과 주어진 공간도형 조건을 이용하여 최댓값을 찾는 문제이다.

5. 채점기준(평가기준)

- 공간도형 및 공간벡터의 이해력
- 논리적인 추론 능력
- 논제의 요구사항을 논리적, 체계적으로 서술하는 능력

6. 모범답안

(3-1) (5점)

평면 $x+y+2z=6$의 법선벡터는 $(1,1,2)$이다. 따라서 (구의 중심과 원 C의 중심을 지나는 직선은 평면과 수직이므로) 원 C의 중심은 $(t,t,2t)$ 형태가 된다. 따라서 $t+t+2t=6$을 계산하면, $t=1$이므로, 원 C의 중심은 $(1,1,2)$가 된다. 또한 구의 중심인 원점에서 원 C중심까지의 거리는 $\sqrt{1^2+1^2+2^2}=\sqrt{6}$이고, 구의 반지름은 $\sqrt{11}$이므로, 원의 반지름은 $r=\sqrt{\sqrt{11}^2-\sqrt{6}^2}=\sqrt{5}$가 된다.

(3-2) (10점)

직선 $\ell : x-k=\dfrac{y+4}{4}=\dfrac{-z}{2}$의 평면 $x+y+2z=6$에 내린 정사영이 원 C의 중심을 지난다면, 원 C의 중심을 지나고 평면 $x+y+2z=6$에 수직인 직선 $x=y=\dfrac{z}{2}$은 직선 $\ell : x-k=\dfrac{y+4}{4}=\dfrac{-z}{2}$과 한 점에서 만나야 한다. 따라서 그 만나는 점을 $(t,t,2t)$라고 하면, $t-k=\dfrac{t+4}{4}=-t$를 만족해야 하며, $t=\dfrac{-4}{5}$이고, $k=2t=\dfrac{-8}{5}$이다.

(3-3) (10점)

원 C 위의 점 P의 좌표를 (x,y,z)라 하자.

$$\begin{cases} x+y+2z &= 6 \\ x^2+y^2+z^2 &= 11 \end{cases}$$

이므로,

$$\begin{cases} x+y=6-2z \\ xy \quad =\dfrac{(x+y)^2-(x^2+y^2)}{2}=\dfrac{(6-2z)^2-(11-z^2)}{2} \end{cases}$$

따라서 x와 y는 다음 이차방정식의 실수해가 된다.

$$t^2-(6-2z)t+\frac{(6-2z)^2-(11-z^2)}{2}=0$$

따라서 위의 이차방정식의 판별식은 다음 조건을 만족한다.

$$D=(6-2z)^2-2(6-2z)^2+2(11-z^2)=-3z^2+12z-7\geq 0$$

따라서 $\dfrac{6-\sqrt{15}}{3}\leq z\leq \dfrac{6+\sqrt{15}}{3}$이 된다. 그러므로

$$\overrightarrow{IP}\cdot\overrightarrow{IQ}=(x+1,y-1,z)\bullet(0,0,3)=3z$$

이므로, $\overrightarrow{IP}\cdot\overrightarrow{IQ}$의 최댓값은 $6+\sqrt{15}$ 이다.

(별해) 원의 중심 $C(1,1,2)$와 $\overrightarrow{IQ}=\overrightarrow{CR}$이 되도록 하는 $R(1,1,5)$에 대하여, R을 평면 $\alpha: x+y+2z=6$에 내린 수선의 발을 H라고 하자. 그러면

$$\overrightarrow{IP}\bullet\overrightarrow{IQ}=(\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{CP})\bullet\overrightarrow{CR}=6+\overrightarrow{CP}\bullet\overrightarrow{CR}$$

의 최댓값은 $6+|\overrightarrow{CP}||\overrightarrow{CH}|=6+\sqrt{5}|\overrightarrow{CH}|$이다.

(왜냐하면, $\overrightarrow{CP}\bullet\overrightarrow{CR}>0$일 때, R에서 직선 CP에 내린 수선의 발을 H_P라고 하면 삼수선의 정리에 의하여 H에서 직선 CP에 내린 수선의 발도 H_P이다. 직각삼각형 CH_PH에서 $|\overrightarrow{CH_P}|\leq|\overrightarrow{CH}|$이므로 $\overrightarrow{CP}\bullet\overrightarrow{CR}=|\overrightarrow{CP}||\overrightarrow{CH_P}|$는 $H_P=H$일 때 최대이다.)

이때, 평면 α의 단위법선벡터 $\vec{n}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}},\dfrac{1}{\sqrt{6}},\dfrac{2}{\sqrt{6}}\right)$에 대하여 $\overrightarrow{CR}\bullet\vec{n}=\sqrt{6}$ 이므로

$$|\overrightarrow{CH}|=|\overrightarrow{CR}-(\overrightarrow{CR}\bullet\vec{n})\vec{n}|=\sqrt{3^2-(\sqrt{6})^2}=\sqrt{3}$$

이다. 따라서 $\overrightarrow{IP}\bullet\overrightarrow{IQ}$의 최댓값은 $6+\sqrt{15}$이다.

[문제 4] (25점)

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 / □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술우수자 자연계(오후)	
계열(과목) 및 문항번호	수학문제4	
출제범위	과목명	적분과 통계
	내용영역 또는 핵심개념/용어	회전체의 부피
답안 작성 시간	30분	

2. 문항 및 제시문 출제 근거

적용 교육과정	교육인적자원부 고시 제 2007-79호 [별책 8]				
성취기준	6. 적분과 통계, 적분법, 정적분의 활용 : 회전체의 부피를 구할 수 있다.				
※ 문제 출제에 활용한 고등학교 교과서 및 기타 자료					
참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	적분과 통계	최용준 외 9인	(주)천재교육	2010	56~69
	적분과 통계	최봉대 외 6인	(주)중앙교육진흥연구소	2010	56~73
	적분과 통계	윤재한 외 23인	(주)더텍스트	2010	55~68
	적분과 통계	계승혁 외 5인	성지출판(주)	2010	45~52
	수학 II	윤재한 외 23인	(주)더텍스트	2010	110~191
	수학 II	정상권 외 8인	(주)금성출판사	2010	112~196

3. 출제의도

고등학교 교과 과정에서 기본적으로 다루는 회전체의 부피를 적분을 이용하여 계산할 수 있는지, 적분 형태로 주어진 함수를 미분하여 최솟값을 찾는 방법을 알고 있는지를 평가한다. 또한 기본적인 적분을 계산할 수 있는지, 적분의 값과 넓이의 관계를 제대로 이해하고 있는지를 알아본다.

4. 해설

(가) 주제 분석

단위 원판 $x^2+y^2 \le 1$ 중 1, 2사분면에 있는 영역을 직선 $y=k$로 분할하여 직선 $y=k$를 중심으로 회전하여 얻는 회전체의 부피를 계산하도록 한다. 미분을 이용하여 두 입체의 부피의 합이 최소가 되는 지점을 계산할 수 있다. 적분, 미분의 계산능력을 다루는 내용이다.

(나) 제시문 해설

제시문 (가)는 회전체의 부피를 구하는 공식을 제공하였다.
제시문 (나)는 합성함수 형태로 주어지는 함수를 미분할 수 있는 공식을 제공하였다.
제시문 (다)는 적분 범위가 함수인 적분 형태로 주어진 함수를 미분하는 법을 설명하였다.

(다) 제시문 출처

제시문(가) : 고등학교『적분과 통계』교과서, 최봉대 외 6인, (주)중앙교육진흥연구소, 2010년, 69쪽
제시문(나) : 고등학교『수학 II』교과서, 윤재환 외 23인, (주)더텍스트, 2010년, 130쪽
제시문(다) : 고등학교『적분과 통계』교과서, 우정호 외 7인, (주)두산동아, 2010년, 49쪽

(라) 논제 해설

(4-1)에서는 제시문에 주어진 회전체 공식을 이용하여 $x^2+y^2 \le 1,\ y \ge 0$로 주어진 영역을 직선 $y=k$로 분할하여 각각의 영역을 직선 $y=k$을 중심으로 회전하여 얻은 회전체의 부피를 구할 수 있다. 두 개의 회전체의 부피의 합은 k에 관한 함수로 주어진다. 따라서 미분을 이용하여 함수의 최솟값을 구할 수 있는지 묻는다. 이를 위해 제시문에 주어진 적분으로 주어진 함수의 미분법을 이용한다. 마지막으로 적분의 기하적인 의미를 이용하여 $\int_0^{\sqrt{1-k^2}} \sqrt{1-x^2}\,dx$를 $\int_k^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$로 표현할 수 있는지 묻는다.

5. 채점기준(평가기준)

- 회전체의 부피를 적분을 통하여 계산할 수 있는 능력
- 주어진 함수의 최솟값을 미분을 통하여 계산하는 능력
- 주어진 제시문을 이용하여 적분으로 주어진 함수를 미분하여 계산할 수 있는지 여부
- 적분과 넓이의 관계를 이용하여 적분을 변환하는 능력
- 논제의 요구사항을 논리적, 체계적으로 서술하는 능력

6. 모범답안

(4-1) (10점)

$\alpha(k)=\sqrt{1-k^2}$ 이라고 두면, 제시문 (가)에 의해 주어진 회전체 부피는

$$V_1(k)=2\pi\int_0^{\alpha(k)}(\sqrt{1-x^2}-k)^2dx$$

$$V_2(k) = 2\pi k^2 - 2\pi \int_{\alpha(k)}^{1} (\sqrt{1-x^2} - k)^2 dx$$

임을 알 수 있다. 이 때, $V_1(k) - V_2(k)$를 계산하면

$$\begin{aligned} V_1(k) - V_2(k) &= 2\pi \int_0^1 (\sqrt{1-x^2} - k)^2 dx - 2\pi k^2 \\ &= 2\pi \int_0^1 (-2k\sqrt{1-x^2} + 1 - x^2) dx \\ &= -4k\pi \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx + \frac{4\pi}{3} \end{aligned}$$

이고 $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{\pi}{4}$이므로 $V_1(k) - V_2(k) = \frac{4\pi}{3} - \pi^2 k$이 된다.

(4-2) (10점)

(4-1)에서의 V_1의 적분으로 주어진 식을 계산하면

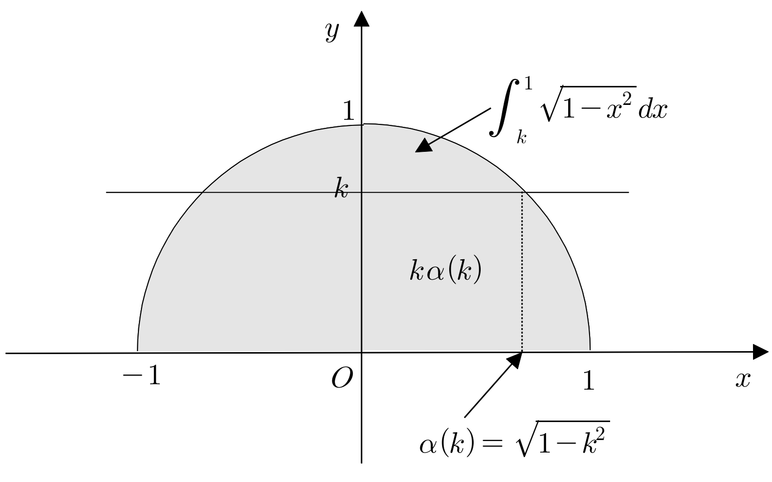
$$\begin{aligned} V_1(k) &= 2\pi \int_0^{\alpha(k)} (1 + k^2 - x^2 - 2k\sqrt{1-x^2}) dx \\ &= 2\pi\alpha(k)(1+k^2) - \frac{2\pi}{3}\alpha(k)^3 - 4\pi k \int_0^{\alpha(k)} \sqrt{1-x^2}\, dx \end{aligned}$$

제시문 (다)를 이용하면

$$\frac{d}{dk} \int_0^{\alpha(k)} \sqrt{1-x^2}\, dx = \sqrt{1-\alpha(k)^2}\, \alpha'(k) = k\, \alpha'(k)$$

이므로, $V_1(k)$을 다음과 같이 미분할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dk} V_1(k) &= 2\pi\alpha'(k)(1+k^2) + 4\pi k\alpha(k) - 2\pi\alpha(k)^2\alpha'(k) - 4\pi \int_0^{\alpha(k)} \sqrt{1-x^2}\, dx - 4\pi k^2 \alpha'(k) \\ &= 4\pi k\alpha(k) - 4\pi \int_0^{\alpha(k)} \sqrt{1-x^2}\, dx \quad (\because 1 - k^2 = \alpha(k)^2) \end{aligned}$$



또한, 위의 그림을 통해 다음과 같은 등식을 유도할 수 있다.

$$\int_0^{\alpha(k)} \sqrt{1-x^2}\, dx - k\alpha(k) = \int_k^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$$

따라서 $\frac{d}{dk} V_1(k) = -4\pi \int_k^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$ 이므로 $C_1 = -4\pi$ 이고 $C_2 = 0$ 이다.

(4-3) (5점)

(4-1)의 결과에 의하면 $V_1(k) + V_2(k) = 2V_1(k) + \pi^2 k - \frac{4\pi}{3}$ 이고, (4-2)의 결과를 이용하면 $V_1{}'(k) + V_2{}'(k)$ 은

$$\frac{d}{dk}(V_1(k) + V_2(k)) = 2\frac{d}{dk} V_1(k) + \pi^2 = -8\pi \int_k^1 \sqrt{1-x^2}\, dx + \pi^2$$

따라서 $\int_c^1 \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{\pi}{8}$ 인 $k = c$ 에서 $\frac{d}{dk}(V_1(k) + V_2(k)) = 0$ 임을 알 수 있다. 또한

$$\frac{d^2}{dk^2}(V_1(k) + V_2(k)) = 8\pi\sqrt{1-k^2} \geq 0$$

이므로 $k = c$ 에서 최솟값을 가짐을 알 수 있다. 따라서 구하고자 하는 값은

$$\int_0^c \sqrt{1-x^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx - \int_c^1 \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{8}$$

이다.