2016학년도 수시모집

논술고사 문제지 (오전)

(자연계열) : 120분

모집단위		전형유형	논술우수자(일반)
수험번호		성 명	

■ 일반 유의사항

1. 시험시간은 120분, 배점은 100점 만점입니다.
2. 답안을 구상할 때 문제지의 여백이나 또는 문제지 내의 연습장을 사용하시오.
3. 답안을 작성할 때 반드시 흑색 필기구만을 사용하시오(연필, 샤프 사용 가능, 사인펜 불가).
4. 답안을 정정할 때 두 줄을 긋고 정정하시오(수정액, 수정 테이프, 지우개 사용 가능).
5. 답안은 반드시 해당 문제의 답란에 작성하고, 답란 밖에는 작성하지 마시오.

※ 답안지는 절대 교체할 수 없습니다.

■ 답안 작성 유의사항

1. 제목은 쓰지 말고, 논제 번호를 명시한 후 답안을 작성하시오.
2. 제시된 분량을 지키시오.
3. 제시문의 문장을 그대로 옮기지 마시오.
4. 수험번호, 성명 등 신상에 관련된 사항을 답란이나 답안지의 여백에 드러내지 마시오.
5. 풀이의 과정을 순차적으로 서술하되, 필요한 경우에 수식 및 그림을 사용할 수 있으며, 수식은 반드시 문장 속에 포함 시키시오.

인하대학교
INHA UNIVERSITY

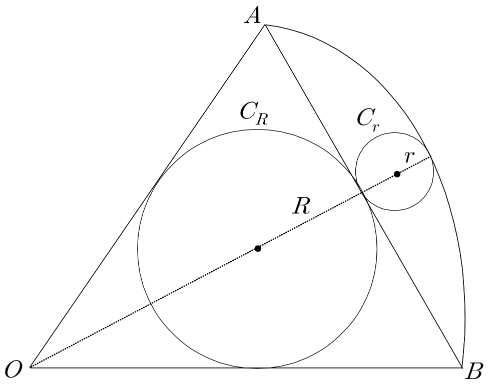
논술고사 (자연계열)

수학 : 100점

[문제 1] (25점) 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오.

직각삼각형에 대한 피타고라스 정리는 삼각함수로 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ 로 나타낼 수 있다.

(※) 반지름의 길이가 1이고 중심이 O인 부채꼴 AOB에 대하여, 아래의 그림과 같이 내접하는 두 원 C_R, C_r의 반지름의 길이를 각각 R, r이라 하자.



(1-1) $\angle AOB = \dfrac{\pi}{2}$일 때, R과 r의 값을 구하시오. (10점)

(1-2) $\angle AOB = \theta\ (0 < \theta < \pi)$일 때, 극한 $\displaystyle\lim_{\theta \to +0} \frac{r}{R^2}$의 값을 구하시오. (15점)

논술고사 (자연계열)

[문제 2] (25점) 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오.

좌표평면에서 점 (x_1, y_1)과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는 $d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 이다.

(※) 직선 $\ell : y=x+k$와 타원 $C : \frac{x^2}{4}+y^2=1$이 있다. (단, k는 상수이다.)

(2-1) 타원 C와 직선 ℓ이 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 k의 범위를 구하시오. (10점)

(2-2) 타원 C와 직선 ℓ이 서로 다른 두 점 P, Q에서 만난다고 하자. 좌표평면의 원점 O에 대하여 삼각형 OPQ의 넓이의 최댓값과 이 때의 k의 값을 구하시오. (15점)

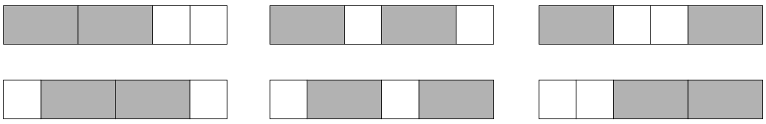
[문제 3] (25점) 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오.

(가) 양의 정수 n과 $1 \le k \le n-1$인 정수 k에 대하여, 조합의 수 ${}_nC_k$는 등식

$${}_nC_k = {}_{n-1}C_k + {}_{n-1}C_{k-1}$$

을 만족한다. 위 등식을 파스칼의 공식이라고 한다.

(나) 1×1 크기의 정사각형 모양의 타일을 '정사각형 타일'이라 부르고, 1×2 크기의 직사각형 모양의 타일을 '도미노 타일'이라 부르자. 도미노 타일 2개와 정사각형 타일 2개를 사용하여 서로 겹치지 않게 1×6 크기의 직사각형을 전부 덮는 방법은 다음과 같이 6가지가 있다.



(※) 양의 정수 n에 대하여, 도미노 타일과 정사각형 타일을 사용하여 서로 겹치지 않게 $1\times n$ 크기의 직사각형을 전부 덮을 때, 도미노 타일을 짝수개(0개 포함) 사용하는 방법의 수를 a_n이라 하고, 도미노 타일을 홀수개 사용하는 방법의 수를 b_n이라 하자. 예를 들어, $a_1=1$, $a_2=1$, $b_1=0$, $b_2=1$이다.

(3-1) 도미노 타일 k개와 정사각형 타일 $(n-2k)$개를 사용하여 서로 겹치지 않게 $1\times n$ 크기의 직사각형을 전부 덮는 방법의 수를 구하시오. (단, k는 $0 \le k \le \frac{n}{2}$인 정수이다.) (5점)

(3-2) a_{10}과 b_{10}의 값을 구하시오. (5점)

(3-3) 모든 $n \ge 3$에 대하여 다음 식이 성립함을 보이시오. (10점)

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + b_{n-2} \\ b_n = b_{n-1} + a_{n-2} \end{cases}$$

(3-4) 모든 $n \ge 1$에 대하여 $|a_n - b_n| \le 1$이 성립함을 보이시오. (5점)

논술고사 (자연계열)

[문제 4] (25점) 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오.

연속함수 $f(x)$에 대하여, 함수 $g(x)$를

$$g(x) = \int_0^x |f(t)|\,dt - \left|\int_0^x f(t)\,dt\right|$$

라고 정의하자. 그러면 $x_1 < x_2$일 때

$$\begin{aligned} g(x_2) - g(x_1) &= \int_{x_1}^{x_2} |f(t)|\,dt + \left|\int_0^{x_1} f(t)\,dt\right| - \left|\int_0^{x_2} f(t)\,dt\right| \\ &\geq \int_{x_1}^{x_2} |f(t)|\,dt - \left|\int_0^{x_1} f(t)\,dt - \int_0^{x_2} f(t)\,dt\right| = \int_{x_1}^{x_2} |f(t)|\,dt - \left|\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt\right| \geq 0 \end{aligned}$$

이다.

(※) 함수 $g(x)$를

$$g(x) = \int_0^x |t\sin t|\,dt - \left|\int_0^x t\sin t\,dt\right|$$

라고 정의하자.

(4-1) $g(30\pi)$의 값을 구하시오. (10점)

(4-2) $g(x) = 12\pi$를 만족하는 x의 최솟값을 α, 최댓값을 β라고 할 때, 정적분

$$\int_\alpha^\beta t\sin t\,dt$$

의 값을 구하시오. (15점)

논술고사 (자연계열)

<연 습 장>

2016학년도 수시모집 논술우수자(일반) 논술고사(오전) 출제의도 및 해설

[문제 1] (25점)

1. 일반정보

<table>
<tr><td>유형</td><td colspan="2">■ 논술고사 / □ 면접 및 구술고사</td></tr>
<tr><td>전형명</td><td colspan="2">논술우수자 자연계(오전)</td></tr>
<tr><td>계열(과목) 및 문항번호</td><td colspan="2">수학문제1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">출제범위</td><td>과목명</td><td>수학, 수학 II</td></tr>
<tr><td>내용영역 또는
핵심개념/용어</td><td>삼각함수의 활용, 삼각함수의 극한</td></tr>
<tr><td>답안 작성 시간</td><td colspan="2">30분</td></tr>
</table>

2. 문항 및 제시문 출제 근거

<table>
<tr><td>적용 교육과정</td><td colspan="5">교육인적자원부 고시 제 2007-79호 [별책 8]</td></tr>
<tr><td>성취기준</td><td colspan="5">1. 수학, 함수, 삼각함수 : 삼각함수의 성질을 이해한다.
5. 수학 II, 함수의 극한과 연속 : 삼각함수의 극한값을 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><td colspan="6">※ 문제 출제에 활용한 고등학교 교과서</td></tr>
<tr><td>참고자료</td><td>도서명</td><td>저자</td><td>발행처</td><td>발행년도</td><td>쪽수</td></tr>
<tr><td rowspan="4">고등학교
교과서</td><td>수학</td><td>김수환 외 9인</td><td>(주)교학사</td><td>2009</td><td>256~270</td></tr>
<tr><td>수학</td><td>계승혁 외 3인</td><td>성지출판(주)</td><td>2011</td><td>294~304</td></tr>
<tr><td>수학 II</td><td>양승갑 외 7인</td><td>(주)금성출판사</td><td>2011</td><td>89~91</td></tr>
<tr><td>수학 II</td><td>최용준 외 9인</td><td>(주)천재교육</td><td>2010</td><td>73~77</td></tr>
</table>

3. 출제의도

고등학교 교과 과정에서 기본적으로 다루는 삼각함수 및 삼각함수의 극한에 대한 내용들을 잘 이해하고 있는지를 평가한다. 구체적으로 문제 구성(※)에서 주어진 그림과 같이 두 원이 외접하면서 부채꼴에 내접하는 상황에서 두 원의 반지름의 길이를 삼각함수를 이용하여 구할 수 있는지를 평가한다. 또한 기본적인 삼각함수의 극한을 계산할 수 있는지를 알아본다.

4. 해설

(가) 주제 분석

문제 구성(※)에서 주어진 그림과 같이 두 원이 외접하면서 부채꼴에 내접하는 상황에서 두 원의 반지름의 길이를 부채꼴의 중심각을 이용하여 구할 수 있다. 삼각함수의 활용 및 기본적인 삼각함수의 극한을 다루는 내용이다.

(나) 제시문 해설

직각삼각형에 대한 피타고라스 정리를 삼각함수로 표현하였다.

(다) 제시문 출처

고등학교『수학』교과서, 계승혁 외 3인, 성지출판㈜, 2009년, 298쪽 활용

(라) 논제 해설

두 원 C_R과 C_r이 서로 외접하면서 부채꼴 AOB에 내접하는 상황에서 (1-1)은 $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$일 때, 두 원 C_R과 C_r의 반지름인 R과 r를 기하적인 관찰을 통하여 구할 수 있다. (1-2)에서는 $\angle AOB = \theta \ (0 < \theta < \pi)$일 때, 두 원 C_R과 C_r의 반지름인 R과 r를 (1-1)에서와 같이 기하적인 관찰을 통하여 θ에 대한 삼각함수로 다양하게 표현할 수 있고, $\theta \to +0$일 때 $\frac{r}{R^2}$의 극한값을 구할 수 있다.

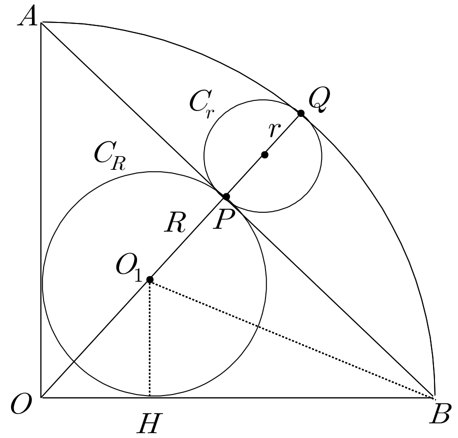
5. 채점기준(평가기준)

- 삼각함수 및 삼각함수의 극한에 대한 기본 지식
- 기하적인 관찰력
- 논제의 요구사항을 논리적, 체계적으로 서술하는 능력

6. 모범답안

(1-1) (10점)

아래 그림과 같이 원 C_R의 중심을 O_1이라 하고 원 C_R이 선분 AB와 접하는 점을 P, 원 C_r이 호 AB와 접하는 점을 Q라 하자. 그리고 원 C_R의 중심 O_1에서 선분 OB에 내린 수선의 발을 H라 하자.



삼각형 AOB가 직각이등변삼각형이고 $\overline{AB}=\sqrt{2}$ 이므로 $\overline{OP}=\overline{PB}=\overline{HB}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이다. 따라서

$$R=\overline{OH}=1-\overline{HB}=1-\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 이고, } r=\frac{1}{2}\overline{PQ}=\frac{1}{2}(1-\overline{OP})=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

이다.

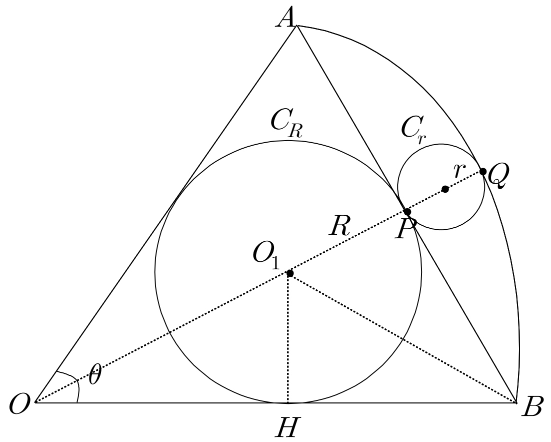
(별해) 원 C_R은 직각이등변삼각형 AOB의 내접원이므로,

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}R+\frac{1}{2}R+\frac{1}{2}\sqrt{2}R=(1+\frac{\sqrt{2}}{2})R$$

으로부터 $R=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이다.

(1-2) (15점)

아래 그림과 같이 원 C_R의 중심을 O_1이라 하고 원 C_R이 선분 AB와 접하는 점을 P, 원 C_r이 호 AB와 접하는 점을 Q라 하자. 그리고 원 C_R의 중심 O_1에서 선분 OB에 내린 수선의 발을 H라 하자.



(i) 위의 그림으로부터 $\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{HB}=\sin\frac{\theta}{2}$ 이고 $\overline{OP}=\cos\frac{\theta}{2}$ 이므로 다음을 얻는다.

$$r=\frac{1}{2}\overline{PQ}=\frac{1}{2}(1-\overline{OP})=\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{\theta}{2}\right) \text{ (혹은 이 식을 변형한 식)}$$

$$R=\overline{OH}\tan\frac{\theta}{2}=(1-\overline{HB})\tan\frac{\theta}{2}=(1-\sin\frac{\theta}{2})\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{1+\sin\frac{\theta}{2}} \text{ (혹은 이식을 변형한 식)}$$

(별해1) 원 C_R은 삼각형 AOB의 내접원이므로 $\frac{1}{2}\sin\theta=\frac{1}{2}R+\frac{1}{2}R+\frac{1}{2}R\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)$으로부터

다음을 얻는다.

$$R=\frac{\frac{1}{2}\sin\theta}{1+\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{1+\sin\frac{\theta}{2}}$$ (혹은 이 식을 변형한 식)

(별해2) $\angle PBH=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$ 이고 $\angle PBO_1=\frac{1}{2}\angle PBH=\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{4}$ 이므로 직각삼각형 O_1PB로부터 다음을 얻는다.

$$R=\overline{BP}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{4}\right)=\sin\frac{\theta}{2}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{4}\right)$$ (혹은 이 식을 변형한 식).

(ii) $\frac{r}{R^2}=\frac{\left(1-\cos\frac{\theta}{2}\right)\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\right)^2}{2\cos^2\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}}$ 이고

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to+0}\frac{r}{R^2}&=\lim_{\theta\to+0}\frac{\left(1-\cos\frac{\theta}{2}\right)\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\right)^2}{2\cos^2\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}}=\lim_{\theta\to+0}\frac{1-\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}\\&=\lim_{\theta\to+0}\frac{\left(1-\cos\frac{\theta}{2}\right)\left(1+\cos\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin^2\frac{\theta}{2}\left(1+\cos\frac{\theta}{2}\right)}=\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}\left(1+\cos\frac{\theta}{2}\right)}\\&=\lim_{\theta\to+0}\frac{1}{2\left(1+\cos\frac{\theta}{2}\right)}=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

(참고) (i)에서 구한 R, r의 θ에 대한 삼각함수로 다양하게 표현된 것에 대해서도 같은 극한값을 갖는다.

[문제 2] (25점)

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 / □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술우수자 자연계(오전)	
계열(과목) 및 문항번호	수학문제2	
출제범위	과목명	기하와 벡터, 수학 II
	내용영역 또는 핵심개념/용어	타원과 직선의 위치 관계, 도함수의 활용
답안 작성 시간	30분	

2. 문항 및 제시문 출제 근거

적용 교육과정	교육인적자원부 고시 제 2007-79호 [별책 8]				
성취기준	7. 기하와 벡터, 이차곡선, 타원 : 타원과 직선의 위치관계를 이해한다. 5. 수학 II, 미분법, 도함수의 활용 : 함수의 극대와 극소를 이해하고, 이를 판정할 수 있다.				
※ 문제 출제에 활용한 고등학교 교과서 및 기타 자료					
참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	이재학 외 6인	(주)금성출판사	2009	177
	수학 II	유희찬 외 12인	(주)미래엔 컬처그룹	2010	176~179
	수학 II	최용준 외 9인	(주)천재교육	2010	161~165
	기하와 벡터	김수환 외 13인	(주)교학사	2010	52~56
	기하와 벡터	계승혁 외 5인	성지출판(주)	2010	58~61
기타	2016학년도 인하대학교 논술 모의고사 자료집, 65쪽				

3. 출제의도

고등학교 교과 과정에서 기본적으로 다루는 이차곡선(타원)과 직선의 위치 관계를 이해하고, 최솟값을 찾는 방법을 알고 있는지를 알아본다.

4. 해설

(가) 주제 분석

타원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만날 조건을 구할 수 있다. 타원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만날 때, 그 두 점과 원점을 꼭짓점으로 갖는 삼각형의 면적이 최대가 되는 지점을 구할 수 있다.

(나) 제시문 해설

좌표평면에서 점과 직선 사이의 거리 공식을 제공하였다.

(다) 제시문 출처

고등학교『수학』교과서, 이재학 외 6인, (주)금성출판사, 2009년, 177쪽

(라) 논제 해설

(2-1)에서는 타원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 k의 범위를 구하는 것이다. 이차방정식의 판별식 혹은 기울기가 1인 접선의 식 등을 이용하여 구할 수 있다. (2-2)에서는 타원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나는 경우, 그 두 점과 원점을 꼭짓점으로 갖는 삼각형의 최대 면적을 미분을 활용하여 구할 수 있다.

5. 채점기준(평가기준)

- 타원과 직선의 위치 관계 이해 능력
- 최댓값을 구하는 능력(미분 혹은 산술평균 • 기하평균 활용 능력)
- 논제의 요구사항을 논리적, 체계적으로 서술하는 능력

6. 모범답안

(2-1) (10점)

직선 l 과 타원 C 로부터 이차방정식

$$5x^2+8kx+4k^2-4=0$$

을 얻는다. 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

$$D/4=16k^2-5(4k^2-4)=-4k^2+20=-4(k^2-5)>0$$

이다. 따라서 타원 C와 직선 l 이 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 상수 k 의 범위는 $-\sqrt{5}<k<\sqrt{5}$ 이다.

(별해) 타원 C에 접하고 기울기가 1 인 접선의 방정식은 $y=x\pm\sqrt{4+1}=x\pm\sqrt{5}$ 이므로 타원 C와 직선 l 이 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 상수 k 의 범위는 $-\sqrt{5}<k<\sqrt{5}$ 이다.

(2-2) (15점)

타원 C와 직선 l 이 서로 다른 두 점 P, Q 에서 만난다고 하자. P, Q 의 좌표를 $P(\alpha, \alpha+k)$, $Q(\beta, \beta+k)$ 라 하면 α, β는 (2-1)에서 얻은 이차방정식

$$5x^2+8kx+4k^2-4=0 \quad (-\sqrt{5}<k<\sqrt{5})$$

의 서로 다른 두 실근이므로 $\alpha+\beta=-\dfrac{8k}{5}$, $\alpha\beta=\dfrac{4k^2-4}{5}$ 이다. 삼각형 OPQ의 밑변의 길이인 선분 PQ의 길이를 구하면

$$\begin{aligned}\overline{PQ}^{\,2} &= (\alpha-\beta)^2+(\alpha+k-\beta-k)^2 = 2(\alpha-\beta)^2 = 2\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}\\ &= 2\left\{\frac{64k^2}{25}-\frac{16(k^2-1)}{5}\right\} = 2\left\{\frac{80-16k^2}{25}\right\} = \frac{32(5-k^2)}{25}\end{aligned}$$

$$\therefore\ \overline{PQ} = \sqrt{\frac{32(5-k^2)}{25}} = \frac{\sqrt{32(5-k^2)}}{5}$$

한편, 삼각형 OPQ의 높이는 원점 $O(0,0)$에서 직선 $x-y+k=0$까지의 거리이므로 $\dfrac{|k|}{\sqrt{2}}$ 이다.

따라서 삼각형 OPQ 의 넓이는

$$S(k) = \frac{1}{2}\frac{|k|}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{32(5-k^2)}}{5} = \frac{2}{5}\sqrt{k^2(5-k^2)}$$

이다. $f(k)=5k^2-k^4$ 이라 하자. $f'(k)=10k-4k^3=2k(5-2k^2)=0$ 을 풀면 $k=0,\ \pm\sqrt{\dfrac{5}{2}}$ 를 갖는다. $f'(k)$ 의 삼차다항식의 그래프로부터 $k=\pm\sqrt{\dfrac{5}{2}}$ 에서 $f(k)$ 는 최댓값(극댓값)을 갖는다.

따라서 삼각형 OPQ 의 최대 넓이는 $k=\pm\sqrt{\dfrac{5}{2}}$ 에서 $S\left(\pm\sqrt{\dfrac{5}{2}}\right)=1$ 이다.

(별해) 산술평균•기하평균을 이용하여

$$S(k) = \frac{2}{5}\sqrt{k^2(5-k^2)} \le \frac{2}{5}\frac{k^2+(5-k^2)}{2} = 1\,.$$

단 등호는 $k^2=5-2k^2$ 일 때, 즉 $k=\pm\sqrt{\dfrac{5}{2}}$ 일 때이다.

[문제 3] (25점)

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 / □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술우수자 자연계(오전)	
계열(과목) 및 문항번호	수학문제3	
출제범위	과목명	적분과 통계
	내용영역 또는 핵심개념/용어	조합의 수, 파스칼의 공식, 타일(정사각형, 도미노)덮기
답안 작성 시간	30분	

2. 문항 및 제시문 출제 근거

적용 교육과정	교육인적자원부 고시 제 2007-79호 [별책 8]				
성취기준	6. 적분과 통계, 이항정리 : 이항정리를 이용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다. 3. 수학 I, 수열, 수학적 귀납법 : 수열의 귀납적 정의를 이해한다.				
※ 문제 출제에 활용한 고등학교 교과서 및 기타 자료					
참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	적분과 통계	계승혁 외 5인	성지출판(주)	2010	94~99
	적분과 통계	최용준 외 9인	(주)천재교육	2010	91~95
	수학 I	김해경 외 8인	(주)더텍스트	2010	144~149
	수학 I	이준열 외 9인	(주)천재교육	2010	155~162
	수학 I	황석근 외 12인	(주)교학사	2010	135~140
기타	2016학년도 인하대학교 논술 모의고사 자료집, 63쪽				

3. 출제의도

고등학교 교과 과정에서 기본적으로 다루는 조합의 수와 파스칼의 정리에 대해 잘 이해하고 있는지를 평가한다. 특별히 조합적으로 셀 수 있는 수학적 대상을 제시하고, 이를 조합의 수로 표현하고, 구체적으로 계산을 할 수 있는지, 그리고 이 수의 성질을 점화식을 이용하여 확인할 수 있는지를 알아본다.

4. 해설

(가) 주제 분석

도미노 타일과 정사각형 타일로 직사각형을 덮는 방법의 수가 조합의 수로 표현이 된다. 이를 이용하여 어떤 대상의 개수가 조합의 수의 합으로 정의되고, 이 수열의 특별한 항과 점화식을 구할 수 있고, 이를 활용하여 수열의 성질을 증명할 수 있다.

(나) 제시문 해설

제시문 (가)에서는 조합의 수에 관한 파스칼의 공식을 제시하였고, 이는 (3-3)을 해결하는 데 사용되었다. 제시문 (나)에서는 정사각형 타일과 도미노 타일의 정의를 주었고 2개의 정사각형 타일과 2개의 도미노 타일을 가지고 1×6 크기의 직사각형을 전부 덮는 방법을 제시하였다.

(다) 제시문 출처

고등학교『적분과 통계』교과서, 계승혁 외 5인, 성지출판(주), 2010년, 95쪽

(라) 논제 해설

(3-1)에서는 직사각형을 타일로 덮는 방법의 수가 조합의 수가 되는지 확인한다. (3-2)에서는 조합의 수의 정의를 이용하여, 특별한 경우의 값을 계산한다. (3-3)에서는 파스칼의 공식을 이용하여, 점화식을 유도할 수 있다. (3-4)에서는 (3-3)에서 얻은 두 개의 점화식을 이용하여, 순환수열임을 확인하고, 모든 수열의 값이 $-1, 0, 1$임을 확인한다.

5. 채점기준(평가기준)

- 논제 이해 능력
- 계산 능력
- 점화식에 관한 조합적인 설명 능력
- 수열의 성질을 파악하는 능력
- 논제의 요구사항을 논리적, 체계적으로 서술하는 능력

6. 모범답안

(3-1) (5점)

도미노 타일 k개와 정사각형 타일 $(n-2k)$개를 일렬로 나열하는 방법의 수와 같다. 즉, 2종류의 $(n-k)$개의 타일 중 도미노 타일 k개를 놓을 순서를 선택하는 방법이므로,

$$ {}_{n-k}C_k = {}_{n-k}C_{n-2k} = \frac{(n-k)!}{k!\,(n-2k)!} = \frac{(n-k)(n-k-1)\cdots(n-2k+1)}{k!} $$

가 된다.

(3-2) (5점)

위의 결과를 이용하면, a_n과 b_n의 정의에 따라서 일반항을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$a_n = {}_nC_0 + {}_{n-2}C_2 + {}_{n-4}C_4 + \cdots$$

$$b_n = {}_{n-1}C_1 + {}_{n-3}C_3 + {}_{n-5}C_5 + \cdots$$

따라서 위의 식을 이용하여 계산을 하면,

$$a_{10} = {}_{10}C_0 + {}_8C_2 + {}_6C_4 = 1 + 28 + 15 = 44$$

$$b_{10} = {}_9C_1 + {}_7C_3 + {}_5C_5 = 9 + 35 + 1 = 45$$

가 된다.

(3-3) (10점)

파스칼의 정리($_nC_k = {}_{n-1}C_k + {}_{n-1}C_{k-1}$)와 경계조건 ($_nC_0 = {}_{n-1}C_0 = 1$) 에 의해 다음과 같이 정리할 수 있다. 양의 정수 $n \geq 3$에 대하여

$$\begin{aligned} a_{n-1} + b_{n-2} &= ({}_{n-1}C_0 + {}_{n-3}C_2 + {}_{n-5}C_4 + \cdots) \\ &\quad + ({}_{n-3}C_1 + {}_{n-5}C_3 + {}_{n-7}C_5 + \cdots) \\ &= {}_nC_0 + {}_{n-2}C_2 + {}_{n-4}C_4 + {}_{n-6}C_6 + \cdots = a_n \end{aligned}$$

이고,

$$\begin{aligned} b_{n-1} + a_{n-2} &= ({}_{n-2}C_1 + {}_{n-4}C_3 + {}_{n-6}C_5 + \cdots) \\ &\quad + ({}_{n-2}C_0 + {}_{n-4}C_2 + {}_{n-6}C_4 + \cdots) \\ &= {}_{n-1}C_1 + {}_{n-3}C_3 + {}_{n-5}C_5 + \cdots = b_n \end{aligned}$$

이 된다. 따라서 $\begin{cases} a_n = a_{n-1} + b_{n-2} \\ b_n = b_{n-1} + a_{n-2} \end{cases}$ 가 성립한다.

(별해) 도미노 타일을 짝수개 사용하는 방법(a_n)은 첫 타일을 정사각형 타일을 사용하고, 나머지 영역에서 짝수개의 도미노 타일을 사용하는 방법(a_{n-1})과 첫 타일을 도미노 타일을 사용하고, 나머지 영역에서 홀수개의 도미노 타일을 사용하는 방법(b_{n-2})으로 생각해 볼 수 있다.

$$a_n = a_{n-1} + b_{n-2}$$

비슷하게 도미노 타일을 홀수개 사용하는 방법(b_n)은 첫 타일을 정사각형 타일을 사용하고, 나머지 영역에서 홀수개의 도미노 타일을 사용하는 방법(b_{n-1})과 첫 타일을 도미노 타일을 사용하고, 나머지 영역에서 짝수개의 도미노 타일을 사용하는 방법(a_{n-2})으로 생각해 볼 수 있다.

$$b_n = b_{n-1} + a_{n-2}$$

따라서 모든 양의 정수 $n \geq 3$에 대하여 $\begin{cases} a_n = a_{n-1} + b_{n-2} \\ b_n = b_{n-1} + a_{n-2} \end{cases}$ 가 성립한다.

(3-4) (5점)

$c_n = a_n - b_n$이라 하자. (3-3)의 결과를 활용하면

$$\begin{aligned} c_n &= a_n - b_n \\ &= (a_{n-1} + b_{n-2}) - (b_{n-1} + a_{n-2}) \\ &= (a_{n-1} - b_{n-1}) - (a_{n-2} - b_{n-2}) \\ &= c_{n-1} - c_{n-2} \end{aligned}$$

이 성립한다. 따라서

$$\begin{aligned} & c_1 = a_1 - b_1 = 1 - 0 = 1 \\ & c_2 = a_2 - b_2 = 1 - 1 = 0 \\ & c_3 = c_2 - c_1 = 0 - 1 = -1 \\ & c_4 = c_3 - c_2 = -1 - 0 = -1 \\ & c_5 = c_4 - c_3 = -1 - (-1) = 0 \\ & c_6 = c_5 - c_4 = 0 - (-1) = 1 \\ & c_7 = c_6 - c_5 = 1 - 0 = 1 \\ & \qquad\qquad \vdots \end{aligned}$$

으로 c_n은 주기가 6인 순환수열이 되고, c_n의 첫 6항이 $1, 0, -1, -1, 0, 1$ 이므로, 모든 양의 정수 $n \geq 1$에 대하여 $|c_n| = |a_n - b_n| \leq 1$이 성립한다.

[문제 4] (25점)

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 / □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술우수자 자연계(오전)	
계열(과목) 및 문항번호	수학문제4	
출제범위	과목명	수학 II, 적분과 통계
	내용영역 또는 핵심개념/용어	절댓값 함수의 정적분, 정적분 값의 절댓값
답안 작성 시간	30분	

2. 문항 및 제시문 출제 근거

적용 교육과정	교육인적자원부 고시 제 2007-79호 [별책 8]				
성취기준	6. 적분과 통계, 적분법 : 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.				
※ 문제 출제에 활용한 고등학교 교과서 및 기타 자료					
참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	적분과 통계	최용준 외 9인	(주)천재교육	2010	48~62
	적분과 통계	최봉대 외 6인	(주)중앙교육진흥 연구소	2010	53~65
	적분과 통계	윤재한 외 23인	(주)더텍스트	2010	52~62
	적분과 통계	계승혁 외 5인	성지출판(주)	2010	41~48
기타	2015학년도 수능 수학 짝수 B형 30번 문제				

3. 출제의도

고등학교 교과 과정에서 기본적으로 다루는 함수의 그래프와 x축으로 둘러싸인 영역의 넓이와 적분과의 관계를 이해하고 활용할 수 있는지를 평가한다.

4. 해설

(가) 주제 분석

정적분으로 정의된 함수

$$g(x)=\int_{0}^{x}|t\sin t|\,dt-\left|\int_{0}^{x}t\sin t\,dt\right|$$

에 대하여 $g(30\pi)$ 을 계산할 수 있고, $g(x)=12\pi$ 일 때 x 의 최솟값과 최댓값을 구할 수 있다.

(나) 제시문 해설

제시문은 함수 $g(x)$ 가 증가함수임을 제공하였다. 이는 (4-2)를 해결하는 데 사용되었다.

(다) 제시문 출처

창작

(라) 논제 해설

(4-1)에서는 절댓값 함수의 정적분과 정적분 값의 절댓값 사이의 관계를 함수의 그래프를 통해 이해하고, 부분적분법을 이용하여 $g(30\pi)$ 의 값을 계산하는 문제이다. (4-2)에서는 제시문에서 주어진 함수 $g(x)$ 의 증가성질을 이용하여 함수 $g(x)$ 의 구간별 그래프의 변화를 이해하고 분석하는 문제이다.

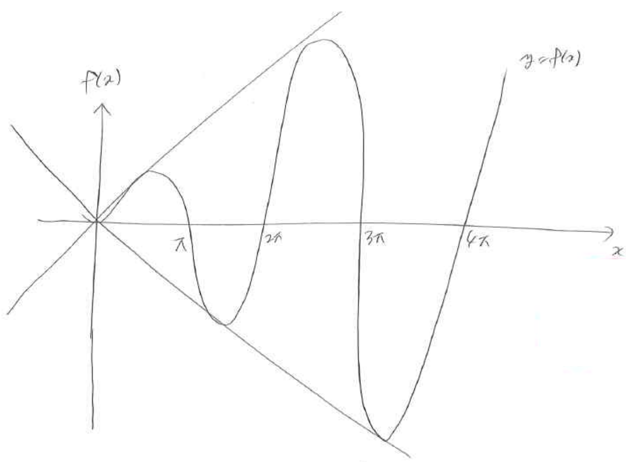
5. 채점기준(평가기준)

- 제시문 및 논제 이해 능력
- 논리적 계산력
- 영역의 넓이와 적분과의 관계 파악 능력
- 종합적 사고력
- 논제의 요구사항을 논리적, 체계적으로 서술하는 능력

6. 모범답안

(4-1) (10점)

$f(x)=x\sin x\ (x\geq 0)$fk 하면 $f(x)$ 의 그래프는 다음과 같이 주어진다.



위의 그래프로부터 $f(x)$는 각 구간 $[(k-1)\pi, k\pi]$ $(k=0,1,2,\cdots)$에서 부호가 일정하고

$$\begin{aligned}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} x\sin x\,dx &= [-x\cos x]_{(k-1)\pi}^{k\pi} + \int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\cos x\,dx \\ &= -k\pi\cos(k\pi)+(k-1)\pi\cos((k-1)\pi) \\ &= -k\pi(-1)^k+(k-1)\pi(-1)^{k-1} = (-1)^{k-1}(2k-1)\pi\end{aligned}$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned} g(30\pi) &= \int_0^{30\pi}|t\sin t|dt - \left|\int_0^{30\pi} t\sin t\,dt\right| \\ &= \left\{\sum_{k=1}^{30}\left|\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} t\sin t\,dt\right|\right\} - \left|\int_0^{30\pi}t\sin t\,dt\right| \\ &= \sum_{k=1}^{30}(2k-1)\pi - \left|[-t\cos t]_0^{30\pi}\right| \\ &= 900\pi - 30\pi = 870\pi \end{aligned}$$

(4-2) (15점)

먼저 $g(\pi)=\pi-\pi=0$
$g(2\pi)=\pi(1+3)-\pi|1-3|=2\pi$
$g(3\pi)=\pi(1+3+5)-\pi|1-3+5|=6\pi$
$g(4\pi)=\pi(1+3+5+7)-\pi|1-3+5-7|=12\pi$

이다.

(i) $x>4\pi$에서 $g(x)$가 증가함수이므로 $g(x)>g(4\pi)=12\pi$이다. 따라서 $g(x)=12\pi$를 만족하는 x의 최댓값인 β는 $\beta=4\pi$이다.

(ii) $\int_0^{3\pi}t\sin t\,dt=(1-3+5)\pi=3\pi$이고 $\int_0^{4\pi}t\sin t\,dt=-4\pi$이므로

$$\int_0^{\alpha}t\sin t\,dt=0$$

인 α가 구간 $(3\pi, 4\pi)$에서 존재한다.

(iii) $3\pi\le x\le\alpha$에서 $g(x)$는 증가함수이고

$$g(\alpha)=\int_0^{\alpha}|t\sin t|dt-\left|\int_0^{\alpha}t\sin t\,dt\right| = \int_0^{\alpha}|t\sin t|dt=(1+3+5+3)\pi=12\pi$$

이므로 $g(x)=12\pi$를 만족하는 x의 최솟값은 α이다. 그러므로

$$\int_{\alpha}^{\beta}t\sin t\,dt=\int_0^{4\pi}t\sin t\,dt-\int_0^{\alpha}t\sin t\,dt=-4\pi$$

이다.

(별해) $\int_0^{x}t\sin t\,dt=0$인 점들을 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 라고 하면

$$0 < \pi < a_1 < 2\pi < a_2 < 3\pi < a_3 < \cdots .$$

구간 $(2n\pi, a_{2n})$에서 $x\sin x > 0$, $\int_0^x t\sin t\,dt < 0$ 이므로 $g'(x) = 2x\sin x > 0$ 이다.

구간 $(a_{2n}, (2n+1)\pi)$ 에서 $x\sin x > 0$, $\int_0^x t\sin t\,dt > 0$ 이므로 $g'(x) = 0$ 이다.

구간 $((2n+1)\pi, a_{2n+1})$에서 $x\sin x < 0$, $\int_0^x t\sin t\,dt > 0$ 이므로 $g'(x) = -2x\sin x > 0$ 이다.

구간 $(a_{2n+1}, (2n+2)\pi)$ 에서 $x\sin x < 0$, $\int_0^x t\sin t\,dt < 0$ 이므로 $g'(x) = 0$ 이다.

그런데 $g(4\pi) = 12\pi$ 이고 $g(x)$ 는 증가함수이므로 $x > 4\pi$ 이면 $g(x) > 12\pi$ 이다. 따라서 $\int_0^\alpha t\sin t\,dt = 0$ 이고 $3\pi < \alpha < 4\pi$ 인 α가 $g(x) = 12\pi$ 를 만족하는 최솟값이다. 따라서

$$\int_\alpha^\beta t\sin t\,dt = \int_0^{4\pi} t\sin t\,dt = -4\pi$$