2016학년도 논술 모의고사 수리논술(2차) 해설 및 예시답안

수학 (100점)

1. 출제의도
정상적인 고등학교 수학교과를 이수한 수험생이면 충분하게 풀 수 있는, 철저히 교과서 중심의 문제를 출제하였다. 행렬의 곱셈, 수열, 급수, 정적분, 극한, 중간값의 정리, 지수함수의 적분과 극한, 벡터의 기본 성질 등을 잘 이해하고 있으며, 주어진 문제를 논리적으로 분석할 수 있는 능력과 자신의 생각을 논리적이고 합리적으로 표현하는 능력을 평가하고자 하는 의도로 문제를 출제하였다.

2. 주제 분석과 제시문 해설
(가) 주제 분석

[문제 1]은 행렬의 곱셈에 관한 교환법칙을 주제로 하였다.

[문제 2]는 주어진 수열의 급수와 무한급수를 계산하고, 또한 이 수열이 어떤 함수의 정적분 값임을 확인하여, 정적분의 범위가 무한으로 확장될 때, 정적분의 극한을 확인해 보는 것을 주제로 삼았다.

[문제 3]은 중간값의 정리와 지수함수의 극한을 주제로 하였다.

[문제 4]는 원에 내접하는 정삼각형과 벡터와의 관계를 주제로 삼았다.

(나) 제시문 해설

[문제 1]의 제시문 (가)는 고등학교『수학 I』의 행렬과 그래프 단원에서 행렬의 곱셈은 일반적으로 교환법칙이 성립하지 않음을 설명하였다. 제시문 (나)는 2×2 단위행렬 E의 상수배가 아닌 행렬 C와 행렬의 곱셈에 관해 교환법칙이 성립하는 임의의 행렬은 적당한 실수 α, β에 대하여 $\alpha C+\beta E$의 꼴로 쓸 수 있음을 설명하였다.

[문제 2]의 제시문은 고등학교『적분과 통계』의 적분법 단원에서 정적분의 적분 구간에 관한 성질을 제시하였고, 이는 (2-3)을 해결하는 데 사용되었다.

[문제 3]의 제시문 (가)는 고등학교『수학 II』의 함수의 극한과 연속 단원에서 중간값의 정리를 설명하였다. 제시문 (나)는 중간값의 정리의 응용으로 방정식의 열린 구간에서 적어

도 하나의 실근을 갖는 조건에 대하여 설명하였다. 제시문 (다)는 고등학교『수학 II』의 미분법 단원에서 미분계수의 정의를 설명하였다. [문제 4]는 제시문을 주지 않고 문제를 구성하였다.

(다) 제시문 출처

[문제 1] (가) 고등학교『수학 I』, (주)금성출판사, 27쪽, 31쪽, 발췌 수정
[문제 1] (나) 고등학교『수학 I』, 행렬의 곱셈 단원에서 교환법칙이 성립하는 경우에 관한 내용으로 창작된 것임

[문제 2] 고등학교『적분과 통계』, 성지출판(주), 40쪽

[문제 3] (가) 고등학교『수학 II』, (주)금성출판사, 107쪽
[문제 3] (나) 고등학교『수학 II』, (주)금성출판사, 108쪽
[문제 3] (다) 고등학교『수학 II』, (주)교학사, 109쪽, 발췌 수정

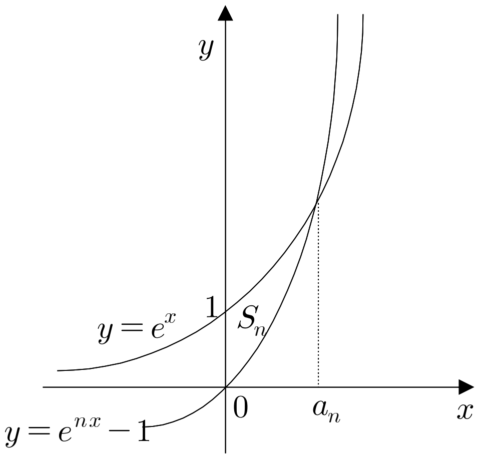
[문제 4] 제시문 없음

3. 논제 해설

[문제 1]은 행렬의 곱셈은 교환법칙이 성립하지 않는다는 사실을 이용하여, 사칙연산이 성립하던 상황에서의 계산 경험을 배제하고 정해진 가정과 규칙에만 의존하여 대수적인 계산을 수행해내는 능력을 평가하는 문제이다. 먼저 주어진 조건을 만족하는 행렬 C는 단위행렬의 상수배가 아님을 확인 한 후, (1-1)은 행렬 C와 행렬의 곱셈에 관해 교환법칙이 성립하는 두 행렬 A, B는 제시문 (나)에 주어진 표현 방식으로 표현할 수 있고, 이 표현을 이용하여 두 행렬 A, B도 행렬의 곱셈에 관해 교환법칙이 성립함을 보인다. (1-2)는 행렬 C가 만족하는 방정식을 이용하여 행렬 A의 방정식을 얻을 수 있고, 이 방정식을 이용하여 행렬 A와의 곱이 단위행렬이 되도록 조작한 후, 행렬 A의 역행렬을 다시 행렬 C와 단위행렬 E의 일차결합으로 나타낸다.

[문제 2]는 유리식으로 주어진 수열에 관한 세 문제로 구성되어 있다. (2-1)에서는 유리식을 부분 분수로 표현하여, 급수를 계산할 수 있다. (2-2)에서는 (2-1)에서 얻은 급수의 일반항이 유리식임을 확인하여 극한값을 계산할 수 있다. (2-3)에서는 먼저 정적분 계산을 통해서 주어진 수열과의 관계를 확인한 후, 제시문을 이용하여, 정적분을 수열의 급수 형태로 표현할 수 있음을 보인다. 이를 이용하여, 정적분의 극한을 계산한다.

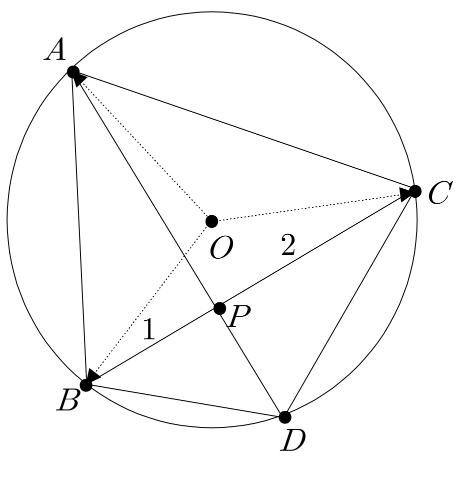
[문제 3]은 2 보다 큰 정수 n 에 대해서 아래 그림과 같이 $x \geq 0$ 에서 두 곡선 $y = e^x$ 와 $y = e^{nx} - 1$ 은 한 점에서 만나고, 그 교점의 x 좌표를 a_n , 두 곡선의 그래프와 y 축으로 둘러싸인 영역의 넓이를 S_n 이라 할 때, (3-1)은 $0 < a_n < \frac{1}{n}$ 임을 보이는 문제이다. 이것은 방정식 $e^x = e^{nx} - 1$ 의 근 a_n 이 구간 $(0, \frac{1}{n})$ 에 존재함을 보이는 것으로 제시문 (가)와 (나)에 주어진 중간값의 정리를 적용하면 된다. (3-2)는 극한 $\lim_{n \to \infty} \frac{S_n}{a_n}$ 의 값을 구하는 문제이다. 정적분으로 넓이 S_n 을 구하고 제시문 (다)를 이용하여야 한다.



[문제 4]는 아래 그림과 같이 반지름이 1이고 점 O를 중심으로 하는 원에 내접하는 사각형 $ABCD$가 다음의 두 조건

(조건1) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$

(조건2) AD와 BC의 교점 P는 선분 BC를 $1 : 2$ 으로 내분한다.



을 만족할 때, (4-1)은 삼각형 ABC가 정삼각형임을 보이는 문제이다. (조건1)을 이용하여 구하는 것인데 벡터의 내적 혹은 삼각함수의 성질 등을 이용하는 방법이 있다. (4-2)는 벡터 $\overrightarrow{AD}$ 를 벡터 $\overrightarrow{AB}$ 와 벡터 $\overrightarrow{AC}$ 로 나타내는 문제이다. (4-1)의 결과와 (조건2)를 이용하고, 벡터의 크기, 내분점의 벡터 표현, 벡터의 내적 등 기본성질을 적용하는 문제이다.

4. 평가 기준

- 주어진 제시문을 정확하게 이해하고 이를 바탕으로 각 논제에서 요구하는 문제를 파악하는 능력
- 고등학교 수학 과목에서 다루는 최소한의 기본 개념을 이해하고 있는 정도
- 논제에서 요구하는 사항을 정확히 이해하고 기존 지식과 제시문의 내용을 바탕으로 논제의 답을 논리적으로 추론하는 능력

5. 예시 답안

[문제 1] (25점)

(1-1) (10점) 문제의 조건에서 행렬의 원들이 모두 실수이므로 C 는 E 의 상수배가 될 수 없다. $AC=CA$ 이고 $BC=CB$ 이므로 제시문에 의해 적당한 실수 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 에 대하여

$$A=\alpha C+\beta E,\ \ B=\gamma C+\delta E$$

로 쓸 수 있다. 따라서 A와 B의 곱셈은

$$AB=(\alpha C+\beta E)(\gamma C+\delta E)=(\gamma C+\delta E)(\alpha C+\beta E)=BA$$

로 교환된다.

(1-2) (15점) 문제의 조건에서 행렬의 원들이 모두 실수이므로 C 는 E 의 상수배가 될 수 없다. $C=A+E$ 이므로 $O=C^2+C+E=A^2+3A+3E$ 이다. 따라서

$$A^{-1}=-\frac{1}{3}(A+3E)=-\frac{1}{3}(C+2E)$$

이다.

[문제 2] (25점)

(2-1) (5점) a_n 은 부분분수로 다음과 같이 표현될 수 있다. $a_n=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}$

이를 이용하면, $\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}=1-\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$ 이 된다.

(2-2) (10점) 급수의 합이 분자와 분모 모두 2차식인 유리식이므로 무한급수의 합은 수렴하

고, 무한급수의 합은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+2)}{(n+1)^2} = 1$$

(2-3) (10점) 정적분을 계산하면, 다음과 같다.

$$\int_n^{n+1}\frac{1}{x^3}dx = \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_n^{n+1} = \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2(n+1)^2} = \frac{2n+1}{2n^2(n+1)^2} = \frac{a_n}{2}$$

제시문의 성질에 따라서, 적분의 극한값은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^n \frac{1}{x^3}dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{1}{x^3}dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}$$

[문제 3] (25점)

(3-1) (10점) $f(x) = e^{nx} - e^x - 1$ 이라 하면 $f(x)$ 는 $\left[0, \frac{1}{n}\right]$ 에서 연속함수이다. 그리고

$$f(0) = -1 < 0, \quad f\left(\frac{1}{n}\right) = e - e^{\frac{1}{n}} - 1 \ge (e-1) - e^{\frac{1}{2}} > 0$$

이므로 중간값의 정리에 의해 방정식 $f(x)=0$ 의 근 a_n 은 열린구간 $\left(0, \frac{1}{n}\right)$ 에 존재한다.

(3-2) (15점) 먼저

$$S_n = \int_0^{a_n}\{e^x - e^{nx} + 1\}dx = \left[e^x - \frac{1}{n}e^{nx} + x\right]_0^{a_n} = e^{a_n} - 1 - \frac{1}{n}(e^{na_n} - 1) + a_n$$

이므로

$$\frac{S_n}{a_n} = \frac{e^{a_n}-1}{a_n} - \frac{e^{na_n}-1}{na_n} + 1$$

이다. a_n 은 문제 (3-1)의 결과에 의해 $0 < a_n < \frac{1}{n}$ 이므로 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 이다. 또한 $e^{a_n} = e^{na_n} - 1$ 에서 $n a_n = \ln(e^{a_n}+1)$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}(n a_n) = \lim_{n\to\infty}\ln(e^{a_n}+1) = \ln\left\{\lim_{n\to\infty}(e^{a_n}+1)\right\} = \ln 2$$

이다. 따라서 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{e^{a_n}-1}{a_n} - \frac{e^{na_n}-1}{na_n}+1\right)\\ &= \lim_{a_n\to 0}\left(\frac{e^{a_n}-1}{a_n}\right) - \lim_{n\to\infty}\left(\frac{e^{na_n}-1}{na_n}\right)+1\\ &= 1-\frac{e^{\ln 2}-1}{\ln 2}+1 = 2-\frac{2-1}{\ln 2} = 2-\frac{1}{\ln 2}\end{aligned}$$

[문제 4] (25점)

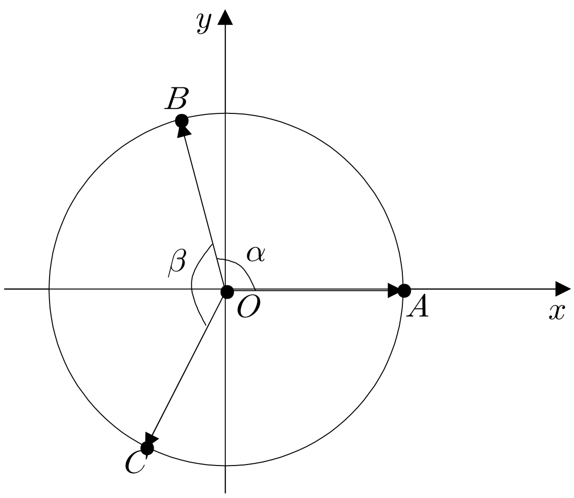
(4-1) (10점) (조건1)로부터 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OC}$ 에 의해 $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|$. 양변을 제곱하면

$$|\overrightarrow{OA}|^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OB}|^2=|\overrightarrow{OC}|^2$$

이다. $\angle AOB=\theta$ 라 하면 $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=1$이므로 $2\cos\theta+1=0$, 즉 $\theta=120^\circ$ 이다. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OC}$ 에 의해 $2\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}=-\overrightarrow{OC}$ 로 변형되고, 이는 변 AB의 중점과 점 C는 중심 O에 대해 서로 반대편에 있음을 의미한다. 따라서 중심각과 원주각과의 관계에 의해 $\angle ACB=\frac{1}{2}\angle AOB=60^\circ$ 이다.

또한, $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OB}$ 에 의해, 같은 방법으로 $\angle ABC=\frac{1}{2}\angle AOC=60^\circ$ 이다. $\angle BAC=180^\circ-60^\circ-60^\circ=60^\circ$. 따라서 삼각형 ABC는 정삼각형이다.

(별해) 그림과 같이 세 점 A, B, C 를 정해도 일반성을 잃지 않는다.



$\overrightarrow{OA}$ 와 $\overrightarrow{OB}$ 가 이루는 반시계방향의 각을 α 라 하고 $\overrightarrow{OB}$ 와 $\overrightarrow{OC}$ 가 이루는 반시계 방향의

각을 β라 하자. $0 \le \alpha, \beta \le \frac{\pi}{2}$ 이면 (조건1)로부터 세 점 A, B, C는 원 위에 놓이지 않는다.

따라서 $\frac{\pi}{2} < \alpha, \beta < \pi$이다. 또한

$$\overrightarrow{OA} = (1, 0),\ \overrightarrow{OB} = (\cos\alpha, \sin\alpha),\ \overrightarrow{OC} = (\cos(\alpha+\beta), \sin(\alpha+\beta))$$

이다. (조건1)로부터

$$\begin{cases} \cos\alpha + \cos(\alpha+\beta) = -1 & ---(1) \\ \sin\alpha + \sin(\alpha+\beta) = 0 & ---(2) \end{cases}$$

을 얻는다. (1)과 (2)를 제곱하여 더하면

$$\cos\alpha\cos(\alpha+\beta) + \sin\alpha\sin(\alpha+\beta) = \cos\alpha = -\frac{1}{2}$$

을 얻는다. 따라서 $\alpha = \angle AOB = 120^\circ$ 이다. 마찬가지로 $\beta = \angle BOC = 120^\circ$ 이다. 따라서 $\angle COA = 120^\circ$ 이다. 중심각과 원주각과의 관계에 의해 삼각형 ABC는 정삼각형이다.

(4-2) (15점) (조건2)에 의해 $\overline{BP} : \overline{PC} = 1 : 2$ 이므로 $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. 문제 (4-1)에 의해 삼각형 ABC는 정삼각형이므로 한 변의 길이를 1이라 해도 일반성을 잃지 않는다.

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| = 1,\ \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$|\overrightarrow{AP}|^2 = \frac{4}{9}|\overrightarrow{AB}|^2 + 2\frac{2}{9}\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} + \frac{1}{9}|\overrightarrow{AC}|^2 = \frac{5}{9} + \frac{2}{9} = \frac{7}{9},$$

$$|\overrightarrow{AP}| = \sqrt{\frac{7}{9}} = \frac{\sqrt{7}}{3}.$$

삼각형 ABP와 삼각형 CDP는 닮은 삼각형이므로 $\overline{AP}\,\overline{PD} = \overline{BP}\,\overline{PC}$ 이다. 따라서

$$\overline{PD} = \frac{\overline{BP}\,\overline{PC}}{\overline{AP}} = \frac{\frac{2}{3}\,\frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{7}}{3}} = \frac{2}{3\sqrt{7}},$$

$$\overline{AP} : \overline{AD} = \overline{AP} : (\overline{AP} + \overline{PD}) = \frac{\sqrt{7}}{3} : \left(\frac{\sqrt{7}}{3} + \frac{2}{3\sqrt{7}}\right) = 1 : \left(1 + \frac{2}{7}\right) = 1 : \frac{9}{7}$$

이다. 따라서

$$\overrightarrow{AD} = \frac{9}{7}\overrightarrow{AP} = \frac{9}{7}\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{6}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{7}\overrightarrow{AC}$$

이다.