2016학년도 모의 논술고사 수리논술 해설 및 예시답안

수학 (100점)

1. 출제의도

정상적인 고등학교 수학교과를 이수한 수험생이면 충분하게 풀 수 있는, 교과서에 기반을 둔 문제를 출제하였다. 수열의 귀납적 정의, 조합의 수, 수학적 귀납법, 파스칼의 공식, 삼차다항함수와 직선의 관계, 역함수의 미분법, 이차곡선(타원)과 접선 등 고등학교 수학의 기본적인 내용을 이해하고 있으며, 주어진 문제를 논리적으로 분석할 수 있는 능력과 자신의 생각을 논리적이고 합리적으로 표현하는 능력을 평가하고자 하는 의도로 문제를 출제하였다.

2. 주제 분석과 제시문 해설

(가) 주제 분석

[문제 1]은 수열의 귀납적 정의를 이해하고, 이전 항과 이후 항의 관계를 파악하는 것이다.

[문제 2]는 조합의 수의 합으로 수열을 정의했을 때, 이 수열의 초항과 점화식의 모습을 증명할 수 있고, 이를 활용하여 수열의 다른 항등식을 증명하는 것이다.

[문제 3]은 삼차다항함수의 미분과 이를 이용한 그래프의 개형을 이해하고, 주어진 상황에서 발생하는 정확한 식을 줄 수 없는 함수의 미분 값을 역함수의 미분법을 이용하여 구하는 것이다.

[문제 4]는 타원과 타원 위에 있지 않은 한 정점을 지나는 직선이 타원과 두 점에서 만날 조건을 구할 수 있고, 이를 활용하여 그 두 점에서 타원의 두 접선의 교점의 자취의 방정식을 구하는 것이다.

(나) 제시문 해설

[문제 1]의 제시문은 고등학교『수학 I』의 수열 단원에서 수열의 귀납적 정의와 점화식에 대한 정의를 설명하였다.

[문제 2]의 제시문은 고등학교『적분과 통계』의 순열과 조합 단원에서 조합의 수에 관한 파스칼의 공식을 제시하였고, 이는 (2-2)를 해결하는 데 사용되었다.

[문제 3]의 제시문은 고등학교『수학 II』의 미분법 단원에서 역함수의 미분법을 문제 풀이에 적용할 수 있도록 수정하여 설명하였고, 이는 (3-2)를 해결하는 데 사용되었다.

[문제 4]의 제시문은 고등학교『기하와 벡터』의 이차곡선 단원에서 타원 위의 점에서 접선의 방정식을 설명하였고, 이는 (4-2)를 해결하는 데 사용되었다.

(다) 제시문 출처

[문제 1] 고등학교『수학 I』, (주)금성출판사, 144쪽

[문제 2] 고등학교『적분과 통계』, 성지출판(주), 95쪽, 발췌 수정

[문제 3] 고등학교『수학 II』, (주)교학사, 128쪽, 발췌 수정

[문제 4] 고등학교『기하와 벡터』, (주)교학사, 55쪽

3. 논제 해설

[문제 1]에서 귀납적으로 정의된 수열은 바로 직전 항의 값으로부터 다음 항의 값을 구할 수 있는 형태이다. 귀납적인 정의를 이용해서 현재 항의 값에 대한 조건이 주어졌을 때 이전 항이 어떤 값을 가질 수 있는지 추리해 보는 문제와 초항의 조건에 따라서 이후 항이 어떻게 변하는지 파악해서 주어진 부등식을 만족하게끔 하는 조건을 찾아내는 문제이다.

[문제 2]는 조합의 수의 정의를 이용하여, 초항의 값을 구하고, 파스칼의 공식을 이용하여, n이 짝수일 때와 홀수 일 때로 나누어 점화식을 유도하고, 앞에서 얻은 결과를 이용하여, 수학적 귀납법으로 항등식을 증명하는 문제이다.

[문제 3]은 삼차다항함수의 개형과 함수를 미분하여 계산한 결과로부터 삼차다항함수의 극솟값과 극댓값을 파악해서 주어진 상황을 만족하는 조건을 파악하고, 이때 발생하는 새로운 값을 함수로 생각했을 때, 이 함수의 미분을 역함수의 미분법을 이용하여 계산하는 문제이다.

[문제 4]는 고등학교 수학교과에서 배운 여러 가지 방법을 이용하여 타원과 타원 위에 있지 않은 한 정점을 지나는 직선이 타원과 두 점에서 만날 조건을 구하고, 타원과 직선이 두 점에서 만나는 경우, 앞의 결과를 이용하여, 그 두 점에서 타원의 두 접선의 교점의

자취의 방정식을 구하는 문제이다.

4. 평가 기준

- 주어진 제시문을 정확하게 이해하고 이를 바탕으로 각 논제에서 요구하는 문제를 파악하는 능력
- 고등학교 수학 과목에서 다루는 최소한의 기본 개념을 이해하고 있는 정도
- 논제에서 요구하는 사항을 정확히 이해하고 기존 지식과 제시문의 내용을 바탕으로 논제의 답을 논리적으로 추론하는 능력

5. 예시 답안

[문제 1] (25점)

(1-1) (10점) 주어진 점화식으로부터 역으로 추적해 보면 다음을 얻는다.

$$5 = a_5 = \begin{cases} a_4 & (a_4 \geq 5) \\ 10 - a_4 & (a_4 < 5) \end{cases} \Rightarrow a_4 = 5$$

$$5 = a_4 = \begin{cases} a_3 & (a_3 \geq 4) \\ 8 - a_3 & (a_3 < 4) \end{cases} \Rightarrow a_3 = 5,\ 3$$

$$5,\ 3 = a_3 = \begin{cases} a_2 & (a_2 \geq 3) \\ 6 - a_2 & (a_2 < 3) \end{cases} \Rightarrow a_2 = 5,\ 1,\ 3$$

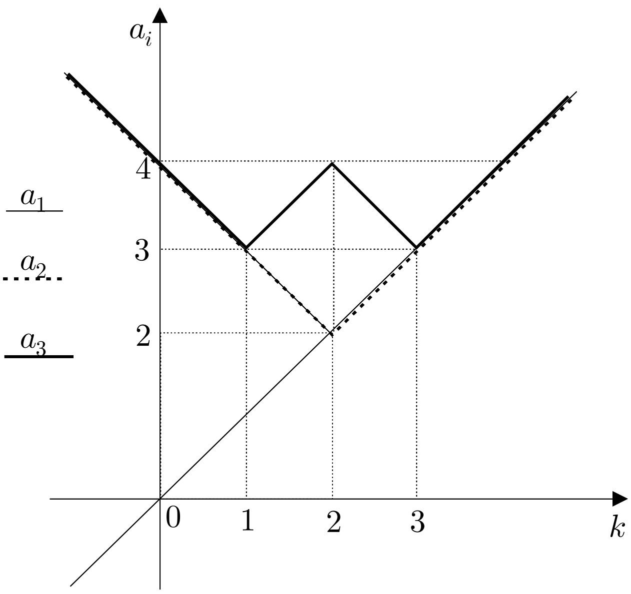
$$5,\ 1,\ 3 = a_2 = \begin{cases} k & (k \geq 3) \\ 4 - k & (k < 3) \end{cases} \Rightarrow k = 5,\ -1,\ 3,\ 1$$

따라서 구하는 k 의 값은 $k = -1,\ 1,\ 3,\ 5$ 이다.

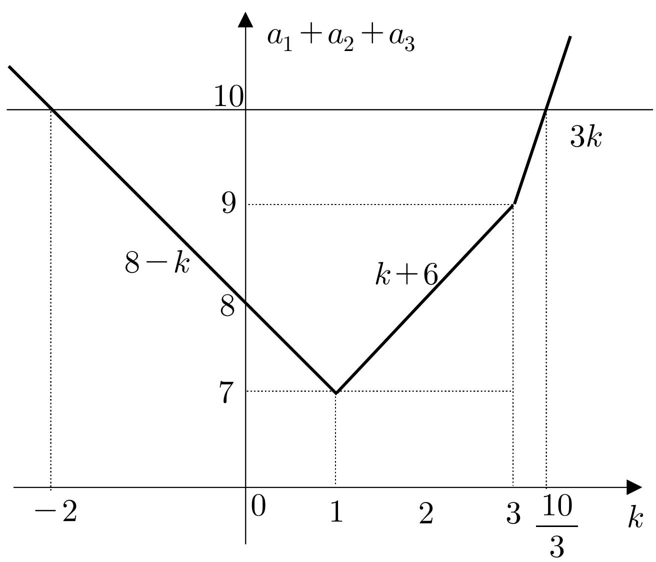
(1-2) (15점) 주어진 점화식으로부터

$$a_1 = k,\ a_2 = \begin{cases} k & (k \geq 2) \\ 4 - k & (k < 2) \end{cases},\ a_3 = \begin{cases} a_2 & (a_2 \geq 3) \\ 6 - a_2 & (a_2 < 3) \end{cases} = \begin{cases} k & (k \geq 3) \\ 6 - k & (2 \leq k < 3) \\ 2 + k & (1 \leq k < 2) \\ 4 - k & (k < 1) \end{cases}$$

을 얻고 이를 그림으로 표시하면 다음과 같다.



위 세 그림을 더하면 다음과 같은 그림을 얻는다.



따라서 구하는 k 의 범위는 $-2 \le k \le \frac{10}{3}$ 이다.

[문제 2] (25점)

(2-1) (5점) $f_1 = {}_1C_0 = 1$ 이고, $f_2 = {}_2C_0 + {}_1C_1 = 2$ 이다.

(2-2) (10점) 모든 짝수 $n = 2m \ge 3$ 대해, 다음과 같이 계산 될 수 있다.

$$\begin{aligned} f_{n-1}+f_{n-2} &= \sum_{k=0}^{m-1} {}_{2m-1-k}C_k + \sum_{k=0}^{m-1} {}_{2m-2-k}C_k \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} {}_{2m-1-k}C_k + \sum_{k=1}^{m} {}_{2m-1-k}C_{k-1} \\ &= {}_{2m-1}C_0 + \sum_{k=1}^{m-1}\left({}_{2m-1-k}C_k + {}_{2m-1-k}C_{k-1}\right) + {}_{m-1}C_{m-1} \end{aligned}$$

제시문의 성질에 따른 ${}_nC_k = {}_{n-1}C_k + {}_{n-1}C_{k-1}$ 과

$${}_{2m-1}C_0 = {}_{2m}C_0 = {}_{m-1}C_{m-1} = {}_mC_m = 1$$

에 의해서, 아래와 같이 정리가 된다.

$$f_{n-1}+f_{n-2} = {}_{2m}C_0 + \left(\sum_{k=1}^{m-1} {}_{2m-k}C_k\right) + {}_mC_m = \sum_{k=0}^{m} {}_{n-k}C_k = f_n$$

비슷하게, 모든 홀수 $n = 2m+1 \geq 3$ 대해, 다음과 같이 계산 될 수 있다.

$$\begin{aligned} f_{n-1}+f_{n-2} &= \sum_{k=0}^{m} {}_{2m-k}C_k + \sum_{k=0}^{m-1} {}_{2m-1-k}C_k \\ &= \sum_{k=0}^{m} {}_{2m-k}C_k + \sum_{k=1}^{m} {}_{2m-k}C_{k-1} \\ &= {}_{2m}C_0 + \sum_{k=1}^{m}\left({}_{2m-k}C_k + {}_{2m-k}C_{k-1}\right) \end{aligned}$$

제시문의 성질에 따른 ${}_nC_k = {}_{n-1}C_k + {}_{n-1}C_{k-1}$ 과 ${}_{2m}C_0 = {}_{2m+1}C_0 = 1$ 에 의해서, 아래와 같이 정리가 된다.

$$f_{n-1}+f_{n-2} = {}_{2m+1}C_0 + \left(\sum_{k=1}^{m} {}_{2m+1-k}C_k\right) = \sum_{k=0}^{m} {}_{n-k}C_k = f_n$$

그러므로 모든 정수 $n \geq 3$ 에 대해, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ 가 성립된다.

(2-3) (10점) 양의 정수 n 에 관해 수학적 귀납법을 사용하여 증명을 한다.
먼저 $n=1$ 일 때,

$$f_3 - 2 = \left({}_3C_0 + {}_2C_1\right) - 2 = 1 + 2 - 2 = 1 = f_1$$

되어 성립한다.
이제 $n=k$ 에 대해 식 $f_1 + f_2 + \cdots + f_k = f_{k+2} - 2$ 이 성립한다고 가정하고, $n = k+1$ 일 때 식이 성립함을 보이자. 문제 (2-2)의 결과인 $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ 을 이용하여 다음을 보일 수 있다.

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_k + f_{k+1} = \left(f_{k+2} - 2\right) + f_{k+1} = f_{k+3} - 2$$

그러므로 모든 양의 정수 n 에 대하여, $f_1 + f_2 + \cdots + f_n = f_{n+2} - 2$ 이 성립한다.

(별해) $f_2=2$ 이므로 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} f_1+f_2+\cdots+f_n &= (f_2+f_1)+f_2+f_3+\cdots+f_n-2 \\ &= (f_3+f_2)+f_3+\cdots+f_n-2 \\ &= \quad \cdots \\ &= (f_n+f_{n-1})+f_n-2 \\ &= (f_{n+1}+f_n)-2 \\ &= f_{n+2}-2 \end{aligned}$$

[문제 3] (25점)

(3-1) (10점) 함수 $g(x)=x^3-6x$ 은 $g'(x)=3x^2-6=3(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})=0$ 으로부터 극댓값 $g(-\sqrt{2})=4\sqrt{2}$ 와 극솟값 $g(\sqrt{2})=-4\sqrt{2}$ 을 갖는다. 따라서 곡선 $g(x)=x^3-6x$ 와 직선 $y=k$ 가 서로 다른 세 점에서 만나는 것은 k 의 값이 극댓값과 극솟값 사이에 있을 때이다. 즉, $-4\sqrt{2}<k<4\sqrt{2}$ 이다.

(3-2) (15점) $x^3-6x=-5$를 만족하는 x의 값을 먼저 구해보자. $x=1$이 이 등식을 만족하므로, $x^3-6x+5=(x-1)(x^2+x-5)$로 인수분해 할 수 있고, 등식을 만족하는 것 중에 $x>0$인 것은 $x=1,\ \dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}$이다. $0<x<\sqrt{2}$ 일 때의 $g(x)=x^3-6x$ 의 역함수를 h_1, $\sqrt{2}<x<\sqrt{6}$ 일 때의 역함수를 h_2 라고 하면, $f(k)=h_2(k)-h_1(k)$ 이므로, 역함수의 미분법으로부터 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} f'(-5) &= \frac{1}{g'\left(\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}\right)}-\frac{1}{g'(1)} \\ &= \frac{1}{3\left(\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}\right)^2-6}-\frac{1}{3(1)^2-6} \\ &= \frac{21+\sqrt{21}}{42} \end{aligned}$$

[문제 4] (25점)

(4-1) (10점)

(풀이1) 직선 $l: y=k(x-10)+5$ 은 한 정점 $(10,5)$를 지나고 기울기가 k인 직선이다. 먼저 직선 l이 타원 C에 접할 때의 접선의 방정식은 $y=kx\pm\sqrt{4k^2+1}$ 이고, 이 접선이 점 $(10,5)$을 지나므로

$$5=10k\pm\sqrt{4k^2+1}$$

을 얻는다. 양변을 제곱하여 k에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$24k^2-25k+6=(3k-2)(8k-3)=0$$

이다. 즉, 정점 $(10,5)$를 지나고 타원 C에 접하는 두 접선의 기울기는 $k=\frac{2}{3},\ \frac{3}{8}$ 이다.

따라서 타원 C와 직선 l이 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 상수 k의 범위는

$$\frac{3}{8}<k<\frac{2}{3}$$

이다.

(풀이2) 직선 $l: y=k(x-10)+5$ 은 한 정점 $(10,5)$를 지나고 기울기가 k인 직선이다.

직선 l과 타원 $C: \frac{x^2}{4}+y^2=1$ 의 공유점의 x좌표는 이차방정식

$$\frac{x^2}{4}+(k(x-10)+5)^2=1$$

혹은

$$(1+4k^2)x^2+40k(1-2k)x+400k^2-400k+96=0$$

을 만족한다. 타원 C와 직선 l 이 접하기 위한 k의 값은 다음과 같다.

$$D/4=(20k(1-2k))^2-(1+4k^2)(400k^2-400k+96)=0$$

$$\Leftrightarrow \quad 24k^2-25k+6=(3k-2)(8k-3)=0 \quad \Leftrightarrow \quad k=\frac{3}{8},\ \frac{2}{3}$$

따라서 타원 C와 직선 l이 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 상수 k의 범위는

$$\frac{3}{8}<k<\frac{2}{3}$$

이다.

(풀이3) 직선 $l: y=k(x-10)+5$ 은 한 정점 $(10,5)$를 지나고 기울기가 k인 직선이다.

직선 l과 타원 $C: \frac{x^2}{4}+y^2=1$ 의 접점을 $T(p,q)$이라고 하자. 점 T는 타원 C 위의 점이므로

$$\frac{p^2}{4}+q^2=0 \text{ ---(1)}$$

을 만족한다. 또한 점 T에서의 접선의 방정식은

$$\frac{px}{4}+qy=1 \text{ ---(2)}$$

이고 정점 $(10,5)$를 지나므로

$$\frac{5}{2}p+5q=1 \text{ ---(3)}$$

을 만족한다. (1)과 (3)을 연립하여 p와 q를 구면,

$$(p,q)=\left(-\frac{6}{5},\frac{4}{5}\right),\left(\frac{8}{5},-\frac{3}{5}\right) \text{ ---(4)}$$

을 얻는다. (2)로부터 기울기 k는 $k=-\frac{p}{4q}$이므로 p와 q를 대입하면, 정점 $(10,5)$를 지나고 타원 C에 접하는 두 접선의 기울기는 $k=\frac{2}{3},\ \frac{3}{8}$이다. 따라서 타원 C와 직선 l이 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 상수 k의 범위는

$$\frac{3}{8}<k<\frac{2}{3}$$

이다.

(풀이4) 직선 $l: y=k(x-10)+5$ 은 한 정점 $(10,5)$를 지나고 기울기가 k인 직선이다. 직선 l과 타원 $C: \frac{x^2}{4}+y^2=1$ 의 공유점의 x좌표는 이차방정식

$$\frac{x^2}{4}+(k(x-10)+5)^2=1$$

혹은

$$(1+4k^2)x^2+40k(1-2k)x+400k^2-400k+96=0$$

을 만족한다. 따라서 타원 C와 직선 l 이 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 k의 범위는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & D/4=(20k(1-2k))^2-(1+4k^2)(400k^2-400k+96)>0 \\ \Leftrightarrow\ & 24k^2-25k+6=(3k-2)(8k-3)<0 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{3}{8}<k<\frac{2}{3} \end{aligned}$$

[문제 4] (25점)

(4-2) (15점)

(풀이1) 타원 C와 직선 l 이 서로 다른 두 점 P와 Q에서 만나므로 그 좌표를 각각 $P(x_1,y_1)$, $Q(x_2,y_2)$ 라고 하자. 직선 l의 기울기는

$$k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} \text{ 혹은 } y_1-y_2=k(x_1-x_2) \text{ ---(1)}$$

P와 Q에서 타원 C에 접하는 접선은 각각 다음으로 주어진다.

$$\frac{x_1}{4}x + y_1 y = 1 \text{---(2)}, \qquad \frac{x_2}{4}x + y_2 y = 1 \text{ ---(3)}$$

두 접선 (2)와 (3)을 연립하여 교점의 y-좌표인 b와 x-좌표인 a를 각각 구하면

$$b = \frac{x_1 - x_2}{x_1 y_2 - x_2 y_1} \text{---(4)}, \qquad a = \frac{4(y_2 - y_1)}{x_1 y_2 - x_2 y_1} \text{---(5)}$$

을 얻는다. 한편, $y_1 = kx_1 - 10k + 5$, $y_2 = kx_2 - 10k + 5$를 (4)와 (5)에 대입하여 정리하면

$$b = \frac{x_1 - x_2}{x_1 y_2 - x_2 y_1} = \frac{x_1 - x_2}{x_1(kx_2 - 10k + 5) - x_2(kx_1 - 10k + 5)} = \frac{1}{-10k + 5} \text{---(6)}$$

$$a = \frac{4(y_2 - y_1)}{x_1 y_2 - x_2 y_1} = \frac{4k(x_2 - x_1)}{x_1(kx_2 - 10k + 5) - x_2(kx_1 - 10k + 5)} = \frac{4k}{10k - 5} \text{---(7)}$$

을 얻는다. (6)과 (7)에서 k를 소거하면 a와 b의 관계식

$$5a + 10b = 2 \text{ 혹은 } b = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{5}$$

을 얻는다. 다음으로 b의 범위를 구하자. 먼저 문제 (4-1)에서 얻은 k의 범위 $\frac{3}{8} < k < \frac{2}{3}$ 로부터 부등식 $-\frac{5}{3} < \frac{1}{b} = 5 - 10k < \frac{5}{4}$을 얻고, 이 연립부등식의 해를 구하면

$$b < -\frac{3}{5}, b > \frac{4}{5}$$

을 얻는다.

(풀이2) 타원 C와 직선 l이 서로 다른 두 점 P와 Q에서 만나므로 그 좌표를 각각 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$라 하자. P, Q에서 타원 C에 접하는 접선은 각각

$$\frac{x_1 x}{4} + y_1 y = 1, \quad \frac{x_2 x}{4} + y_2 y = 1$$

이다. 두 접선의 교점이 $R(a, b)$이므로

$$\frac{x_1 a}{4} + y_1 b = 1, \ \frac{x_2 a}{4} + y_2 b = 1$$

을 만족한다. 따라서 직선 $\frac{a}{4}x + by = 1$ 혹은 $y = -\frac{a}{4b}x + \frac{1}{b}$은 두 점 P, Q를 지나는 직선이다. 이 직선이 결국 $l : y = k(x - 10) + 5$와 같으므로

$$-\frac{a}{4b} = k \text{ 혹은 } a = -4kb \text{ ---(1)}$$

$$\frac{1}{b} = -10k + 5 \text{ 혹은 } b = \frac{1}{-10k + 5} \text{ ---(2)}$$

이다. (1)과 (2)에서 k를 소거하여 얻은 a와 b의 관계식은

$$\frac{1}{b}\left(1-\frac{5}{2}a\right)=5 \quad \text{혹은} \quad 5a+10b=2 \quad \text{혹은} \quad b=-\frac{1}{2}a+\frac{1}{5}\text{이다.}$$

다음으로 b의 범위를 구하자. 먼저 문제 (4-1)에서 얻은 k의 범위 $\frac{3}{8}<k<\frac{2}{3}$ 로부터

부등식 $-\frac{5}{3}<\frac{1}{b}=5-10k<\frac{5}{4}$을 얻는다. 이 부등식의 해를 구하면

$$b<-\frac{3}{5},\, b>\frac{4}{5}$$

을 얻는다.