2015학년도 수시모집

논술고사 문제지

(수학과학) : 120분

모집단위		전형유형	수학과학우수자
수험번호		성　　명	

■ 일반 유의사항

1. 시험시간은 120분, 배점은 수학이 60점, 과학이 40점입니다. 단, 수학은 필수이며 과학은 물리(20점), 화학(20점), 생명과학(20점) 중에서 2과목 선택입니다.
2. 각 문항의 답안은 반드시 해당 답안 공간에 작성하시오.
3. 답안을 구상할 때 문제지의 여백이나 또는 문제지 내의 연습장을 사용하시오.
4. 답안을 작성할 때 반드시 흑색 필기구만을 사용하시오(연필, 샤프 사용 가능, 사인펜 불가).
5. 답안을 정정할 때 두 줄을 긋고 정정하시오(수정액, 수정 테이프, 지우개 사용 가능).

※ 답안지는 절대 교체할 수 없습니다.

■ 답안 작성 유의사항

1. 제목은 쓰지 말고, 논제 번호를 명시한 후 답안을 작성하시오.
2. 제시된 분량을 지키시오.
3. 제시문의 문장을 그대로 옮기지 마시오.
4. 수험번호, 성명 등 신상에 관련된 사항을 답안 공간이나 답안지의 여백에 드러내지 마시오.
5. 풀이의 과정을 순차적으로 서술하되, 필요한 경우에 수식 및 그림을 사용할 수 있으며, 수식은 반드시 문장 속에 포함 시키시오.

인하대학교
INHA UNIVERSITY

논술고사 (수학과학우수자)

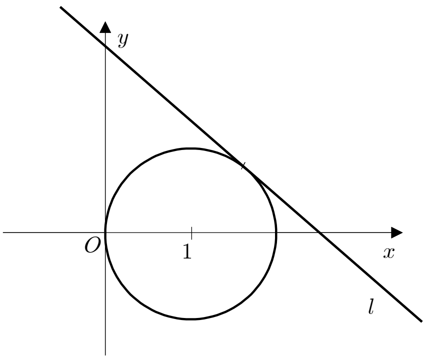
수학 필수 : 60점

[문제 1] (30점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

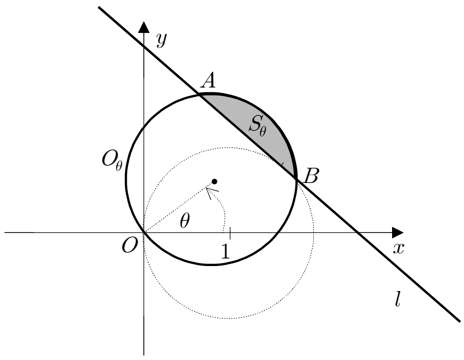
(가) 한 점 P와 직선 l 사이의 거리는 점 P에서 직선 l에 내린 수선의 길이를 말한다. 점 $P(x_1, y_1)$과 점 P를 지나지 않는 직선 l : $ax+by+c=0$ 사이의 거리는 $\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 으로 주어진다.

(나) 삼각함수의 미분법에서 기본이 되는 삼각함수의 극한 정리는 $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 이다. 이 정리를 이용하면 $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\cos x-1}{x}=0$ 을 얻는다.

(※) [그림 1]과 같이 기울기가 m $(m<0)$인 직선 l 이 원 $(x-1)^2+y^2=1$과 제1사분면에서 접한다.
이 원을 [그림 2]와 같이 원점을 중심으로 θ 만큼 회전한 원을 O_θ라 하자. 직선 l 이 원 O_θ와 두 점에서 만날 때 만나는 점을 A, B라 하자.



[그림 1]



[그림 2]

(1-1) [그림 1]에서 직선 l 의 y 절편을 m의 식으로 나타내시오. (5점)

(1-2) [그림 2]와 같이 선분 AB와 호 $\widehat{AB}$로 둘러싸인 영역의 넓이를 S_θ 라 하자. 각 θ가 변함에 따라 S_θ 가 최대가 되는 θ의 값을 α라 할 때, $\tan\alpha$의 값을 m의 식으로 나타내시오. (10점)

(1-3) [그림 2]에서 선분 AB의 길이를 $f(\theta)$ 라 할 때, $\lim\limits_{\theta \to +0}\dfrac{\{f(\theta)\}^2}{\theta}$ 을 구하시오. (15점)

논술고사 (수학과학우수자)

[문제 2] (30점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 상수 a를 포함하는 구간 $(\alpha, \beta) = \{x | \alpha < x < \beta\}$에서 정의된 연속함수 $f(x)$에 대하여 $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$로 정의하면 $F(x)$는 $x = a$에서 미분가능하고 $F'(a) = f(a)$이다. 이를 미분계수의 정의를 이용하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t)\,dt = \lim_{x \to a} \frac{F(x) - F(a)}{x-a} = F'(a) = f(a)$$

(나) 구간 $[a, b] = \{x | a \le x \le b\}$에서 정의된 연속함수 $g(x), h(x)$가 $g(x) \le h(x)$ $(a \le x \le b)$를 만족할 때 두 곡선 $y = g(x)$, $y = h(x)$ 및 두 직선 $x = a$, $x = b$로 둘러싸인 영역의 넓이는 $\int_a^b (h(x) - g(x))\,dx$이다. 그런데

$$0 \le \int_a^b (h(x) - g(x))\,dx = \int_a^b h(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

이므로, 아래의 부등식을 얻는다.

$$\int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b h(x)\,dx$$

(※) 함수 $f(x) = xe^x$에 대하여 점 $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$이 아래의 두 조건을 만족한다고 하자.

(a) $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 2$

(b) $\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx = \frac{1}{n} \int_0^2 f(x)\,dx \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$

(2-1) $\int_0^2 f(x)\,dx$의 값을 구하시오. (5점)

(2-2) 극한 $\lim_{n \to \infty} n(x_n - x_{n-1})$의 값을 구하시오. (10점)

(2-3) 상수 α에 대하여 극한 $\lim_{n \to \infty} \frac{n^{\alpha}(x_n - x_{n-1})}{x_1 - x_0}$의 값 L은 양의 실수이다.

$0 \le x \le x_1$일 때 $1 \le e^x \le e^{x_1}$임을 이용하여 α의 값과 극한값 L을 각각 구하시오. (15점)

논술고사 (수학과학우수자)

물리 선택 : 20점

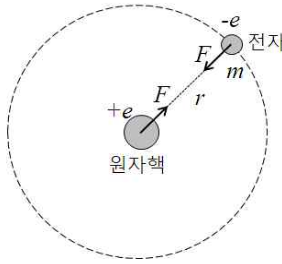
※ 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

(가) 물체가 등속원운동을 할 때, 원운동의 중심 방향으로 일정한 크기의 힘이 작용한다. 이 힘을 구심력이라고 하며, 다음과 같이 표현된다.

$$F = m\frac{v^2}{r}$$

여기서 m은 물체의 질량, v는 물체의 속력, r은 원운동의 반지름을 나타낸다. 원운동의 주기를 T라고 하면 $T = \frac{2\pi r}{v}$ 의 관계가 있다.

러더퍼드의 원자 모형에 따르면 [그림 1]에서와 같이 전자는 원자핵 주위를 등속원운동하고 있다. 수소 원자의 경우 원자핵의 전하량은 $+e$ 이고 전자의 전하량은 $-e$ 이므로 두 전하 사이에는 서로 끌어당기는 전기력이 작용하게 된다. 이 전기력의 크기는 쿨롱의 법칙에 의해서 다음과 같이 주어진다.

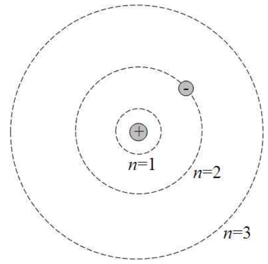


[그림 1]

$$F = k\frac{e^2}{r^2}$$

여기서 k는 상수로서 진공에서의 값은 $8.99\times10^9\ \mathrm{Nm^2/C^2}$ 이다. 수소 원자에서는 이 전기력이 원운동의 구심력 역할을 하게 된다. 이러한 러더퍼드의 원자 모형은 마치 행성이 태양 주위를 돌고 있는 상황과 비슷하므로, 이 경우에도 케플러의 법칙과 같이 주기의 제곱이 반지름의 세제곱에 비례하게 된다.

(나) 보어는 전자가 원자핵 주위에 아무 곳에서나 존재하는 것이 아니라 특정한 에너지를 가진 궤도에서만 원운동을 할 수 있다는 원자 모형을 제시하였다. [그림 2]에서와 같이 전자의 궤도는 원자핵에서 가장 가까운 것부터 $n=1,2,3,\cdots$ 인 궤도라 부르며, 정수 n을 양자수라고 한다. 보어의 모델에 의하면 이와 같이 양자화 되어 있는 전자의 궤도에서 원주의 길이는 $\frac{h}{mv}$ 의 정수배가 된다. 여기서 m는 전자의 질량, v는 속력이고, h는 플랑크 상수로서 $6.63\times10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s}$ 의 값을 갖는다. 즉, 양자수가 n인 궤도의 반지름을 r_n 이라고 하면, 보어의 양자화 조건은 $2\pi r_n = \frac{nh}{mv}$ 로 표현된다.



[그림 2]

(다) 제시문 (나)의 양자화 조건을 활용해서 수소 원자에서 전자의 에너지를 계산하면 양자수가 n인 궤도에서 에너지 E_n 을 계산할 수 있고, 다음과 같이 n의 제곱에 반비례함을 보일 수 있다.

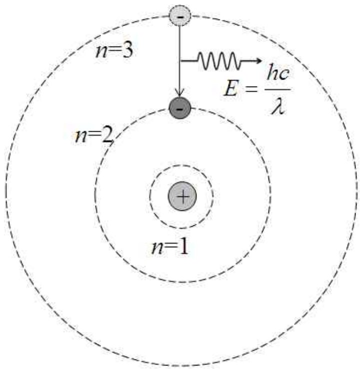
$$E_n = -\frac{A}{n^2}$$

여기서 A은 $n=1$인 바닥상태에서 에너지의 크기로서 그 값은 $13.6\,\mathrm{eV}$ 이다. E_n의 부호가 (−)인 것은 전자가 원자핵에 구속되어 운동하고 있음을 의미한다. 전자가 양자수 m인 궤도에서 양자수 n인 궤도로 전이하는 경우에 방출되거나 흡수되는 빛의 에너지 E는 다음과 같다.

$$E = |E_m - E_n| \qquad (m < n \text{ 이면 흡수, } m > n \text{ 이면 방출})$$

이 때, 빛의 에너지는 $E = \frac{hc}{\lambda}$ 로 표현할 수 있는데, 여기서 c는 빛의 속력이고 λ는 빛의 파장이다.

(※) 아래 그림과 같이 수소 원자에서 전자가 $n=3$인 상태에서 $n=2$인 상태로 전이하면서 빛을 방출하였다. 전자의 질량은 m, 전하량의 크기는 e이다. 이 때, 다음 질문들에 답하시오. (단, 만유인력의 영향은 무시한다.)



[문제 1] 제시문 (다)를 참조하여 이 전이 과정에서 방출되는 빛의 파장을 A, h, c를 활용하여 나타내시오. (6점)

[문제 2] 제시문 (가)의 식들을 이용하여 수소 원자의 전자의 원운동에서 주기의 제곱이 반지름의 세제곱에 비례함을 보이시오. (6점)

[문제 3] 제시문 (가)의 식들과 보어의 양자화 조건을 이용하여 두 궤도의 반지름의 차이, $r_3 - r_2$를 k, h, m, e를 활용하여 나타내시오. (8점)

논술고사 (수학과학우수자)

화학 선택 : 20점

※ 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

(가) 원자들은 비활성 기체의 전자 배치와 같이 8개(1주기 원소는 2개)의 원자가 전자를 가지도록 전자를 잃거나 얻거나 공유하려는 경향이 있는데, 이를 옥텟 규칙이라고 한다. 루이스는 각 원자가 옥텟 규칙을 만족시키기 위해 전자쌍을 공유함으로써 공유 결합이 형성된다고 제안하였다. 또한 루이스는 화학 결합을 나타내기 위하여 원자들의 원자가 전자를 점으로 나타내는 방법을 고안하였는데, 이것을 루이스 전자점식이라고 한다. 분자의 루이스 전자점식은 먼저 분자 내의 각 원자의 원자가 전자 수를 더하여 총 원자가 전자의 수를 구한 후, 모든 원자가 옥텟 규칙을 만족하도록 원자가 전자를 적절히 배치하여 구한다. 필요하면 다중 결합도 사용한다. 공유결합으로 형성된 분자들 중 대부분은 옥텟 규칙을 만족하지만 예외적으로 옥텟 규칙을 만족하지 않으면서도 안정하게 존재하는 것들도 있다.

(나) 공유 결합 분자에서 중심 원자를 둘러싸고 있는 전자쌍들은 서로 같은 전하를 띠고 있으므로 반발력을 최소화하기 위해 가능한 멀리 떨어지려고 한다. 따라서 중심 원자가 갖는 전자쌍의 수에 의해 중심 원자의 전자쌍의 공간적 배치가 결정되며 그 결과 분자의 모양이 결정된다. 이것을 전자쌍 반발 이론이라고 하며 영국의 화학자 시지윅이 제안하였다. 예를 들어 중심 원자가 전자쌍을 두 개 가지면 이 두 전자쌍은 서로 180°로 배열되어 직선형 구조를 이룬다. 전자쌍이 3개이면 평면에서 서로 120°로 배치되어 평면삼각형 구조를 이루고, 전자쌍이 4개이면 중심원자를 기준으로 109.5°의 결합각을 이루는 정사면체 구조를 가지게 된다.

중심 원자가 갖는 전자쌍의 종류에 따라 분자의 실제 모양은 기본적인 기하학적 구조와 약간 달라진다. 즉, 비공유 전자쌍은 공유 전자쌍 보다 더 넓은 공간을 차지하므로 비공유 전자쌍-공유 전자쌍 간의 반발은 공유 전자쌍-공유 전자쌍 간의 반발보다 크며, 이중 결합 또는 삼중 결합도 단일 결합의 전자쌍보다 더 큰 반발력을 나타낸다. 따라서 중심 원자가 이러한 전자쌍을 가지고 있으면 기본적인 기하학적 구조와 약간 다른 구조를 가지게 된다. 예를 들어 중심 원자인 질소가 4쌍의 전자쌍을 갖는 암모니아(NH_3)의 경우 질소 원자가 한 쌍의 비공유 전자쌍을 가지고 있어 H－N－H 결합각이 정사면체 구조에서 예상되는 109.5°보다 조금 작은 107°를 나타낸다.

(다) 화학적 변화인 화학 반응은 화학 반응식으로 나타낸다. 화학 반응식은 반응하는 물질과 생성되는 물질을 알려 주는 동시에 반응하는 물질들 간의 양적인 관계를 말해준다. 예를 들어 질소와 수소가 반응하여 암모니아를 생성하는 반응은 다음과 같다.

$$N_2 + 3H_2 \rightarrow 2NH_3$$

이 반응식은 질소와 수소가 반응하여 암모니아를 생성할 때 반응하는 N_2와 H_2 및 NH_3의 분자 수 또는 몰수의 비가 각각 1 : 3 : 2임을 말하고 있다. 반응하는 물질과 생성되는 물질 사이의 이러한 양적인 관계를 이용하여 반응에 필요한 물질의 양이나 생성될 생성물의 양을 예측할 수 있다. 여기서 한 가지 주의할 점은 반응물과 생성물 간의 양적인 관계는 반드시 양론 계수가 맞추어진 '완결된 화학 반응식'에 대해서만 성립한다는 것이다.

논술고사 (수학과학우수자)

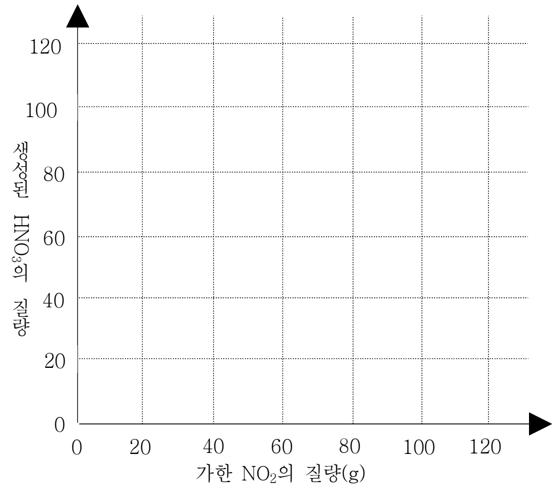
(※) 산성비의 원인이 되는 주요 성분 중 하나인 이산화질소(NO_2)는 물(H_2O)과 반응하여 질산(HNO_3)과 아질산(HNO_2)을 생성한다. 이 반응에 대하여 아래 물음에 답하시오. 참고로 N과 O 원자의 바닥 상태 전자배치는 다음과 같다.

$$N : 1s^2 2s^2 2p^3 \qquad O : 1s^2 2s^2 2p^4$$

[문제 1] 위 반응의 반응물과 생성물 중 원자가 전자의 총수가 홀수인 분자를 찾아 쓰고, 이 분자의 루이스 전자점식이 옥텟 규칙을 만족하지 않음을 보이시오. (4점)

[문제 2] 위 반응의 생성물인 아질산(HNO_2) 분자 내의 결합각 중 가장 작은 결합각을 찾아 쓰고 설명하시오. 단, 수소 원자는 산소 원자에 결합되어 있고, 결합각은 $\angle X-Y-Z$ (여기서 X, Y, Z 는 임의의 원소 기호) 형태로 표시하시오. (6점)

[문제 3] 물 18 g 에 이산화질소(NO_2)를 조금씩 가하면서 생성되는 질산(HNO_3)의 양을 측정하는 실험을 하고 있다. 가한 이산화질소(NO_2)의 질량이 0 g 에서 120 g 이 될 때까지 생성된 질산(HNO_3)의 질량 변화를 그래프로 나타내고 설명하시오. 그래프는 아래 제시한 도식을 참고하여 답안지에 그리시오. (단, H, N, O의 원자량은 각각 1, 14, 16 이고, 반응은 즉시 일어나며 부반응은 없다고 가정한다.) (10점)



논술고사 (수학과학우수자)

생명과학 선택 : 20점

※ 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

(가) 두 개 이상의 유전자에 의해 표현형이 결정될 때, 한 유전자의 발현이 다른 유전자의 표현형에 영향을 주는 현상을 상위(Epistasis)라고 한다. 예를 들어, 리트리버 종의 개에서 털의 색은 B와 E 유전자에 의해 결정된다. 검은색 털(B)은 갈색 털(b)에 대해 우성이며, 리트리버가 갈색 털을 가지기 위해서는 유전자형이 bb이어야 한다. 털의 색을 결정하는 또 다른 유전자인 E는 B와 연관되어 있지 않으며, 우성 동형(EE)이나 이형접합(Ee)일 경우에는 털의 색에 영향을 주지 못하지만 열성 동형(ee)을 갖는 리트리버는 검은색 (B)/갈색 (b) 유전자형과 관계없이 노란색의 털을 가지게 된다. (그림 1)

(나) 일반적으로 ABO식 혈액형은 I^A, I^B, i의 세 가지 대립 유전자에 의해 결정된다. 이 대립 유전자에 대해 어떤 사람이 가질 수 있는 유전자형은 I^AI^A, I^Ai, I^BI^B, I^Bi, I^AI^B, ii의 6가지 중 하나이며, 이 때 I^A와 I^B는 모두 i에 대해 우성으로 작용한다. 이 세 가지 대립 유전자는 적혈구 표면에서 H라는 기질에 결합된 응집원(항원)의 종류를 결정한다. I^A를 가지는 사람은 적혈구 표면의 H 기질에 응집원 A를 결합할 수 있고, I^B를 가지는 사람은 H 기질에 응집원 B를 결합할 수 있다. 그러나 i 만을 가지는 사람은 응집원 A (A 항원)와 응집원 B (B 항원) 어느 것도 H 기질에 결합하지 못한다. 한편, 기질 H는 I 유전자와 연관되어 있지 않은 H 유전자에 의해 만들어지며, 열성 동형접합(hh)인 사람은 기질 H를 만들지 못한다. 따라서 열성 동형접합(hh)인 사람은 I 대립 유전자와 무관하게 O형의 표현형을 나타낸다. (그림 2)

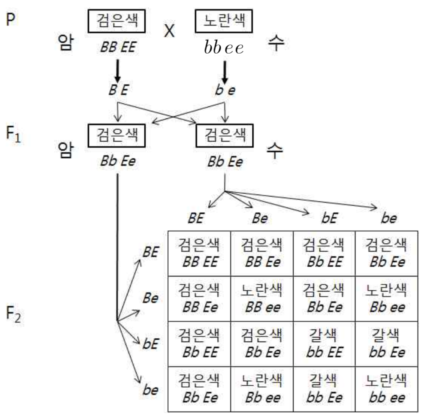


그림 1

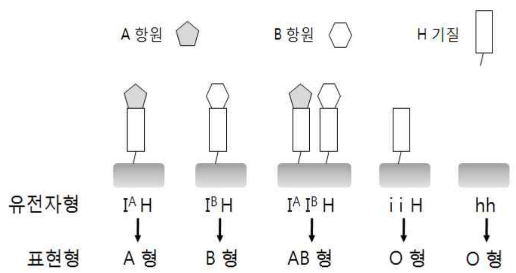


그림 2

논술고사 (수학과학우수자)

[문제 1] 남미가 원산지인 어떤 호박의 색은 2 종류의 유전자 A와 B에 의해 결정된다. 유전자 A는 호박의 노란색을 결정하고, 열성 대립유전자인 a는 녹색을 결정한다. 유전자 B는 호박의 흰색을 결정하는데, 우성동형(BB) 또는 이형접합(Bb)인 호박은 A 유전자와 상관없이 항상 흰색을 나타내지만 대립 유전자인 b가 열성동형(bb)인 호박의 색은 A 유전자에 의해서만 결정된다. 따라서 유전자형이 AABB인 흰색 호박과 aabb인 녹색 호박을 교배하면 다음 세대에서 AaBb의 유전자형을 가지는 흰색의 호박만을 얻을 수 있다. 제시문 (가)를 이용하여 유전자형이 AaBb인 호박끼리 교배했을 때, 다음 세대의 호박에서 나타나는 색의 상대적인 비를 구하시오. (단, A와 B 유전자는 연관되어 있지 않다.) (10점)

[문제 2] 인도 뭄베이에 거주하는 어느 가족의 혈액형을 조사한 결과, 부모가 모두 O형임에도 불구하고, 그 자녀가 A형인 것으로 나타났다. 제시문 (나)를 이용하여 이 결과를 설명하시오. (10점)

<연 습 장>

<연 습 장>

<연 습 장>

<연 습 장>

2015학년도 수시 모집 수학과학우수자 논술고사 출제 의도 및 해설

[수학] (60점)

[문제 1] (30점)

1. 출제의도

회전변환에 의해 주어진 원은 중심이 회전변환만큼 이동하고 반지름이 같은 원으로 변환된다는 사실을 파악할 수 있는지, 원에서 주어진 기울기를 갖고 접하는 직선의 식을 구할 수 있는지, 삼각함수의 정의를 알고 활용할 수 있는지, 삼각함수의 극한을 이용하여 도형으로부터 식을 도출하고 식의 극한을 찾아낼 수 있는지를 평가한다.

2. 주제 분석과 제시문 해설

(가) 주제 분석

원 $(x-1)^2+y^2=1$과 기울기가 $m\ (m<0)$인 직선 l([그림 1] 참고)이 제1사분면에서 접하고 있다. 이 원을 원점을 중심으로 θ만큼 회전시킨 원이 직선 l과 두 점 A, B에서 만나는 상황에서([그림 2] 참고) 선분 AB와 호 $\widehat{AB}$로 둘러싸인 영역의 넓이 S_θ와 선분 AB의 길이 $f(\theta)$를 가지고 접선의 식, 삼각함수의 정의, 삼각함수의 극한 정리, 극한값을 다루는 내용이다.

(나) 제시문 해설

제시문 (가)는 좌표평면에서 한 점과 그 점을 지나지 않는 직선 사이의 거리 공식을 제공하였다.

제시문 (나)는 삼각함수의 미분법에서 기본이 되는 삼각함수의 극한 정리를 제공하였다.

(다) 제시문 출처

제시문 (가) :『수학』교과서, (주)지학사, 158쪽~159쪽
제시문 (나) :『수학II』교과서, (주)금성출판사, 86쪽

3. 논제 해설

(1-1)은 제1사분면에서 원 $(x-1)^2+y^2=1$에 접하고 기울기 $m\ (m<0)$을 갖는 직선 l([그림 1] 참고)의 y절편을 구하는 것이다. 제시문 (가)에 주어진 거리 공식을 이용하거나 혹은 원 $x^2+y^2=1$에 접하는 접선을 x축으로 1만큼 평행 이동시켜 구할 수 있다.

(1-2)와 (1-3)은 원 $(x-1)^2+y^2=1$ 을 원점을 중심으로 θ 만큼 회전시킨 원이 기울기가 m 인 직선 l 과 두 점 A, B 에서 만나는 상황에서([그림 2] 참고), (1-2)는 선분 AB 와 호 $\widehat{AB}$ 로 둘러싸인 영역의 넓이 S_θ 가 θ 가 변함에 따라 S_θ 가 최대일 때의 각을 $\theta=\alpha$ 라 할 때 $\tan\alpha$ 의 값을 구하는 것이다. 기하적인 분석을 하여 삼각함수의 정의를 활용하거나 제시문 (가)에 주어진 거리 공식과 미분을 이용하여 구할 수 있다. (1-3)은 선분 AB 의 길이를 $f(\theta)$ 라 할 때 극한 $\lim_{\theta\to+0}\frac{\{f(\theta)\}^2}{\theta}$ 의 값을 구하는 것이다. 제시문 (나)에 주어진 삼각함수의 극한 정리를 적용하는 계산 능력이 요구되는 문제이다.

4. 평가 기준

- 회전변환에 의해 주어진 원은 중심이 회전변환만큼 이동하고 반지름이 같은 원으로 변환된다는 사실을 파악하는 능력
- 삼각함수의 정의를 알고 활용할 수 있는 능력
- 삼각함수의 극한을 이용하여 도형으로부터 식을 도출하고 식의 극한을 찾아낼 수 있는 능력
- 주어진 제시문을 정확하게 이해하고 이를 바탕으로 각 논제에서 요구하는 문제를 파악하는 능력
- 논제에서 요구하는 사항을 정확히 이해하고 기존 지식과 제시문의 내용을 바탕으로 논제의 답을 논리적으로 서술하는 능력

5. 예시 답안

(1-1) (5점) 직선 l 의 y 절편을 k 라 하면, 원과 직선 l : $mx-y+k=0$ 이 접하므로 원의 중심 $(1,0)$ 에서 직선 l 사이의 거리가 반지름 1과 같다. 즉 $\frac{|m+k|}{\sqrt{m^2+1}}=1$ 이다. 이로부터 $k=-m\pm\sqrt{m^2+1}$ 을 얻는데, $k>0$ 이므로 직선 l 의 y 절편은 $-m+\sqrt{m^2+1}$ 이다.

(별해) 원 $x^2+y^2=1$ 에 접하고 기울기가 m 인 접선의 식은 $y=mx\pm\sqrt{m^2+1}$ 이다. 이를 x 축으로 1 만큼 평행 이동시키면 [그림 1]에 주어진 직선 l 은

$$y=m(x-1)+\sqrt{m^2+1}$$

이다($\because$ y 절편이 양수이므로). 따라서 직선 l 의 y 절편은 $-m+\sqrt{m^2+1}$ 이다.

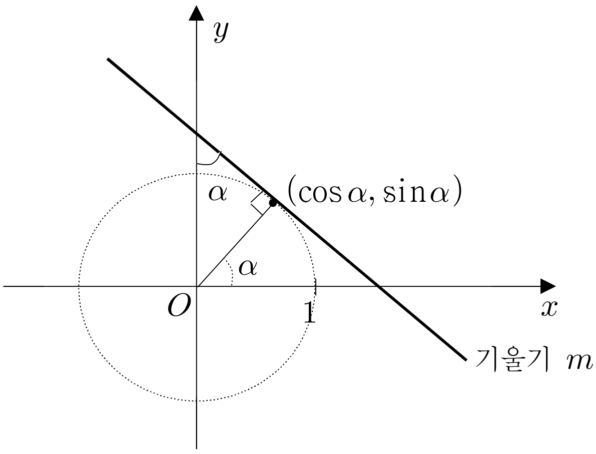
(별해) 직선 l 의 y 절편을 k 라 하면, $y=mx+k$ 를 원 $(x-1)^2+y^2=1$ 에 대입하여 정리하

면 $(1+m^2)x^2+2(mk-1)x+k^2=0$을 얻는다. 판별식

$$D/4=(mk-1)^2-k^2(1+m^2)=-k^2-2mk+1=0$$

으로부터 $k=-m\pm\sqrt{m^2+1}$이고 $k>0$이므로 직선 l의 y절편은 $-m+\sqrt{m^2+1}$이다.

(1-2) (10점) 넓이 S_θ는 선분 AB가 원 O_θ의 중심에 가까워질수록 커진다. 원 O_θ의 중심 $(\cos\theta, \sin\theta)$는 원 $x^2+y^2=1$ 위를 움직인다. 이 점이 선분 AB와 가장 가까울 때는 이 점에서 원 $x^2+y^2=1$의 접선의 기울기가 m일 때이다. 넓이 S_θ가 최대일 때의 θ를 α라 하면, 아래 그림으로부터 $\tan\alpha=-\dfrac{1}{m}$이다.



(별해) 넓이 S_θ가 최대가 될 필요충분조건은 원 O_θ의 중심 $(\cos\theta, \sin\theta)$과 직선 $l: mx-y-m+\sqrt{m^2+1}=0$ 사이의 거리가 최소일 때이다. 그 거리를 $h(\theta)$라 하면

$$h(\theta)=\frac{\left|m\cos\theta-\sin\theta-m+\sqrt{m^2+1}\right|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{m\cos\theta-\sin\theta-m+\sqrt{m^2+1}}{\sqrt{m^2+1}}$$

이다($\because$ $m\cos\theta-\sin\theta-m+\sqrt{m^2+1}$
$=\sqrt{m^2+1}\cos(\theta+\beta)-m+\sqrt{m^2+1}\geq -m>0$).

$h(\theta)$의 최솟값은 임계점에서 존재하므로 $\dfrac{d}{d\theta}h(\theta)=\dfrac{-m\sin\theta-\cos\theta}{\sqrt{m^2+1}}=0$에서

$\cos\theta=-m\sin\theta$이므로 $\tan\theta=-\dfrac{1}{m}$인 θ에서 넓이 S_θ는 최댓값을 갖는다. 따라서

$\tan\alpha=-\dfrac{1}{m}$이다.

(1-3) (15점) 원 O_θ의 중심 $(\cos\theta, \sin\theta)$과 직선 $l\ : mx-y+k=0$ 사이의 거리는 $\theta>0$ 일 때 문제 (1-1)의 풀이에 의해 $\dfrac{|\,m\cos\theta-\sin\theta+k\,|}{\sqrt{m^2+1}}$ (여기서 $k\ =\ -m+\sqrt{m^2+1}$) 이다. 따라서

$$\left\{\frac{1}{2}f(\theta)\right\}^2 = 1-\frac{(m\cos\theta-\sin\theta+k)^2}{m^2+1}$$
$$= \frac{(m^2-1)\sin^2\theta+2km(1-\cos\theta)+2m\sin\theta\cos\theta+2k\sin\theta}{m^2+1}$$

이다. 제시문 (나)에 주어진 삼각함수의 극한 정리를 사용하면 다음을 얻는다.

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{\{f(\theta)\}^2}{\theta}$$
$$= \frac{4}{m^2+1}\lim_{\theta\to+0}\left(\frac{(m^2-1)\sin^2\theta+2km(1-\cos\theta)+2m\sin\theta\cos\theta+2k\sin\theta}{\theta}\right)$$
$$= \frac{4}{m^2+1}(2m+2k) = \frac{8}{\sqrt{m^2+1}} \quad (\because m+k=\sqrt{m^2+1})$$

[문제 2] (30점)

1. 출제의도

정적분의 성질을 충분히 이해하고 이를 실제 사례에 활용할 수 있는 능력, 극한의 성질(극한의 사칙연산, 연속성 등)을 사용하여 극한값을 정확하게 계산하는 능력을 평가하고자 하였다. 구체적으로는 학생들이 정적분의 값을 계산할 때 피적분함수의 부정적분을 이용하는 방법, 부분적분법을 능숙하게 사용할 수 있는지 평가하고자 하였다. 그리고 문제에서 요구하는 극한값을 계산하기 위해 제시문과 알려진 성질을 활용하는 능력을 측정하고자 하였다.

2. 주제 분석과 제시문 해설

(가) 주제 분석

평면에서 연속함수의 그래프와 x축으로 둘러싸인 영역을 x축에 수직인 방향으로 잘라서 얻어지는 작은 영역의 넓이가 모두 같을 때 소구간의 길이의 비를 추론하는 문제이다. 영역의 넓이는 정적분을 이용하여 구할 수 있지만, 일반적으로 영역이 단순한 형태가 아닌 경우에는 소구간의 길이를 구체적인 수식으로 나타내기 힘들다. 자르는 회수가 무한히 커질 때 ($n\to\infty$ 일 때) 소구간의 길이는 0으로 수렴하는데, [문제 2]에서는 정적분의 성질을 바탕으로 소구간의 길이를 $n^{-\alpha}$ $(\alpha>0)$과 비교할 것을 요구하였다.

(나) 제시문 해설

제시문 (가)는 정적분의 기본정리를 서술한다. 연속함수 $f(x)$의 정적분 값은 항상 $f(x)$의 부정적분을 통해 표현될 수 있는데, 이는 정적분의 기본정리에 근거하고 있다. 제시문 (가)는 정적분의 기본정리를 인용하고, 이로부터 얻을 수 있는 추가 정보를 미분계수의 정의를 이용하여 서술하고 있다.

제시문 (나)는 정적분의 기본 성질을 서술한다. 먼저 피적분함수의 차에 관련된 성질을 서술하고, 평면에서 영역의 넓이가 정적분으로 표현될 수 있다는 점을 이용하여 두 개의 피적분함수가 어떤 대소 관계를 만족할 때, 이들의 정적분 값도 같은 대소 관계를 만족함을 간단히 논증하였다.

(다) 제시문 출처

제시문 (가) :『적분과 통계』교과서, (주)두산동아, 48~50쪽,
『수학II』교과서, (주)금성출판사, 121쪽~121쪽,
제시문 (나) :『적분과 통계』교과서, (주)천재교육, 54쪽~55쪽

3. 논제 해설

조건 (a)와 (b)는 주어진 영역을 작은 영역으로 분할할 때 작은 영역의 넓이가 모두 같을 것을 요구하고 있다. 조건 (b)는 각각의 작은 영역의 넓이가 전체 영역의 넓이의 $1/n$과 같음을 서술하고 있다.

(2-1)은 전체 영역의 넓이를 정적분의 부분적분법을 이용하여 계산할 것을 요구하고 있다. 부분적분법과 지수함수의 부정적분을 잘 알고 있는지 평가하는 문제이다.

(2-2)는 소구간 $[x_{n-1}, x_n]$의 길이는 $n \to \infty$ 일 때 0으로 수렴하는데, 이 길이가 얼마나 작은 값인지 알아낼 것을 묻고 있다. 구체적으로는 길이를 $1/n$과 비교할 수 있도록 $n(x_n - x_{n-1})$의 극한값을 구할 것을 요구하고 있다. 이를 해결하기 위해 조건 (b)의 양변을 소구간의 길이 $x_n - x_{n-1}$로 나눈다. $n \to \infty$ 일 때 $x_{n-1} \to x_n = 2$임을 파악하여 제시문 (가)를 적용할 수 있는지 평가하는 문제이다.

(2-3)은 소구간의 길이는 끝점에서 주어진 함수의 값이 0인지 아닌지에 따라 크게 달라진다. $x=2$ 근처와 달리, $x=0$ 근처에서는 근사적으로 $f(x) \approx x$인데, 이것이 소구간 $[0, x_1]$의 길이에 끼치는 영향을 논리적으로 알아낼 것을 요구하고 있다. 이를 위해 힌트를 이용하여

$0 \le x \le x_1$ 일 때 $x \le f(x) \le e^{x_1}x$ 임을 알아내고, 이 부등식과 제시문 (나) 및 조건 (b)를 이용할 수 있는지 평가하는 문제이다.

4. 평가 기준

- 부분적분을 이용하고 정확하게 계산하는 능력
- 제시문에서 주어진 정적분의 성질을 적재적소에 활용하는 능력
- 극한의 성질을 이용하여 극한값을 정확하게 계산하는 능력

5. 예시 답안

(2-1) (5점) $\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 x e^x\,dx = \left[xe^x\right]_0^2 - \int_0^2 e^x\,dx = 2e^2 - \left[e^x\right]_0^2 = e^2+1$

(2-2) (10점) 조건 (b)와 문제 (2-1)에 의해

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx = \frac{1}{n}\int_0^2 f(x)\,dx = \frac{1}{n}(e^2+1)$$

이므로

$$\frac{e^2+1}{n(x_n-x_{n-1})} = \frac{1}{x_n-x_{n-1}}\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx = \frac{1}{x_{n-1}-2}\int_2^{x_{n-1}} f(x)\,dx.$$

이다. 그런데 $n\to\infty$ 일 때 $x_{n-1}\to 2$ 이므로 제시문 (가)에 의해

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{e^2+1}{n(x_n-x_{n-1})} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_{n-1}-2}\int_2^{x_{n-1}} f(x)\,dx \\ &= \lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\int_2^x f(t)\,dt = f(2)\end{aligned}$$

이다. 그러므로

$$\lim_{n\to\infty} n(x_n-x_{n-1}) = \frac{e^2+1}{f(2)} = \frac{e^2+1}{2e^2}$$

(2-3) (15점) $0 \le x \le x_1$ 일 때 $1 \le e^x \le e^{x_1}$ 이므로 $x \le f(x) \le e^{x_1}x$ 이다. 제시문 (나)에 의해

$$\frac{x_1^2}{2} = \int_0^{x_1} x\,dx \le \int_0^{x_1} f(x)\,dx \le \int_0^{x_1} e^{x_1}x\,dx = \frac{x_1^2}{2}e^{x_1}$$

이다. 조건 (b)와 문제 (2-1)에 의해 $\frac{x_1^2}{2} \le \frac{e^2+1}{n} \le \frac{x_1^2}{2}e^{x_1}$ 이고, 이를 다시 쓰면

$$\frac{2(e^2+1)}{e^{x_1}} \le n\,x_1^2 \le 2(e^2+1)$$

이다. 그런데 $n \to \infty$ 이면 $x_1 \to 0$ 이고 e^x 는 연속이므로 $\lim_{n\to\infty} e^{x_1} = 1$ 이다. 그러므로 $\lim_{n\to\infty} n x_1^2 = 2(e^2+1)$ 이고, $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\,(x_1 - x_0) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\,x_1 = \sqrt{2(e^2+1)}$ 이다.

한편,

$$\frac{n^{\alpha}(x_n - x_{n-1})}{x_1 - x_0} = \frac{n\,(x_n - x_{n-1})}{\sqrt{n}\;x_1} \cdot n^{\alpha - \frac{1}{2}}$$

이므로, 문제 (2-2)에 의해 $\alpha = \frac{1}{2}$ 일 때 $\lim_{n\to\infty} \frac{n^{\alpha}(x_n - x_{n-1})}{x_1 - x_0}$ 의 값이 양의 실수이다.

따라서 극한값 L 은 $\frac{\sqrt{e^2+1}}{2\sqrt{2}\,e^2}$ 이다.

2015학년도 수시 모집 수학과학우수자 논술고사 출제 의도 및 해설

[물리] (20점)

1. 출제의도

고등학교『물리 I』교과서의 ‘물질과 전자기장’ 단원에서 다루고 있는 두 전하 사이에 작용하는 전기력과 수소 원자의 모델, 원자에서 빛의 흡수와 방출 에 대한 내용을 소재로 하여 문제를 출제하였다. 본 문제를 통해 제시문에서 설명한 내용들에 대한 이해를 바탕으로 융복합적인 물리학적 문제에 대한 해결 능력을 평가하고자 하였다. 제시문에서는 등속원운동을 하는 물체에 작용하는 구심력, 수소 원자에서 원자핵과 전자 사이에 작용하는 전기력, 보어의 원자 모형, 원자에서 빛의 흡수와 방출 등에 대한 내용과 표현식을 자세히 기술하였다. 이들 내용에 대한 융합적인 사고를 바탕으로 수소 원자에서 전자 상태의 전이에 의해 빛이 방출되는 상황에서 방출되는 빛의 파장, 전자의 주기와 궤도 반지름 등의 문제를 해결할 수 있는 능력을 평가할 목적으로 출제하였다.

2. 주제 분석과 제시문 해설

(가) 주제 분석

수소 원자에서 전자가 원자핵 주위로 등속원운동을 하고 있는 상황에서 전자의 궤도 양자수가 3에서 2인 상태로 전이하면서 빛이 방출되는 상황을 설정하여, 방출되는 빛의 파장, 등속원운동하는 전자의 주기와 반지름의 관계, 전자가 전이하기 전과 후에 반지름의 차이를 구하는 문제를 주제로 하였다.

(나) 제시문 해설

제시문 (가)에서는 등속원운동을 하는 물체에 작용하는 구심력을 설명하고, 러더퍼드의 수소 원자 모델에서 원자핵의 주위를 전자가 회전할 때 두 전하 사이에서 작용하는 전기력이 구심력의 역할을 하게 됨을 설명하였다.

제시문 (나)에서는 보어의 수소 원자 모형을 구체적으로 설명하였다. 보어의 모델에 의해서 수소 원자에서 전자가 특정 궤도에서만 존재할 수 있음을 설명하고 이렇게 양자화된 궤도의 조건에 대한 표현식을 나타내었다.

제시문 (다)에서는 수소 원자에서 양자화된 전자의 에너지에 대한 표현식과 수소 원자에서 전자의 궤도가 전이할 때 흡수되거나 방출되는 빛의 에너지에 대한 표현식을 나타내었다. 제시문에는 구심력, 전기력, 보어의 양자화 조건, 전자의 양자화된 에너지, 빛의 에너지

등에 대한 표현식 등 문제 해결에 필요한 모든 관계식들을 나타냄으로써 다른 배경 지식 없이 제시문의 내용에 대한 충분한 이해만으로도 논제의 문제들을 모두 풀이할 수 있도록 하였다.

(다) 제시문 출처

고등학교『물리 1』교과서를 기초로 한 발췌 및 창작

3. 논제 해설

본 논제에서는 수소 원자에서 원자핵 주위를 원운동하고 있는 전자가 궤도 양자수 3인 상태에서 2인 상태로 전이를 할 때 빛이 방출되는 상황을 소재로 하였으며 3개의 문제로 구성되어 있다.

[문제 1]은 전자 궤도의 전이 과정에서 방출되는 빛의 파장을 구하는 문제이다.

[문제 2]는 전자의 주기와 반지름의 관계를 도출하여 주기의 제곱이 반지름의 세제곱에 비례하게 됨을 보이는 문제이다.

[문제 3]은 전자가 양자수 3인 상태에 있을 때의 궤도 반지름과 양자수 2인 상태에 있을 때의 궤도 반지름의 차이를 구하는 문제이다.

4. 평가 기준

- 전자의 양자화된 에너지와 방출되는 빛의 파장과의 관계를 논리적으로 추론할 수 있는 능력
- 원운동의 구심력과 전자-원자핵의 전기력, 원운동의 속력과 주기 등의 관계를 논리적으로 추론할 수 있는 능력
- 원운동의 구심력과 전자-원자핵의 전기력에 보어의 양자화 조건을 적용할 수 있는 능력
- 각각의 문제 해결을 위한 수학적 모델과 방정식을 제대로 세울 수 있는 능력
- 방정식을 바르게 풀어서 정답을 도출할 수 있는 능력

5. 예시 답안

[문제 1] (6점) $n=3$인 상태의 에너지는 $E_3=-\dfrac{A}{3^2}=-\dfrac{A}{9}$이고, $n=2$인 상태의 에너지는 $E_2=-\dfrac{A}{2^2}=-\dfrac{A}{4}$이다. 따라서 이 때 방출되는 광자의 에너지는

$$E = |E_3 - E_2| = |-\frac{A}{9} - (-\frac{A}{4})| = \frac{5A}{36}$$

이다. 또한 $E_p = \frac{hc}{\lambda}$ 이므로 $\frac{hc}{\lambda} = \frac{5A}{36}$ 이 되어, 방출되는 빛의 파장은 $\lambda = \frac{36hc}{5A}$가 된다.

[문제 2] (6점) 제시문 (가)로부터 전자와 원자핵 사이의 전기력이 구심력 역할을 하게 되므로, $k\frac{e^2}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$ 이다. 이 식에 $v = \frac{2\pi r}{T}$를 대입하면,

$$k\frac{e^2}{r^2} = \frac{m}{r}(\frac{2\pi r}{T})^2 = \frac{4\pi^2 mr}{T^2}$$

이 된다. 위 식을 정리하면 $T^2 = \frac{4\pi^2 m}{ke^2}r^3$이 되므로, 주기의 제곱이 궤도 반지름의 세제곱에 비례하게 된다.

[문제 3] (8점) 보어의 양자화 조건, $2\pi r_n = \frac{nh}{mv}$ 에서 $v = \frac{nh}{2\pi r_n m}$ 이다. $k\frac{e^2}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$ 에 $v = \frac{nh}{2\pi r_n m}$ 를 대입하면, $k\frac{e^2}{r_n^2} = \frac{m}{r_n}(\frac{nh}{2\pi r_n m})^2 = \frac{n^2h^2}{4\pi^2 m r_n^3}$ 이 된다. 이를 정리하면,

$r_n = \frac{n^2h^2}{4\pi^2 mke^2}$ 이 된다. 따라서

$n = 2$ 인 상태의 궤도 반경은 $r_2 = \frac{2^2h^2}{4\pi^2 mke^2} = \frac{h^2}{\pi^2 mke^2}$ 이고,

$n = 3$ 인 상태의 궤도 반경은 $r_3 = \frac{3^2h^2}{4\pi^2 mke^2} = \frac{9h^2}{4\pi^2 mke^2}$ 이므로,

궤도 반경의 차이는 $r_3 - r_2 = \frac{9h^2}{4\pi^2 mke^2} - \frac{h^2}{\pi^2 mke^2} = \frac{5h^2}{4\pi^2 mke^2}$ 이다.

2015학년도 수시 모집 수학과학우수자 논술고사 출제 의도 및 해설

[화학] (20점)

1. 출제의도

고등학교『화학 1』교과서의 중요한 부분을 차지하는 화학 결합(공유 결합), 루이스 전자점식, 옥텟 규칙, 전자쌍 반발 이론에 의한 분자의 모양 예측, 화학 양론 등을 주요 소재로 삼아 관련된 내용을 논리적으로 추론하는 능력을 측정하려 하였다.

세부적인 내용을 살펴보면, 우선 원자의 전자배치로부터 원자가 전자의 수를 파악하여 분자내의 원자가 전자의 총수를 알아내며 이를 바탕으로 옥텟 규칙을 만족하는 루이스 전자점식을 쓰는 능력을 평가한다. 이어서 루이스의 전자점식에 전자쌍 반발 이론을 적용하여 분자의 결합각을 정성적으로 예측하는 능력을 평가한다. 또한 주어진 반응물과 생성물의 화학식으로부터 화학 반응식의 균형을 맞추고 이에 근거하여 주어진 반응물에서 생성될 생성물의 양을 예측하는 능력을 평가하려 하였다.

아울러 제시된 문제에 대한 답을 논리적으로 찾아가는 능력과 명확하게 답안을 정리, 작성하는 능력도 함께 보고자 하였다.

2. 주제 분석과 제시문 해설

(가) 주제 분석

공유결합을 설명하는 루이스 전자점식 및 옥텟 규칙과 분자의 모양을 예측하는 전자쌍 반발 이론, 반응물과 생성물의 양적인 관계를 추론하는 화학 양론을 주제로 삼았다.

(나) 제시문 해설

제시문 (가)에서는 루이스의 전자쌍 공유 개념에 의한 공유 결합 형성의 근간인 옥텟 규칙을 소개하고, 분자 내 각 원자들의 원자가 전자를 이용하여 옥텟 규칙을 만족하는 루이스 전자점식을 그리는 방법을 제시하였다.

제시문 (나)에서는 분자의 정성적인 모양을 예측하는 '전자쌍 반발 이론'을 설명하였다. 중심 원자가 갖는 전자쌍의 수에 따른 기본 구조와 다중 결합 또는 비공유 전자쌍이 있는 경우에 나타나는 결합각의 변화를 자세히 설명하였다.

제시문 (다)에서는 균형 반응식에 담겨 있는 과학적 의미를 설명하였다. 즉, 화학식으로부터

반응물과 생성물을 알 수 있으며 동시에 반응하는 물질과 생성되는 물질 간의 양적인 관계를 파악할 수 있음을 기술하여 문제 풀이에 이용할 수 있도록 하였다.

(다) 제시문 출처

제시문은 여러 고등학교『화학 1』교과서의 내용을 거의 그대로 옮겨 왔으며, 약간의 수정과 부가적 설명을 추가하였다. 다음은 관련 내용이 실려 있는 교과서들이다.

제시문 (가) : 고등학교『화학 1』교과서, 교학사 158-163쪽, 천재교육 141-143쪽
제시문 (나) : 고등학교『화학 1』교과서, 교학사 176-180쪽, 천재교육 151-154쪽
제시문 (다) : 고등학교『화학1』교과서, 교학사 32-41쪽, 천재교육 41-49쪽

3. 논제 해설

[문제 1]은 문제에 제시된 전자 배치를 참고하여 각 원자의 원자가 전자의 수를 알아내어 분자들의 원자가 전자의 총수를 구하여 이를 바탕으로 원자가 전자의 수가 홀수인 분자를 찾고 원자가 전자가 홀수이면 옥텟 규칙을 만족하지 않음을 보이는 문제이다.

[문제 2]는 생성물 중 하나인 아질산(HNO_2) 분자에 들어 있는 두 결합각의 상대적 크기를 예측하는 문제이다. 먼저 [문제 1]에서 구한 아질산 분자의 원자가 전자의 수를 이용하여 해당 분자의 루이스 전자점식을 그리고 이어서 제시문(나)에 소개한 전자쌍 반발 이론을 적용하여 각 결합각의 크기를 추론한다.

[문제 3]는 문제에 제시된 화학 반응의 계수를 맞추어 완결된 화학 반응식을 구하고 이를 바탕으로 반응하는 물질의 양에 따른 생성물의 양을 추론하는 문제이다. 반응물과 생성물의 상대적 양에 따라 생성물의 양이 어떻게 달라지는 지는 예측하고 각 분자의 분자량을 이용하여 생성물의 양을 구하고 그 결과를 그래프로 명확히 나타내는 문제이다.

4. 평가 기준

- 원자의 전자 배치 및 원자가 전자의 수, 루이스의 전자쌍 공유 개념에 근거한 공유 결합의 개념에 대한 이해도
- 옥텟 규칙을 활용하여 루이스 전자점식을 얻는 능력
- 전자쌍 반발 이론에 대한 이해 및 이를 활용하여 분자의 모양 및 결합각의 예측하는 능력
- 균형 화학 반응식에 담긴 과학적 의미에 대한 이해도 및 활용 능력
- 제시된 정보에서 출발하여 논리적 방법으로 답을 추론하고 그 과정을 명확히 기술하는

능력

5. 예시 답안

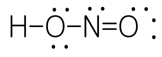
[문제 1] (4점) H, N, O 원자의 원자가 전자 수는 각각 1개, 5개, 6개이다. 각 분자의 분자식으로부터 각 분자의 원자가 전자의 총수를 구하면

$$NO_2\text{-17개},\ H_2O\text{-8개},\ HNO_3\text{-24개},\ HNO_2\text{-18개}$$

이다. 따라서 답은 NO_2이다.

NO_2의 루이스 전자점식을 아래와 같이 어떻게 그리더라도 N이나 O원자에 홀전자가 남게 되어 옥텟 규칙을 만족시키지 못함을 알 수 있다.

[문제 2] (6점) HNO_2의 원자가 전자의 수는 18개이며 루이스 전자점식은 아래와 같다. 이 식에 전자쌍 반발 이론을 적용하여 결합각을 예측한다.



a. $\angle H-O-N$: 중심 원자 O가 전자쌍을 4개 가지므로 기본 구조는 정사면체이다. 그런데 그 중 비공유 전자쌍이 2개가 있으므로 결합 전자쌍에 반발력을 나타내어 결합각은 109.5° 보다 조금 작을 것이다.

b. $\angle O-N-O$: 중심 원자 N이 전자쌍을 3개 가지므로 기본 구조는 정삼각형이다. 그런데 그 중 하나가 이중결합이므로 단일 결합의 결합 전자쌍보다 더 큰 반발력을 나타낼 것이므로 $\angle O-N-O$는 120°보다 조금 작을 것이다.

따라서 답은 $\angle H-O-N$이다.

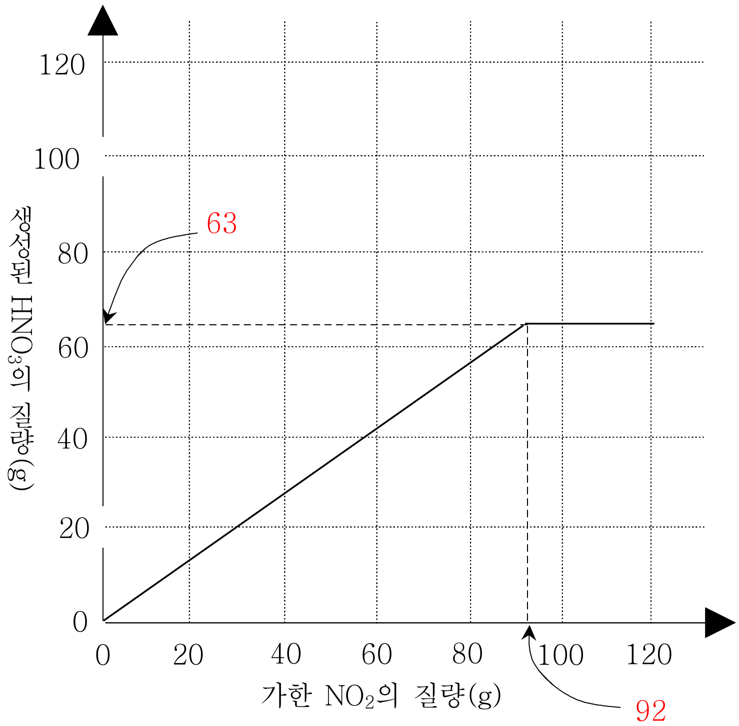
[문제 3] (10점) 먼저 완결(균형) 반응식을 쓰고 주어진 원자량을 사용하여 각 분자의 분자량을 구한다.

$$2NO_2 + H_2O \rightarrow HNO_3 + HNO_2$$

분자량: NO_2 - 46 g/mol; H_2O - 18 g/mol; HNO_3 - 63 g/mol

위 반응식에 의하면 NO_2와 H_2O는 몰수비로 2 : 1로 반응한다. 따라서 H_2O 18g과 완전히

반응하는 NO_2는 2몰, 즉 92g이며, 이때 생성되는 질산의 질량은 63g이다. 그러므로 가한 NO_2의 양이 92g보다 적을 때에는 생성된 HNO_3의 양은 가한 NO_2의 양에 비례한다. 92g에서 120g 사이에서는 HNO_3의 양이 H_2O의 양에 의해 결정되므로 63g으로 일정하게 유지된다. 이에 근거하여 그래프를 그리면 아래와 같다.



2015학년도 수시 모집 수학과학우수자 논술고사 출제 의도 및 해설

[생명과학] (20점)

1. 출제의도

멘델의 유전 법칙은 유전 현상을 이해하는 데 있어 가장 기본적인 내용이라고 할 수 있다. 완두콩을 이용한 멘델의 실험은 우성과 열성의 개념, 유전자의 분리 (분리의 법칙), 그리고 두 개 이상의 유전자의 독립적인 유전(독립의 법칙) 현상을 이해하는 데 기본적인 개념을 제시하였다. 그러나 다양한 유전 현상 중에서는 멘델의 법칙을 따르지 않는 사례가 많이 존재한다. 생명과학 I 교과 과정에서 배우는 중간 유전 (우열의 법칙), 두 개 이상의 유전자가 하나의 염색체에 존재하는 경우 (연관) 등이 그 예라 할 수 있다. 2015년 생명과학 논술 문제에서는 '상위' 라는 새로운 개념을 제시문을 통해 이해할 수 있는지, 그리고 이러한 개념을 실제 유전 현상에 적용시킬 수 있는 지를 묻고자 하였다.

2. 주제 분석과 제시문 해설

(가) 주제 분석

생명과학 I 에서는 멘델의 유전 법칙(우열의 법칙, 분리의 법칙, 그리고 독립의 법칙)을 소개함과 동시에 이를 따르지 않는 다양한 예를 소개하고 있다. 대립 유전자의 우열이 확실하지 않은 '중간 유전' 이 그 대표적인 예라고 할 수 있다. 본 문제는 두 개 이상의 유전자가 독립적이 아닌 상호작용을 통해 표현형을 결정하는 경우를 제시문에서 설명한 후, 이것을 이해하고 다른 사례에 적용시킬 수 있는 지를 평가하고자 하였다.

(나) 제시문 해설

제시문 (가)에서는 '상위 (epistasis)'라는 개념을 소개하고 있다. 상위란 두 개 이상의 유전자에 의해 표현형이 결정될 때, 한 유전자의 발현이 다른 유전자의 표현형에 영향을 주는 상황을 일컫는다. 개념 자체는 생소할 수 있지만, 리트리버 종의 개의 털 색 유전을 예를 들어 '상위' 를 설명하고 있어 큰 어려움 없이 이해할 수 있을 것이라고 생각한다.

제시문 (나)에서는 생명과학 I에서 다루고 있는 세 개의 대립유전자 (I^A, I^B, i) 에 의해 ABO식 혈액형이 결정되는 과정을 그림과 함께 설명하고 있다. 이에 더하여 교과서에서 간단히 언급하고 있는 H 기질 역시 유전자에 의해서 결정된다는 내용을 제시하고 H 기질의 표현형에 따라 ABO식 혈액형 유전자(I 유전자)의 표현형이 달라 질 수 있다는 내용을 설명하였다. 제시문 (나)의 경우, 생명과학 I 과정에서 중요하게 다루어지는 내용이기 때문에 학생들에게 익숙할 것이라고 판단하며, H 기질을 결정하는 H 유전자에 대한 내용은 교과서

에서 자세히 소개되어 있지는 않지만 큰 어려움 없이 이해할 수 있을 것이라고 생각한다.

(다) 제시문 출처

제시문 (가) : 생명과학 (by Campbell) 교재 참조

제시문 (나) : 생명과학 I (교학사)에 소개된 ABO식 혈액형의 유전 내용을 참조하였으며, H 기질의 유전자에 대한 내용은 생명과학 교재 참조

3. 논제 해설

[문제 1]은 A 와 B 두 유전자에 의해 호박의 색이 결정되는 경우를 제시하였다. 노란색을 결정하는 A 유전자는 녹색을 결정하는 a 대립 유전자에 대해 우성이므로 AA 또는 Aa일 경우에는 노란색을 나타내고 aa일 경우에는 녹색을 나타낼 것이다. B 유전자는 BB 또는 Bb일 경우에는 A 유전자와 무관하게 흰색을 나타낸다고 하였다. 예를 들어 AABB, AABb, aaBB 모두 흰색을 나타낸다. 문제에서는 유전자형이 AaBb인 흰색 호박끼리 교배했을 때 다음 세대에서 나타나는 호박색의 비를 구할 수 있는 지를 묻고 있다. 따라서 교과과정에서 배운 퍼넷 사각형을 이용하여 다음 세대에서 나올 수 있는 유전자 형을 구한 후, A와 B 유전자형에 따른 표현형을 결정하여 그 비를 구하는 문제이다.

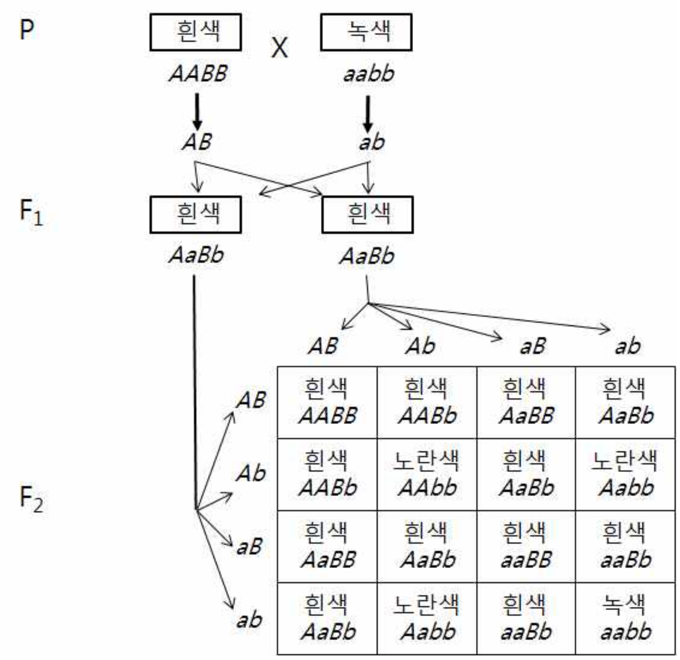
[문제 2]는 ABO 식 혈액형의 결정은 익숙한 내용이지만 H 기질 유전자인 H에 의해서 ABO식 혈액형이 영향을 받을 수 있다는 내용이 제시문에 있으므로 이것을 이용하는 문제이다. 부모가 모두 O 형인 경우 H 기질을 고려하지 않을 경우에는 부모 모두 ii 유전자형을 가져야 하고 자녀도 ii 유전자형만이 가능하기 때문에 항상 O형이어야 한다. 그러나 H 유전자를 고려할 경우 A형을 나타낸는 I^A 유전자를 가지고 있더라도 H 기질 유전자가 열성 동형(hh)일 경우에는 응집원 A가 결합하지 못하기 때문에 표현형은 O형이 된다. 이 내용을 이해하고 적용할 수 있는 지를 묻는 문제이다.

4. 평가 기준

- 멘델의 유전 법칙을 이해하고 있는가?
- 두 쌍의 대립 형질이 유전될 때 잡종 2대의 유전자형을 구할 수 있는가?
- 새로운 개념을 이해하고 적용할 수 있는가?

5. 예시 답안

[문제1] (10점) 문제에서 제시하고 있는 A B 유전자의 잡종 1대와 잡종 2대의 유전자형은 아래 그림과 같다.



그림에서 잡종 2대에서는 흰색 : 노란색 : 녹색이 12 : 3 : 1의 비율로 나타난다

[문제2] (10점) 1. 자녀에게서 A 형이 나타났다고 했으므로 I^A 유전자와 H 유전자를 갖고 있어야 한다.

2. 부모 모두 O형이라고 했으므로 부모의 유전자형은 iiHH, iiHh, I^AI^Ahh, I^AI^Bhh, I^BI^Bhh 중 하나이어야 한다.

3. 1의 조건을 만족시키는 경우는 부모 중 한 쪽의 유전자형은 iiHH 또는 iiHh이고 다른 한 쪽의 유전자형은 I^AI^Ahh 또는 I^AI^Bhh 이어야 한다.

4. 3의 조건을 충족시키는 O 형 부모에게서 A형 자녀가 태어날 수 있다.

예) 아버지는 유전자형이 iiHH 인 O 형이고 어머니는 유전자형이 I^AI^Ahh 인 O 형일 경우에 자녀의 유전자형은 I^AiHh이다. 이 자녀는 H 기질을 만들 수 있고, 또 I^A 유전자가 존재하므로 응집원 A를 결합할 수 있기 때문에 A형을 나타낸다.