2015학년도 수시모집

논술고사 문제지 (오전)

(자연계열) : 120분

모집단위		전형유형	논술우수자(일반)
수험번호		성 명	

■ 일반 유의사항

1. 시험시간은 120분, 배점은 100점 만점입니다.
2. 각 문항의 답안은 반드시 해당 답란에 작성하시오.
3. 답안을 구상할 때 문제지의 여백이나 또는 문제지 내의 연습장을 사용하시오.
4. 답안을 작성할 때 반드시 흑색 필기구만을 사용하시오(연필, 샤프 사용 가능, 사인펜 불가).
5. 답안을 정정할 때 두 줄을 긋고 정정하시오(수정액, 수정 테이프, 지우개 사용 가능).

※ 답안지는 절대 교체할 수 없습니다.

■ 답안 작성 유의사항

1. 제목은 쓰지 말고, 논제 번호를 명시한 후 답안을 작성하시오.
2. 제시된 분량을 지키시오.
3. 제시문의 문장을 그대로 옮기지 마시오.
4. 수험번호, 성명 등 신상에 관련된 사항을 답란이나 답안지의 여백에 드러내지 마시오.
5. 풀이의 과정을 순차적으로 서술하되, 필요한 경우에 수식 및 그림을 사용할 수 있으며, 수식은 반드시 문장 속에 포함 시키시오.

인하대학교
INHA UNIVERSITY

논술고사 (자연계열)

수학 : 100점

[문제 1] (25점) 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오.

양의 정수 n 과 $0 \le k \le n$ 인 정수 k 에 대하여, 이항계수 ${}_nC_k$ 는 n 개의 사물 중 k 개의 사물을 선택하는 조합의 수로 정의하며, 다음의 식으로 주어진다.

$$ {}_nC_k = \frac{n!}{(n-k)! \times k!} $$

(※) 양의 정수 n 에 대하여 $f(n) = {}_{2n}C_n = \frac{n+1}{1} \times \frac{n+2}{2} \times \cdots \times \frac{n+n}{n}$ 이라 하자.

(1-1) $f(n)$ 은 짝수임을 보이시오. (5점)

(1-2) $n = 2^k$ (k 는 양의 정수)이고 정수 b 가 $1 \le b \le n-1$ 을 만족할 때, $\frac{n+b}{b}$ 의 기약분수의 분모와 분자는 모두 홀수임을 보이고, 이를 이용하여 $f(2^k)$ 은 4의 배수가 아님을 보이시오. (10점)

(1-3) 정수 $n \ge 2$ 에 대하여 $\frac{f(n)}{f(n-1)}$ 을 n 의 식으로 나타내고, 이를 이용하여 $f(2^{15}-1)$ 이 2^m 의 배수가 되는 양의 정수 m 의 최댓값을 구하시오. (10점)

논술고사 (자연계열)

[문제 2] (25점) 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오.

> 함수 $f(x)$ 의 $x=a$ 에서의 미분계수 $f'(a)$ 는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 기울기를 나타낸다.

(※) 실수 전체에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 $f(x) = (x^2-3)^2$ 을 만족한다.

(2-1) 점 $\left(t, (t^2-3)^2\right)$ 에서 $f(x)$ 의 그래프에 접하는 직선이 점 $P(a,b)$ 를 지날 때, b 를 t 와 a 의 식으로 나타내시오. (5점)

(2-2) 점 $P(1,b)$ 를 지나고 $f(x)$ 의 그래프에 접하는 직선의 개수를 b 의 값의 범위에 따라 구하시오. (10점)

(2-3) $2 \le a \le 3$ 일 때, 점 $P(a,b)$ 를 지나고 $f(x)$ 의 그래프에 접하는 직선이 4개 존재하도록 하는 $P(a,b)$ 의 집합을 S 라 하자. S 의 넓이를 구하시오. (10점)

논술고사 (자연계열)

[문제 3] (25점) 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오.

(가) 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$ 와 $\vec{b}$ 가 이루는 각의 크기가 θ 일 때, $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ 를 $\vec{a}$ 와 $\vec{b}$ 의 내적이라고 하고 기호로 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 와 같이 나타낸다.

(나) 좌표공간에서 영벡터가 아닌 벡터 $\vec{n}$ 에 수직이고 위치벡터가 $\vec{a}$ 인 점 A 를 지나는 평면의 방정식은

$$\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0$$

이다. 이때, $\vec{n}$ 를 평면의 법선벡터라고 한다.

(다) 좌표공간에서 두 점 A, B 의 위치벡터를 각각 $\vec{a}, \vec{b}$ 라 할 때, 두 점 A, B 를 지름의 양 끝 점으로 하는 구의 방정식은

$$(\vec{x} - \vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{b}) = 0$$

이다.

(※) 좌표공간에 서로 다른 두 점 P, Q 가 주어졌다. 선분 PQ 를 $3:1$ 로 내분하는 점을 M 이라 하자. 부등식 $\overrightarrow{XP} \cdot \overrightarrow{XQ} \le 0$ 을 만족하는 점 X 의 집합을 A 라 하고, 등식 $\overrightarrow{XM} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$ 을 만족하는 점 X 의 집합을 B 라 하자.

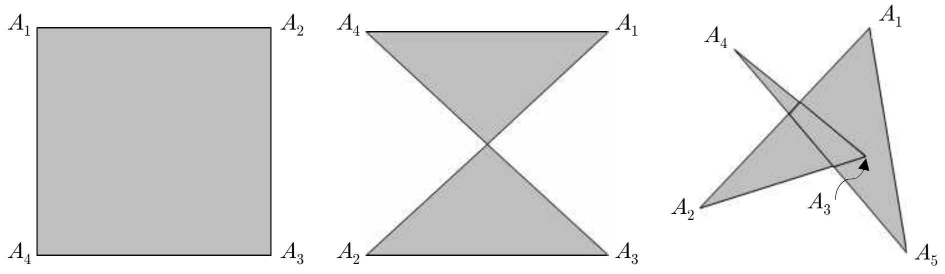
(3-1) B 에 의해 잘린 A 의 두 부분의 부피의 비를 구하시오. (10점)

(3-2) $\overrightarrow{PQ} = (1, 2, 2)$ 일 때, $A \cap B$ 의 xy 평면 위로의 정사영의 넓이를 구하시오. (15점)

논술고사 (자연계열)

[문제 4] (25점) 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오.

좌표평면에 n개의 점 A_1, A_2, $\cdots$, A_n이 있을 때, n개의 선분 A_1A_2, A_2A_3, $\cdots$, $A_{n-1}A_n$, A_nA_1로 둘러싸인 영역을 생각할 수 있다. 다음 그림은 이러한 영역에 색칠한 몇 개의 예이다.



(※) 좌표평면의 한 점 P를 원점을 중심으로 α만큼 회전한 점을 $f_\alpha(P)$, 원점을 중심으로 β만큼 회전한 점을 $f_\beta(P)$라 할 때, 일차변환 f는 P를 점 $f_\alpha(P)+f_\beta(P)$로 옮기는 변환이다. (단, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\beta<\frac{3\pi}{2}$ 이다.)

(4-1) 일차변환 f를 나타내는 행렬은

$$k\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} \qquad (k>0\ ,\ 0\le\theta<2\pi)$$

로 나타낼 수 있다. 이때, k와 θ를 각각 α와 β의 식으로 표현하시오. (10점)

(4-2) 점 $P_1(1,0)$에 대하여 $P_{n+1}=f^n(P_1)=(\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{f\text{가 } n\text{개}})(P_1)$ $(n=1,2,3,\cdots)$이라고 하자. 일차변환 f가 $P_1=f^7(P_1)$을 만족할 때, 선분 P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, P_4P_5, P_5P_6, P_6P_7, P_7P_1로 둘러싸인 영역의 넓이가 최소가 되도록 하는 α, β의 값을 모두 구하시오. (15점)

<연 습 장>

<연 습 장>

<연 습 장>

<연 습 장>

<연 습 장>

<연 습 장>

2015학년도 수시모집

논술고사 문제지 (오후)

(자연계열) : 120분

모집단위		전형유형	논술우수자(일반)
수험번호		성　　명	

■ 일반 유의사항

1. 시험시간은 120분, 배점은 100점 만점입니다.
2. 각 문항의 답안은 반드시 해당 답란에 작성하시오.
3. 답안을 구상할 때 문제지의 여백이나 또는 문제지 내의 연습장을 사용하시오.
4. 답안을 작성할 때 반드시 흑색 필기구만을 사용하시오(연필, 샤프 사용 가능, 사인펜 불가).
5. 답안을 정정할 때 두 줄을 긋고 정정하시오(수정액, 수정 테이프, 지우개 사용 가능).

※ 답안지는 절대 교체할 수 없습니다.

■ 답안 작성 유의사항

1. 제목은 쓰지 말고, 논제 번호를 명시한 후 답안을 작성하시오.
2. 제시된 분량을 지키시오.
3. 제시문의 문장을 그대로 옮기지 마시오.
4. 수험번호, 성명 등 신상에 관련된 사항을 답란이나 답안지의 여백에 드러내지 마시오.
5. 풀이의 과정을 순차적으로 서술하되, 필요한 경우에 수식 및 그림을 사용할 수 있으며, 수식은 반드시 문장 속에 포함 시키시오.

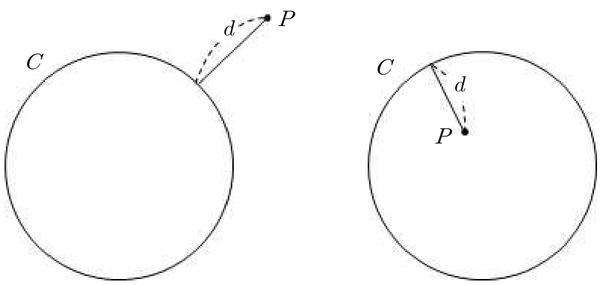
인하대학교
INHA UNIVERSITY

논술고사 (자연계열)

수학 : 100점

[문제 1] (20점) 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오.

좌표평면에 점 P와 원 C가 있다. 점 P에서 원 C까지의 거리 d는 P와 C 위의 점과의 거리 중에서 최솟값으로 정의한다.



(1-1) 중심이 점 A이고 반지름이 r인 원 C가 있다. 점 P에서 원 C까지의 거리 d를 $\overline{PA}$와 r로 표현하시오. (5점)

(1-2) 두 원 C_1과 C_2가 다음과 같이 주어졌다.

$$C_1 : (x+2)^2+y^2=25\,, \quad C_2 : (x-2)^2+y^2=9$$

원 C_2 위에 있거나 내부에 있는 점들 중에서 두 원 C_1과 C_2까지의 거리가 같은 점의 집합을 S라 하자. S로 둘러싸인 도형을 x축 둘레로 회전시켜서 생기는 회전체의 부피를 구하시오. (15점)

논술고사 (자연계열)

[문제 2] (25점) 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오.

두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$ 가 각각 u, x 에 대하여 미분가능하면 합성함수 $y=(f\circ g)(x)=f(g(x))$ 도 x 에 대하여 미분가능하고, 그 도함수는

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=f'(g(x))g'(x)$$

이다.

(※) 모든 $x>0$ 에서 정의된 함수 $y=f(x)$ 가 미분가능하고, 다음의 성질을 만족한다.

(a) $0<f(x)<1$

(b) $-\ln y+\ln(1+\sqrt{1-y^2})-\sqrt{1-y^2}=x$

(2-1) $\dfrac{dy}{dx}$ 를 y 의 식으로 나타내시오. (8점)

(2-2) 점 $P(t,f(t))$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프에 접하는 직선이 x 축과 만나는 점을 Q 라 할 때, 선분 PQ 의 길이를 구하시오. (7점)

(2-3) 극한 $\lim_{x\to\infty}f(x)$ 와 $\lim_{x\to\infty}e^x f(x)$ 의 값을 구하시오. (10점)

논술고사 (자연계열)

[문제 3] (25점) 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오.

좌표공간에서 두 점 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ 사이의 거리는

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

이다.

(3-1) 좌표공간에 세 점 $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$, $C(c_1, c_2, c_3)$ 이 있다.

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$의 값이 최소가 되게 하는 점 P의 좌표를 구하시오. (10점)

(3-2) 좌표공간에 세 점 $A(1, 1, 2)$, $B(2, 0, 1)$, $C(0, 2, 0)$ 이 있다. 점 P가 평면 $x+2y+3z=0$ 위를 움직일 때,

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$의 값이 최소가 되게 하는 점 P의 좌표를 구하시오. (15점)

논술고사 (자연계열)

[문제 4] (30점) 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오.

수열 $\{a_n\}$ 에 대해 수열 $\{b_n\}$ 을 $b_n = a_{2n-1}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ 로 정의하자. $\{a_n\}$ 이 α 로 수렴하면 $\{b_n\}$ 도 α 로 수렴한다. 그러나 $\{b_n\}$ 은 수렴하고 $\{a_n\}$ 은 발산하는 경우도 있다. 예를 들어, $a_n = (-1)^n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ 이면 $\{a_n\}$ 은 발산하지만, $\{b_n\}$ 은 -1 로 수렴한다.

(※) 함수 $f(x) = \begin{cases} -x-1 & (x<0) \\ 2x-1 & (x \geq 0) \end{cases}$ 에 대해 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = k$ (k 는 실수)이고, 점화식

$$a_{n+1} = f(a_n) \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

을 만족한다.

(4-1) 합성함수 $y = f(f(x))$의 그래프를 그리시오. (10점)

(4-2) $a_4 - a_6$이 최대가 되도록 하는 k의 값을 모두 구하시오. (10점)

(4-3) 다음 두 조건을 만족하는 열린구간 (a, b)를 찾으시오. (10점)

(ㄱ) k 가 열린구간 (a, b) 의 원소이면 $\{a_n\}$ 은 발산하지만 $\{a_{2n-1}\}$ 은 수렴한다.

(ㄴ) $b-a = \dfrac{3}{8}$ 이고, $a>0$ 이다.

<연 습 장>

<연 습 장>

<연 습 장>

<연 습 장>

<연 습 장>

<연 습 장>

2015학년도 수시모집 논술우수자(일반) 논술고사(오전) 출제의도 및 해설

[문제 1] (25점)

1. 출제의도

고등학교 교과 과정에서 기본적으로 다루는 이항정리와 이항계수에 대한 여러 가지 기본적인 내용들을 잘 이해하고 활용할 수 있는지를 평가하고자 하였다.

2. 주제 분석과 제시문 해설

(가) 주제 분석

이항계수의 여러 가지 성질을 알아보는 것을 주제로 삼았다.

(나) 제시문 해설

제시문은 이항계수의 정의를 제공하였다.

(다) 제시문 출처

고등학교『수학』교과서, ㈜지학사, 297쪽~298쪽

3. 논제 해설

(1-1)은 이항계수 ${}_{2n}C_n$가 짝수임을 보이는 것이다. 이항정리

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\, x^k$$

와 이항계수의 기본성질 ${}_nC_k = {}_nC_{n-k}$을 이용하거나 혹은 파스칼의 정리

$${}_nC_k = {}_{n-1}C_k + {}_{n-1}C_{k-1}$$

를 사용하거나 혹은 이항계수의 정의를 활용하는 등 여러 가지 방법이 있다.

(1-2)는 $n=2^k$ (k는 양의 정수)이고 정수 b가 $1 \le b \le n-1$을 만족할 때, $\dfrac{n+b}{b}$의 기약분수의 분모와 분자가 모두 홀수임을 보이고, $f(2^k)$은 4의 배수가 아님을 보이는 것이다. 첫 번째는 모든 정수가 $2^i \times c$ (c는 홀수)꼴로 표현됨을 이용하면 쉽게 보일 수 있다. 두 번째는 첫 번째의 결과와 (1-1)의 결과를 이용하면 된다.

(1-3)은 $\dfrac{f(n)}{f(n-1)}$을 n의 식으로 나타내고 $f(2^{15}-1)$이 2^m의 배수가 되는 양의 정수

m의 최댓값을 구하는 것이다. (1-1)과 (1-2)의 결과 및 n 으로 표현된 식을 활용하면 된다.

4. 평가 기준

- 이항정리 및 이항계수의 기본성질의 이해 능력
- 모든 정수를 $2^i \times$(홀수)꼴로 나타낼 수 있는 능력
- 논제에서 요구하는 사항을 정확히 이해하고 기존 지식, 제시문의 내용, 그리고 앞의 문제의 결과 등을 바탕으로 논제의 답을 논리적으로 서술하는 능력

5. 예시 답안

(1-1) (5점) 이항정리 $(1+x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} {}_{2n}C_k x^k$ 로부터 $x=1$ 일 때,

$$2^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} {}_{2n}C_k = \sum_{k=0}^{n-1} \left({}_{2n}C_k + {}_{2n}C_{2n-k}\right) + {}_{2n}C_n$$

따라서 ${}_{2n}C_n = 2^{2n} - 2\sum_{k=0}^{n-1} {}_{2n}C_k$ 이므로 ${}_{2n}C_n$ 은 짝수이다.

(별해) 파스칼의 정리, 즉 ${}_nC_k = {}_{n-1}C_k + {}_{n-1}C_{k-1}$ 에 의해,

$${}_{2n}C_n = {}_{2n-1}C_n + {}_{2n-1}C_{n-1} = 2 \times {}_{2n-1}C_n$$

이므로 ${}_{2n}C_n$ 은 짝수이다.

(별해) ${}_{2n}C_n = \dfrac{(n+1)(n+2)\cdots(n+(n-1))}{1\times 2\times\cdots\times(n-1)} \times \dfrac{n+n}{n} = 2\times {}_{2n-1}C_{n-1}$ 이므로 ${}_{2n}C_n$ 은 짝수이다.

(1-2) (10점) $b = 2^i c$ (c는 홀수, $0 \le i < k$)라 두면

$$\frac{n+b}{b} = \frac{2^k + 2^i c}{2^i c} = \frac{2^i(2^{k-i}+c)}{2^i c} = \frac{2^{k-i}+c}{c} = \frac{\text{홀수}}{\text{홀수}}$$

이다. 따라서 $f(2^k) = \dfrac{n+1}{1} \times \dfrac{n+2}{2} \times \cdots \times \dfrac{n+(n-1)}{n-1} \times \dfrac{n+n}{n}$

$$= \frac{\text{홀수}}{\text{홀수}} \times \frac{\text{홀수}}{\text{홀수}} \times \cdots \times \frac{\text{홀수}}{\text{홀수}} \times 2$$

이므로 $f(2^k)$ 는 4의 배수가 아니다.

(1-3) (10점) 등식

$$\frac{f(n)}{f(n-1)} = \frac{{}_{2n}C_n}{{}_{2n-2}C_{n-1}} = \frac{(2n)!/n!n!}{(2n-2)!/(n-1)!(n-1)!} = \frac{2(2n-1)}{n}$$

에 $n=2^{15}$ 를 대입하고 (1-2)의 결과를 이용하면 다음 등식을 얻는다.

$$f(2^{15}-1) = \frac{2^{15}}{2(2^{16}-1)} f(2^{15}) = \frac{2^{15}}{2\times(\text{홀수})} \times 2 \times (\text{홀수})$$

따라서 $f(2^{15}-1)$ 을 나누는 최대 2^m 의 형태는 $m=15$ 일 때이다.

[문제 2] (25점)

1. 출제의도

고등학교 과정에서 기본적으로 다루는 다항함수의 접선의 방정식, 도함수를 이용하여 방정식의 실근의 개수 구하기, 함수의 극대와 극소 판정, 다항함수의 미적분 등에 대한 여러 가지 기본적인 내용들을 잘 이해하고 활용할 수 있는지를 평가하고자 하였다.

2. 주제 분석과 제시문 해설

(가) 주제 분석

4차 다항함수에 접하는 직선의 개수를 다양한 조건에서 알아보는 것을 주제로 삼았다.

(나) 제시문 해설

제시문은 미분계수가 접선의 기울기를 나타냄을 설명하였다.

(다) 제시문 출처

고등학교『수학II』교과서, ㈜금성출판사, 117쪽

3. 논제 해설

(2-1)은 함수 $f(x)=(x^2-3)^2$ 의 그래프 위의 점 $(t,(t^2-3)^2)$ 에서 접선이 점 $P(a,b)$ 를 지날 때, t,a,b 의 관계식을 구하는 것이다. 제시문의 내용과 다항함수의 미분에 의해 관계식이 t 에 대한 4차 방정식임을 쉽게 얻을 수 있다.

(2-2)는 $a=1$ 일 때 (2-1)의 상황에서 b 의 값의 범위에 따라 접선의 개수를 구하는 것이다. 이것은 (2-1)에서 구한 t 에 대한 4차 방정식의 서로 다른 실근의 개수를 구하는 문제와 같기 때문에 미분을 통하여 조건에 따라 접선의 개수를 구할 수 있다.

(2-3)은 $2 \le a \le 3$일 때 (2-1)의 상황에서 접선이 4개 존재하는 점 $P(a,b)$의 집합을 S라 할 때, S의 넓이를 구하는 것이다. 이것은 (2-2)에서와 같이 (2-1)에서 구한 t에 대한 4차 방정식의 서로 다른 네 실근을 가지는 문제와 같기 때문에 미분을 이용하여 집합 S를 구할 수 있고 다항함수의 적분을 통해 S의 면적을 구할 수 있다.

4. 평가 기준

- 논제 이해 능력
- 4차 방정식의 실근의 개수를 구하는 능력
- 논제에서 요구하는 사항을 정확히 이해하고 기존 지식, 제시문의 내용, 그리고 앞의 문제의 결과 등을 바탕으로 논제의 답을 논리적으로 서술하는 능력

5. 예시 답안

(2-1) (5점) 점 $\left(t,(t^2-3)^2\right)$에서 $f(x)$의 그래프에 접하는 직선의 방정식은

$$y = t^4-6t^2+9+(4t^3-12t)(x-t)$$

이다. 이 직선이 점 $P(a,b)$를 지나므로

$$b = t^4-6t^2+9+(4t^3-12t)(a-t)$$

이 성립한다.

(2-2) (10점) 편의상

$$g(t) = 3t^4 - 4t^3 - 6t^2 + 12t + b - 9$$

라 두자. 점 $(t, f(t))$에서 $f(x)$의 그래프에 접하는 직선이 점 $P(1,b)$를 지날 때, t는 방정식 $g(t)=0$의 실근이다. 접선의 개수를 구하기 위해 t의 방정식 $g(t)=0$의 서로 다른 실근의 개수를 파악한다. 이를 위해 $g(t)$의 그래프의 개형을 그려본다.

$$g'(t) = 12t^3-12t^2-12t+12 = 12(t+1)(t-1)^2$$

이므로 $t<-1$일 때 $g'(t)<0$이고, $t \in (-1,1) \cup (1,\infty)$일 때 $g'(t)>0$이다. 그리고

$$\lim_{t\to-\infty} g(t) = \infty = \lim_{t\to\infty} g(t)$$

이다. 따라서 방정식 $g(t)=0$의 서로 다른 실근의 수는

$b-20 = g(-1) < 0$일 때 2개,

$b-20 = g(-1) = 0$일 때 1개,

$b-20 = g(-1) > 0$일 때 0개이다.

이제 서로 다른 접점에서 하나의 접선이 생기는 경우를 찾자. 서로 다른 두 점

$P(t_1, (t_1^2-3)^2)$ 와 $Q(t_2, (t_2^2-3)^2)$ 에서 $f(x)$ 의 그래프에 접하는 직선의 방정식은 각각

$$y=(4t_1^3-12t_1)x-3t_1^4+6t_1^2+9, \qquad y=(4t_2^3-12t_2)x-3t_2^4+6t_2^2+9$$

이다. 두 직선이 같은 경우는 기울기와 y절편이 모두 같을 때이다. 즉,

$$t_1^3-3t_1=t_2^3-3t_2 \text{ 이고 } \quad t_1^4-2t_1^2-3=t_2^4-2t_2^2-3$$

일 때이다. 이 방정식을 다시 쓰면

$$(t_1-t_2)(t_1^2+t_1t_2+t_2^2-3)=0, \quad \text{----------} \ (1)$$

$$(t_1-t_2)(t_1+t_2)(t_1^2+t_2^2-2)=0 \quad \text{---------} \ (2)$$

이다. $t_1 \neq t_2$이므로 등식 (2)로부터 $t_2=-t_1$이거나 $t_1^2+t_2^2=2$이다.

$t_1^2+t_2^2=2$이면 등식 (1)에 의해

$$0=t_1^2+t_1t_2+t_2^2-3=t_1t_2-1$$

이다. 따라서 $t_1^2+\dfrac{1}{t_1^2}=2\ (t_1\neq 0)$이고, 이를 풀면 $t_1=t_2=\pm 1$이 되어 $t_1\neq t_2$임에 모순이다. 그러므로 $t_2=-t_1$이다. 이를 등식 (1)에 대입하면

$$0=t_1^2+t_1t_2+t_2^2-3=t_1^2-3$$

이 되어 $t_1=\pm\sqrt{3}$, $t_2=\mp\sqrt{3}$이다. 따라서 점 $(1,b)$를 지나고 $f(x)$의 그래프에 접하는 직선이 서로 다른 두 접점을 가질 때, 접점은 $(\pm\sqrt{3},0)$이고 접선의 방정식은 $y=0$이다. 이 경우는 $b=0$일 때이다. 그러므로 구하려는 (서로 다른) 접선의 개수는

(i) $b<0$이거나 $0<b<20$이면 2개,

(ii) $b=0$이거나 $b=20$이면 1개,

(iii) $b>20$이면 0개이다.

(2-3) (10점) 편의상

$$G(t)=3t^4-4at^3-6t^2+12at+b-9$$

라 두자. 점 $(t, f(t))$에서 $f(x)$의 그래프에 접하고 점 $P(a,b)$를 지나는 서로 다른 직선이 4개 존재하면 방정식 $G(t)=0$의 서로 다른 실근이 4개 존재해야 한다.

$$G'(t)=12t^3-12at^2-12t+12a=12(t+1)(t-1)(t-a)$$

이고 $2\le a\le 3$이므로, $t\in(-\infty,-1)\cup(1,a)$일 때 $G'(t)<0$이고, $t\in(-1,1)\cup(a,\infty)$일 때 $G'(t)>0$이다. 그리고 $\lim\limits_{t\to-\infty}G(t)=\infty=\lim\limits_{t\to\infty}G(t)$이다.

따라서 방정식 $G(t)=0$이 서로 다른 네 개의 실근을 가질 필요충분조건은

$$G(-1)<0 \text{ 이고 } G(1)>0 \text{ 이고 } G(a)<0$$

이다. 한편

$$G(-1)-G(a)=a^4-6a^2-8a-3=(a+1)^3(a-3)\le 0$$
이므로, $G(t)=0$이 서로 다른 네 개의 실근을 가질 필요충분조건은
$$G(1)>0 \text{ 이고 } G(a)<0$$
이다. 이를 다시 쓰면
$$12-8a<b<a^4-6a^2+9$$
이다. 그런데 (2-2)의 풀이에 따르면 $f(x)$의 그래프에 접하는 직선이 서로 다른 두 접점을 가지는 경우는 $b=0$ 뿐이다. 그러므로 $2\le a\le 3$일 때 서로 다른 네 접선이 존재할 필요충분조건은
$$12-8a<b<a^4-6a^2+9 \text{ 이고 } \quad b\ne 0$$
이다. 선분은 영역의 넓이에 영향을 주지 않으므로, S의 넓이를 구할 때 $b\ne 0$인 조건은 무시해도 좋다. 따라서 S의 넓이는
$$\int_2^3 (a^4-6a^2+9-(12-8a))da=\left[\frac{a^5}{5}-2a^3+4a^2-3a\right]_2^3=\frac{106}{5}$$
이다.

[문제 3] (25점)

1. 출제의도

고등학교 과정에서 기본적으로 다루는 좌표공간에서 벡터의 내적, 평면의 방정식, 구의 방정식, 정사영 등에 대한 여러 가지 기본적인 내용들을 잘 이해하고 활용할 수 있는지를 평가하고자 하였다.

2. 주제 분석과 제시문 해설

(가) 주제 분석

좌표공간에서 구가 평면에 의해 잘린 상황에서 부피, 정사영의 넓이 등의 정보를 알아보는 것을 주제로 삼았다.

(나) 제시문 해설

제시문 (가)는 두 벡터의 내적의 정의를 주었다.

제시문 (나)는 좌표공간에서 평면의 벡터방정식을 제공하였다.

제시문 (다)는 좌표공간에서 두 점을 지름의 양 끝점으로 하는 구의 벡터방정식을 제공하였다.

(다) 제시문 출처

제시문 (가) : 고등학교『기하와 벡터』교과서, ㈜금성출판사, 140쪽 발췌 수정
제시문 (나) : 고등학교『기하와 벡터 익힘책』교과서, ㈜금성출판사, 128쪽 발췌 수정
제시문 (다) : 고등학교『기하와 벡터 익힘책』교과서, 성지출판㈜, 130쪽 발췌 수정

3. 논제 해설

문제 구성에서 주어진 벡터부등식과 벡터방정식을 제시문을 이용하여 해석하면, 좌표공간에 서로 다른 두 점 P, Q와 선분 PQ를 $3:1$로 내분하는 점 M이 주어졌고, 두 점 P와 Q를 지름의 양 끝점으로 하는 구가 점 M을 지나고 법선벡터가 $\overrightarrow{PQ}$인 평면에 의해 잘린 상황을 말하고 있다.

(3-1)은 잘린 두 부분의 부피의 비를 구하는 것이다. 잘린 두 부분의 부피는 반원의 일부를 x축 둘레로 회전시켜서 생기는 회전체로 파악하여 정적분을 이용하여 구할 수 있다.

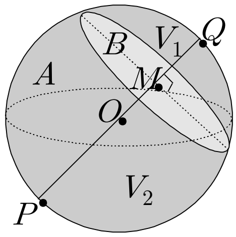
(3-2)는 평면의 법선벡터가 주어지고 구와 평면의 공통부분(원판)을 xy평면 위로의 정사영의 넓이를 구하는 것이다. 원판의 반지름과 원판과 xy평면이 이루는 각도를 알면 이 문제를 해결할 수 있다.

4. 평가 기준

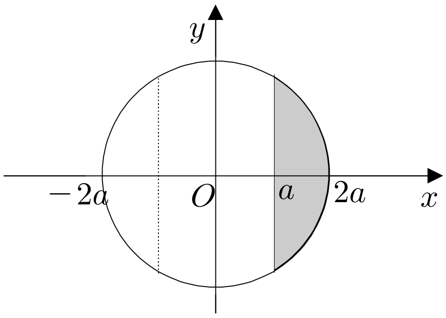
- 문제 구성에서 주어진 벡터부등식과 벡터방정식의 해석 능력
- 회전체의 부피를 정적분으로 구하는 능력
- 특정 평면과 xy평면이 이루는 각을 내적을 이용하여 구하는 능력
- 논제에서 요구하는 사항을 정확히 이해하고 기존 지식, 제시문의 내용, 그리고 앞의 문제의 결과 등을 바탕으로 논제의 답을 논리적으로 서술하는 능력

5. 예시 답안

(3-1) (10점) 제시문 (다)에 의해 집합 A는 서로 다른 두 점 P와 Q를 지름의 양 끝점으로 하는 구와 그 내부이고, 제시문 (나)에 의해 집합 B는 점 M을 지나고 법선벡터가 $\overrightarrow{PQ}$인 평면이다. <그림 1>과 같이 B에 의해 잘린 A의 두 부분의 부피를 V_1, V_2라 하자. 편의상 <그림2>와 같이 선분 PQ의 길이를 $4a$로 놓고 직선 PQ를 x축, 선분 PQ의 중점을 xy평면의 원점 O가 되도록 하자.



<그림1>



<그림2>

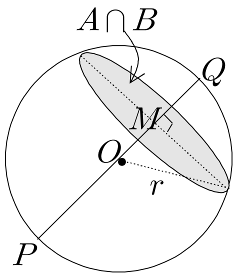
구하려는 두 부분의 부피 V_1, V_2 는 각각 <그림 2>에서 원의 일부를 x 축 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피이다. 원의 식은 $x^2+y^2=4a^2$ 로 주어지므로

$$V_1=\pi\int_a^{2a} y^2\,dx=\pi\int_a^{2a}(4a^2-x^2)\,dx=\pi\left[4a^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_a^{2a}=\frac{5}{3}\pi a^3$$

$$V_2=\frac{4}{3}\pi(2a)^3-V_1=\frac{32}{3}\pi a^3-\frac{5}{3}\pi a^3=\frac{27}{3}\pi a^3$$

이다. 따라서 $V_1 : V_2=5:27$ 이다.

(3-2) (15점) 먼저 $A\cap B$ 는 아래 그림과 같이 원판이다.



$|\overrightarrow{PQ}|=3$ 이므로 구의 반지름은 $r=\dfrac{3}{2}$ 이고 $\overline{OM}=\dfrac{3}{4}$ 이다. 따라서 $A\cap B$ 의 반지름은 $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ 이고 $A\cap B$ 의 넓이는 $\dfrac{27}{16}\pi$ 이다. 평면 $A\cap B$ 와 xy 평면이 이루는 각을 θ 라 하면, 평면 $A\cap B$ 와 xy 평면의 법선벡터가 각각 $\overrightarrow{PQ}=(1,2,2)$ 와 $\vec{k}=(0,0,1)$ 이므로

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{k}}{|\overrightarrow{PQ}||\vec{k}|}=\frac{2}{3}$$

이다. 따라서 $A\cap B$ 의 xy 평면으로의 정사영의 넓이는

$$(A \cap B\text{의 넓이}) \times \cos\theta = \frac{27}{16}\pi \times \frac{2}{3} = \frac{9}{8}\pi$$

이다.

[문제 4] (25점)

1. 출제의도

고등학교 과정에서 기본적으로 다루는 일차변환과 행렬, 일차변환의 합성, 삼각함수 등에 대한 여러 가지 기본적인 내용들을 잘 이해하고 활용할 수 있는지를 평가하고자 하였다.

2. 주제 분석과 제시문 해설

(가) 주제 분석

회전 각도가 다른 두 회전변환의 합으로 정의된 일차변환을 7번 시행하여 다시 제자리로 돌아올 때 만들어지는 선분으로 둘러싸인 영역의 최소 넓이에 관한 정보를 알아보는 것을 주제로 삼았다.

(나) 제시문 해설

제시문은 n개의 선분이 있고, 이 중 몇 개의 선분으로 둘러싸인 영역의 예를 제공하였다. 이 예는 (4-2)의 질문을 명확히 이해하는데 도움이 된다.

(다) 제시문 출처

창작

3. 논제 해설

회전 각도가 α, β $\left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \beta < \frac{3\pi}{2}\right)$인 두 회전변환의 합으로 정의된 일차변환 f가 있다.

(4-1)은 f를 나타내는 행렬이 $k\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$일 때, k와 θ를 α, β로 표현하는 것이다. 삼각함수의 합을 곱으로 고치는 공식을 적용하거나 기하적인 해석으로 쉽게 구할 수 있다.

(4-2)는 점 $P_1(1,0)$을 일차변환 f를 7번 시행 후 다시 P_1으로 돌아오는 상황에서 만들어지는 선분들에 의해 둘러싸인 영역의 넓이가 최소가 되는 α, β의 값을 모두 구하는 것이다.

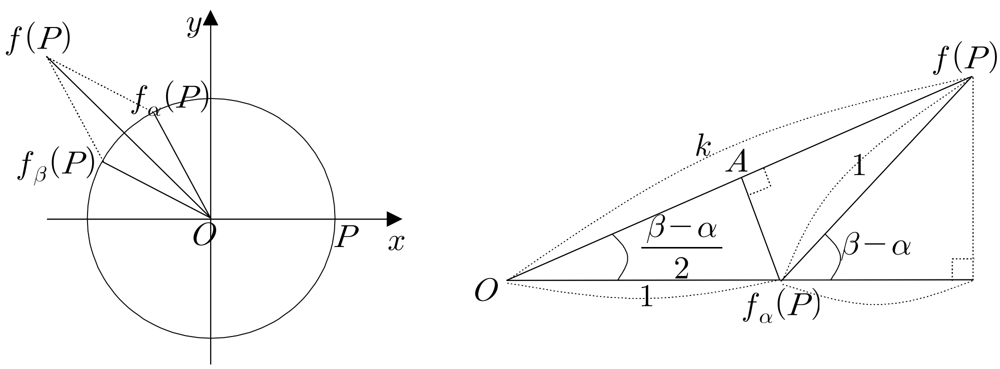
삼각방정식의 풀이로부터 네 가지 유형의 별-다각형이 생기는데 넓이가 최소인 경우를 그림을 그려보면 쉽게 찾을 수 있다.

4. 평가 기준

- 삼각함수의 기본지식 적용 능력
- 주어진 상황의 기하적인 해석 능력
- 삼각방정식 풀이 능력
- 분석 능력
- 논제에서 요구하는 사항을 정확히 이해하고 기존 지식, 제시문의 내용, 그리고 앞의 문제의 결과 등을 바탕으로 논제의 답을 논리적으로 서술하는 능력

5. 예시 답안

(4-1) (10점) 그림으로 분석하면 다음과 같다.



위 그림으로부터 일차변환 f의 회전각과 k는 다음으로 주어진다.

$$\theta = \alpha + \frac{\beta-\alpha}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2} \text{ 이고 } k = 2\,\overline{OA} = 2\cos\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)$$

(별해) 점 P를 원점을 중심으로 α 만큼 회전시키는 변환 f_α와 원점을 중심으로 β 만큼 회전시키는 변환 f_β를 행렬로 나타내면

$$f_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},\ f_\beta = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

이다. 따라서 점 P를 $f_\alpha(P)+f_\beta(P)$로 옮기는 일차변환 f의 행렬로 나타내면

$$f = f_\alpha + f_\beta = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha + \cos\beta & -(\sin\alpha + \sin\beta) \\ \sin\alpha + \sin\beta & \cos\alpha + \cos\beta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) & -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \\ 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) & 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \end{pmatrix}$$

$$= 2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \end{pmatrix}$$

이다. 따라서 $k = 2\cos\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)$ 이고 $\theta = \frac{\alpha+\beta}{2}$ 이다.

(4-2) (15점) $\frac{\pi}{2} < \alpha < \beta < \frac{3\pi}{2}$ 일 때, $0 < \frac{\beta-\alpha}{2} < \frac{\pi}{2} < \frac{\alpha+\beta}{2} < \frac{3\pi}{2}$ 이다.

$$f(P) = 2\cos\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} P$$

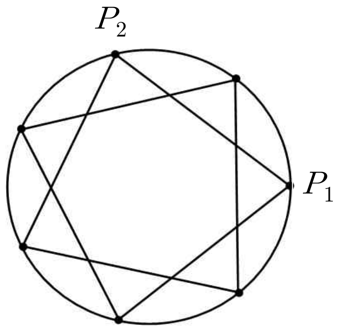
에서 조건 $f^7(P) = P$ 를 만족하려면,

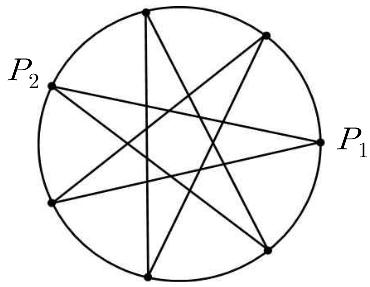
$$2^7\cos^7\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right) = 1 \;\Rightarrow\; \cos\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \frac{\beta-\alpha}{2} = \frac{\pi}{3},$$

$$7\theta = 2n\pi \;\Rightarrow\; \theta = \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{2n\pi}{7} \quad (n = 2, 3, 4, 5)$$

이다.

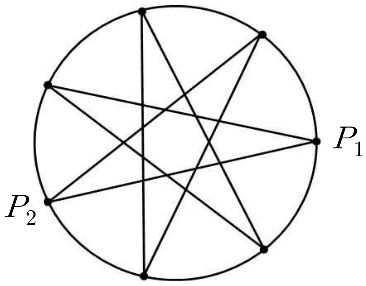
$\theta = \frac{4}{7}\pi$

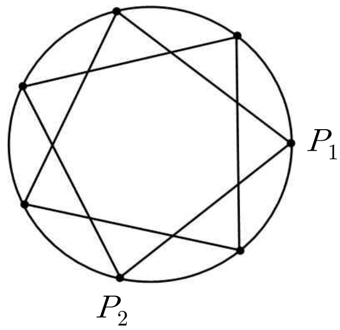




$\theta = \frac{6}{7}\pi$

$\theta = \frac{8}{7}\pi$





$\theta = \frac{10}{7}\pi$

이 중에서 주어진 영역의 넓이가 최소가 되게 하는 것은

$$\begin{cases} \dfrac{\beta-\alpha}{2} = \dfrac{\pi}{3} \\ \dfrac{\alpha+\beta}{2} = \dfrac{6}{7}\pi,\ \dfrac{8}{7}\pi \end{cases}$$

이다. 따라서 $0 \le \alpha < \beta < 2\pi$ 범위에서 가능한 값은

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{11}{21}\pi \\ \beta = \dfrac{25}{21}\pi \end{cases} \text{ 와 } \begin{cases} \alpha = \dfrac{17}{21}\pi \\ \beta = \dfrac{31}{21}\pi \end{cases}$$

이다.

2015학년도 수시모집 논술우수자(일반) 논술고사(오후) 출제 의도 및 해설

[문제 1] (20점)

1. 출제의도

고등학교 교과 과정에서 다루는 원, 타원, 쌍곡선에 대한 여러 가지 기본적인 내용들을 잘 이해하고 활용할 수 있는지를 평가하고자 하였다.

2. 주제 분석과 제시문 해설

(가) 주제 분석

두 점에서 만나는 두 원이 있을 때, 두 원 중 한 원 위에 있거나 내부에 있는 점들 중에서 두 원까지의 거리가 같은 점의 집합을 알아보는 것을 주제로 삼았다.

(나) 제시문 해설

제시문은 좌표평면에서 한 점과 원까지의 거리에 대한 정의를 제공하였다.

(다) 제시문 출처

창작

3. 논제 해설

(1-1)은 중심이 A이고 반지름이 r인 원 C가 있을 때, 점 P에서 원 C까지의 거리를 $\overline{PA}$와 r로 표현하는 것이다. 제시문에서 원과 점과의 거리에 대한 정의에 의해 점 P가 원의 위에 있을 때, 내부에 있을 때, 외부에 있을 때로 구분하여 구할 수 있다.

(1-2)는 두 점에서 만나는 두 원 C_1과 C_2가 있을 때, 원 C_2 위에 있거나 내부에 있는 점들 중에서 두 원 C_1과 C_2까지의 거리가 같은 점의 집합을 S라 하고 S로 둘러싸인 도형을 x축 둘레로 회전시켜서 생기는 회전체의 부피를 구하는 것이다. 점 P가 두 원의 교점에 있을 때, C_1의 외부에 있을 때와 내부에 있을 때로 구분하여 (1-1)의 결과를 적용하면 집합 S는 교점에서 만나는 타원과 쌍곡선으로 둘러싸인 닫힌 영역임을 알 수 있다. 따라서 타원과 쌍곡선의 방정식을 구하고 정적분을 이용하여 회전체의 부피를 구할 수 있다.

4. 평가 기준

- 제시문 이해 능력
- 조건에 따른 분석 능력

• 타원과 쌍곡선의 방정식을 구하는 능력
• 논제에서 요구하는 사항을 정확히 이해하고 기존 지식, 제시문의 내용, 그리고 앞의 문제의 결과 등을 바탕으로 논제의 답을 논리적으로 서술하는 능력

5. 예시 답안

(1-1) (5점) $\left|\overline{PA}-r\right|$ 혹은 $\begin{cases} \overline{PA}-r & (P\text{가 원 } C \text{ 외부에 있을 때}) \\ r-\overline{PA} & (P\text{가 원 } C \text{ 내부에 있을 때}) \\ 0 & (P\text{가 원 } C \text{ 위에 있을 때}) \end{cases}$

(1-2) (15점) 두 원 C_1 과 C_2 의 중심은 각각 $A(-2,0)$ 와 $B(2,0)$ 이다. 원 C_2 위에 있거나 내부에 있으며 두 원 C_1 과 C_2 에서 거리가 같은 점을 P 라 하자. 문제(1-1)의 결과에 의해 다음과 같은 두 등식이 만들어진다.

(i) P가 원 C_1의 외부, 원 C_2의 내부에 있을 때,

$$\overline{PA}-5=3-\overline{PB} \Leftrightarrow \overline{PA}+\overline{PB}=8$$

이다. 즉, A, B를 두 초점으로 하고 거리의 합이 $2a=8$로 일정한 타원이므로

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$$

이다.

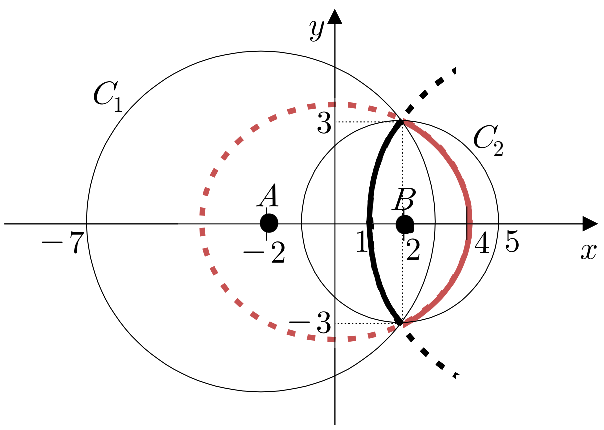
(ii) P가 원 C_1의 내부, 원 C_2의 내부에 있을 때,

$$5-\overline{PA}=3-\overline{PB} \Leftrightarrow \overline{PA}-\overline{PB}=2$$

이다. 즉, A, B를 두 초점으로 하고 거리의 차가 $2a=2$로 일정한 쌍곡선이므로

$$x^2-\frac{y^2}{3}=1$$

이다.



두 원 C_1 과 C_2 의 교점 $(x,y)=(2,3),\ (2,-3)$ 은 문제의 조건을 만족하고, (i)과 (ii)에서

구한 타원과 쌍곡선은 주어진 두 원 C_1 과 C_2 의 교점 $(2,3)$ 을 지나므로, 구하는 회전체의 부피는 다음과 같다.

$$V=\pi\int_1^2 y_{쌍}^2 dx+\pi\int_2^4 y_{타}^2 dx=3\pi\int_1^2(x^2-1)dx+12\pi\int_2^4\left(1-\frac{1}{16}x^2\right)dx$$
$$=3\pi\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_1^2+12\pi\left[x-\frac{1}{48}x^3\right]_2^4=4\pi+10\pi=14\pi$$

[문제 2] (25점)

1. 출제의도

고등학교 교과 과정에서 다루는 지수함수와 로그함수 및 무리함수의 미분법, 합성함수의 미분법, 접선의 방정식, 음함수 또는 역함수의 그래프의 개형에 관한 내용을 이해하고 정리할 수 있는지를 평가하고자 하였다.

2. 주제 분석과 제시문 해설

(가) 주제 분석

음함수 또는 역함수 형태로 주어진 함수의 도함수를 합성함수의 미분법을 이용하여 구하는 것, 도함수를 이용하여 접선에 관련된 정보 및 그래프의 개형에 관한 정보를 얻어내는 것을 주제로 삼았다.

(나) 제시문 해설

제시문은 합성함수의 미분법을 제공하였다.

(다) 제시문 출처

고등학교『수학II』교과서, ㈜금성출판사, 135쪽

3. 논제 해설

미분가능한 함수 $y=f(x)$ 가 조건 (b)와 같이 음함수 또는 역함수 형태로 주어졌고, $\ln f(x)$ 와 $\sqrt{1-(f(x))^2}$ 가 잘 정의되도록 하기 위해 $f(x)$ 의 공역을 구간 $(0,1)$ 로 제한하였다.

(2-1)에서는 합성함수의 미분법을 이용하여 도함수 $f'(x)$ 를 $f(x)$ 로 나타내는 문제이다. 조건 (b)의 좌변에서 y 가 x 의 함수이므로, 좌변은 합성함수이다. 합성함수의 미분법을 이용하여 양변을 x 에 대해 미분한 뒤, y 또는 $f(x)$ 가 나오는 부분을 최대한 간단하게

정리하면 된다.

(2-2)에서는 $P(t, f(t))$ 에서의 접선의 방정식을 구하고, 이를 이용하여 $f(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점 Q를 구하고, 이를 이용하여 $\overline{PQ}$를 구한다. 이 과정에서 (2-1)의 내용을 이용하여 $\dfrac{f(t)}{f'(t)} = -\sqrt{1-(f(t))^2}$ 임을 이용해야 $\overline{PQ}$의 값을 구할 수 있다.

(2-3)을 풀기 위해서는 조건 (b)의 등식의 양변이 모두 ∞ 로 발산한다는 사실을 먼저 얻어야 하고, 조건 (a)를 이용하여 좌변에서 $\ln\left(1+\sqrt{1-(f(x))^2}\right)$와 $\sqrt{1-(f(x))^2}$ 가 모두 0과 1 사이에 있는 값임을 파악해야 한다. 이로부터 $-\ln f(x)$가 ∞ 로 발산함을 얻을 수 있고, 극한값 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 이 0임을 얻는다. 두 번째 극한값을 얻기 위해서는 조건 (b)의 등식의 양변에 지수함수를 취하고 $e^x f(x)$ 의 식을 유도한 뒤 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ 임을 이용한다.

4. 평가 기준

- 로그함수, 지수함수, 무리함수와 합성함수의 미분법을 이해하고 활용하는 능력
- 접선의 방정식을 구하고, 이와 관련된 기하학적 정보를 얻는 능력
- 함수의 극한을 구하는 능력
- 논제에서 요구하는 사항을 정확히 이해하고 기존 지식, 제시문의 내용, 그리고 앞의 문제의 결과 등을 바탕으로 논제의 답을 논리적으로 서술하는 능력

5. 예시 답안

(2-1) (8점) 등식 (b)의 양변을 x에 대해 미분하면

$$\left(-\frac{1}{y} - \frac{y}{\sqrt{1-y^2}\,(1+\sqrt{1-y^2})} + \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\right)\frac{dy}{dx} = 1$$

이고, 괄호 안의 수식을 정리하면 $-\dfrac{\sqrt{1-y^2}}{y}$ 이다. 그러므로 $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}$ 이다.

(별해) 다음과 같이

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}\left(-\ln y + \ln\left(1+\sqrt{1-y^2}\right) - \sqrt{1-y^2}\right) = -\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}$$

를 계산하고, 역함수의 미분법 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{dx/dy}$ 을 이용해도 좋다.

(2-2) (7점) 점 $P(t, f(t))$ 에서 $f(x)$ 의 그래프에 접하는 직선의 방정식은

$$y - f(t) = f'(t)(x - t)$$

이다. 위의 식에 $y = 0$ 을 대입하면 $x = t - \dfrac{f(t)}{f'(t)} = t + \sqrt{1 - (f(t))^2}$ 이다. 그러면

$$Q = \left(t + \sqrt{1 - (f(t))^2}, 0\right)$$

이므로, 선분 PQ의 길이는 1 이다.

(2-3) (10점) $x \to \infty$ 일 때 등식 (b)의 우변은 ∞ 로 발산한다. 그런데 조건 (a)에 의하면 좌변에서

$$0 < \sqrt{1 - (f(x))^2} < 1 \text{ 이고 } \quad 0 < \ln\left(1 + \sqrt{1 - (f(x))^2}\right) < \ln 2$$

이다. 따라서 $x \to \infty$ 일 때 좌변이 ∞ 로 발산하려면 $\lim_{x \to \infty}(-\ln f(x)) = \infty$ 이어야 한다.

그러므로

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$$

이다. 그리고 등식 (b)의 양변에 지수함수를 취하고 정리하면

$$e^x f(x) = \left(1 + \sqrt{1 - (f(x))^2}\right) e^{-\sqrt{1 - (f(x))^2}}$$

을 얻는다. 이 등식의 양변에 $x \to \infty$ 인 극한을 취하고 $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ 임을 이용하면

$$\lim_{x \to \infty} e^x f(x) = \frac{2}{e}$$

을 얻는다.

(별해) $0 < x \le 1$ 일 때 $g(x) = -\ln x + \ln\left(1 + \sqrt{1 - x^2}\right) - \sqrt{1 - x^2}$ 라 정의하자. (2-1)의 풀이에 의해 $g'(x) < 0$ 이므로, $y = g(x)$ 는 $y = f(x)$ 의 역함수로 볼 수 있다. 그런데

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \infty$$

이므로, $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ 이다. $\quad \lim_{x \to \infty} e^x f(x) = \dfrac{2}{e}$ 의 증명은 위와 동일하다.

[문제 3] (25점)

1. 출제의도

고등학교 교과 과정에서 다루는 좌표공간에서 두 점 사이의 거리, 직선의 매개변수 방정식, 평면의 방정식, 법선벡터에 관한 내용을 이해하고 활용할 수 있는지를 평가하고자 하였다.

2. 주제 분석과 제시문 해설

(가) 주제 분석

좌표공간에서 거리에 관련된 양의 최대 최소를 주제로 삼았다.

(나) 제시문 해설

제시문은 좌표공간에서 두 점 사이의 거리 공식을 제공하였다.

(다) 제시문 출처

고등학교『기하와 벡터』교과서, ㈜교학사, 100쪽

3. 논제 해설

(3-1)은 좌표공간에서 거리에 관련된 양을 주어진 점들의 좌표를 이용하여 2차 다항함수로 전개한 뒤, 이 함수의 최소점을 구하는 문제이다. 이 2차 다항함수를 완전제곱식의 형태로 변형하여 제곱의 합이 최소가 되는 점을 얻을 수 있다.

(3-2)에서는 평면 위에 제한된 점에 대해 거리의 제곱의 합이 최소가 되는 점을 구하는 문제이다. 이를 위해 제곱의 합을 세 변수의 완전제곱식의 합을 유도하고, 제곱의 합이 최소가 되는 점은 주어진 평면과 구가 접하는 점을 찾는 문제로 바꾼다. 접점을 찾기 위해서는 평면의 법선벡터를 방향벡터로 가지는 직선의 방정식을 도입한다.

4. 평가 기준

- 기하적인 양을 2차 다항식으로 유도하고, 최소점을 구하는 능력
- 최대 최소 문제를 기하 문제로 변환하고, 공간도형의 지식을 활용하는 능력
- 논제에서 요구하는 사항을 정확히 이해하고 기존 지식, 제시문의 내용, 그리고 앞의 문제의 결과 등을 바탕으로 논제의 답을 논리적으로 서술하는 능력

5. 예시 답안

(3-1) (10점) P의 좌표를 (x, y, z)이라고 하면

$$
\begin{aligned}
&\overline{PA}^{\,2}+\overline{PB}^{\,2}+\overline{PC}^{\,2}\\
&=(x-a_1)^2+(y-a_2)^2+(z-a_3)^2+(x-b_1)^2+(y-b_2)^2+(z-b_3)^2\\
&\quad+(x-c_1)^2+(y-c_2)^2+(z-c_3)^2\\
&=3x^2-2(a_1+b_1+c_1)x+3y^2-2(a_2+b_2+c_2)y+3z^2-2(a_3+b_3+c_3)z\\
&\quad+a_1^2+b_1^2+c_1^2+a_2^2+b_2^2+c_2^2+a_3^2+b_3^2+c_3^2\\
&=3\left(x-\frac{a_1+b_1+c_1}{3}\right)^2+3\left(y-\frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)^2+3\left(z-\frac{a_3+b_3+c_3}{3}\right)^2+\text{상수}
\end{aligned}
$$

이 값이 최소가 되게 하는 P의 좌표는 $\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3},\ \frac{a_2+b_2+c_2}{3},\ \frac{a_3+b_3+c_3}{3}\right)$이다.

(3-2) (15점) 문제 (3-1)의 계산에서 $\overline{PA}^{\,2}+\overline{PB}^{\,2}+\overline{PC}^{\,2}$ 이 상수인 점 P의 집합은 삼각형 ABC의 무게중심 $(1,1,1)$을 중심으로 하는 구이다. 따라서 구하려는 점 P는 $(1,1,1)$을 중심으로 하는 구가 평면 $x+2y+3z=0$에 접할 때의 접점이다.

$(1,1,1)$ 을 지나고 평면에 수직인 직선의 방정식은

$$x=1+t,\quad y=1+2t,\quad z=1+3t$$

이고, 이 직선과 평면의 교점을 구하기 위해 이 식을 평면의 식에 대입하면

$$(1+t)+2(1+2t)+3(1+3t)=0$$

으로부터 $t=-\frac{3}{7}$ 을 얻는다. 따라서 $P\left(\frac{4}{7},\ \frac{1}{7},\ -\frac{2}{7}\right)$이다.

[문제 4] (30점)

1. 출제의도

고등학교 교과 과정에서 다루는 함수의 합성, 구간별로 정의된 함수, 점화식, 수열의 수렴과 발산에 대한 기본적인 내용들을 잘 이해하고 활용할 수 있는지를 평가하고자 하였다.

2. 주제 분석과 제시문 해설

(가) 주제 분석

구간별로 정의된 함수의 합성을 이해하고 합성함수의 그래프의 개형으로부터 점화식으로 정의된 수열의 수렴과 발산의 정보를 알아내는 것을 주제로 삼았다.

(나) 제시문 해설

부분수열의 수렴과 발산에 대한 정보를 제공하였다.

(다) 제시문 출처

고등학교『수학 I 익힘책』교과서, 천재교육, 125쪽을 참고하여 창작

3. 논제 해설

(4-1)은 합성함수의 그래프를 그리는 것이다. 구간별로 정의된 함수의 그래프를 그릴 수 있는지를 평가한다.

(4-2)는 $a_4 - a_6$이 최대가 되는 수열의 초항 $a_1 = k$의 값을 구하는 것이다. 주어진 식을 합성함수와 연관시켜 (4-1)의 그래프의 개형으로부터 수열의 초항의 값을 찾을 수 있다.

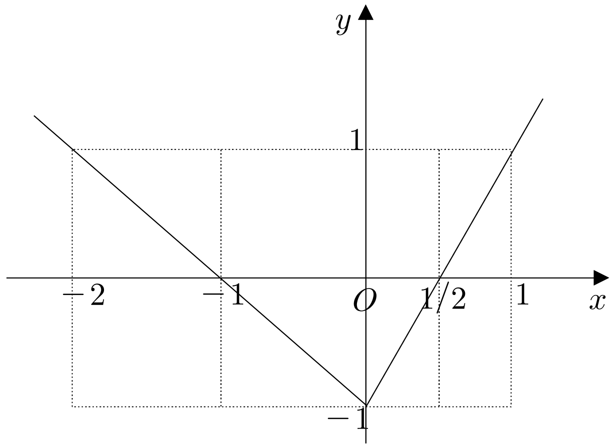
(4-3)은 점화식으로 주어진 수열이 두 가지 조건을 만족하는 열린구간 (a, b)를 구하는 것이다. 수열이 수렴 또는 발산하는 수열의 초항 $a_1 = k$의 값을 점화식을 주는 함수의 그래프와 연관시켜 파악하여 두 조건에 맞는 열린구간을 구할 수 있다.

4. 평가 기준

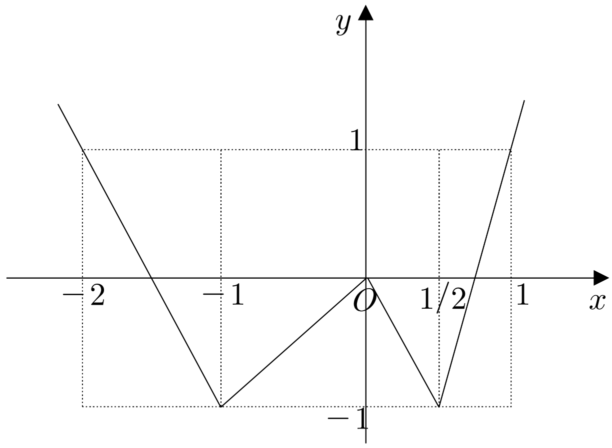
- 함수의 합성을 이해하고 구간별로 정의된 함수의 그래프를 그릴 수 있는 능력
- 점화식으로 주어진 수열이 수렴 또는 발산하는 초기조건을 점화식을 주는 함수의 그래프와 연관해서 파악할 수 있는 능력
- 논제에서 요구하는 사항을 정확히 이해하고 기존 지식, 제시문의 내용, 그리고 앞의 문제의 결과 등을 바탕으로 논제의 답을 논리적으로 서술하는 능력

5. 예시 답안

(4-1) (10점) $x \le -1,\, x \ge \dfrac{1}{2}$ 일 때 $f(x) \ge 0$ 이고, $-1 < x < \dfrac{1}{2}$ 일 때 $f(x) < 0$ 이므로



$$f(f(x)) = \begin{cases} 2(-x-1)-1 = -2x-3 & (x \le -1) \\ -(-x-1)-1 = x & (-1 < x < 0) \\ -(2x-1)-1 = -2x & (0 \le x < \frac{1}{2}) \\ 2(2x-1)-1 = 4x-3 & (x \ge \frac{1}{2}) \end{cases}$$ 이다. 그림은 다음과 같다.



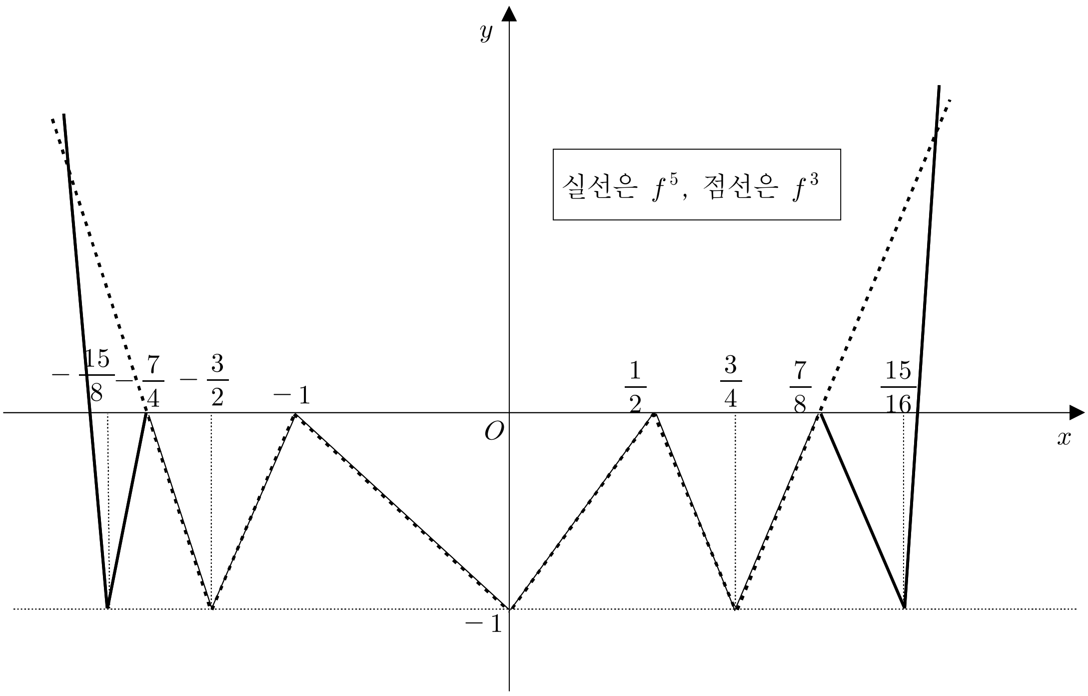
(별해) $f(x) < 0$ 일 때, $(f \circ f)(x) = 2\left(-\frac{1}{2}\right) - f(x)$ 라 쓰자. 그러면 f 의 그래프 중에서 x 축 아래에 있는 부분을 직선 $y = -1/2$ 에 대해 대칭시켜 $(f \circ f)(x)$ 의 그래프의 일부분을 얻는다. 또, f 의 그래프 중에서 x 축 위에 있는 부분의 기울기를 2배로 하고 -1 만큼 평행이동하면 $(f \circ f)(x)$ 의 그래프의 남은 부분을 얻는다. 구하려는 그래프는 위의 그림과 같다.

(4-2) (10점) $a_4 - a_6 = a_4 - f(f(a_4))$ 이다. $y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프 위의 점 (x, y) 중에서

$x-y$ 의 값을 최대로 하는 점은 $(\frac{1}{2}, -1)$ 이다. 이때 최댓값은 $\frac{3}{2}$ 이다.

$a_4 = (f \circ f)(a_2) = \frac{1}{2}$ 은 $a_2 = -\frac{7}{4}$ 또는 $\frac{7}{8}$ 일 때 얻어지는데, $a_2 = -\frac{7}{4}$ 은 불가능하므로 $a_2 = \frac{7}{8}$ 이다. 즉 $k = -\frac{15}{8}$ 또는 $\frac{15}{16}$ 일 때이다.

(별해) 표현을 간단하게 하기 위해 $f^n(x) = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{f\text{가 } n\text{개}}$ 라 하자. (4-1)의 별해와 같이 진행하면 $f^3(x)$ 의 그래프와 $f^5(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



$k > 0$ 이면 $k = \frac{15}{16}$ 일 때 $a_4 - a_6 = f^3(k) - f^5(k)$ 가 최대가 되고, $k < 0$ 이면 $k = -\frac{15}{8}$ 일 때 최대가 된다. 두 경우 모두 $a_4 = \frac{1}{2}$ 이고 $a_6 = -1$ 이므로, $k = -\frac{15}{8}$ 또는 $\frac{15}{16}$ 일 때 $a_4 - a_6$ 의 값이 최대가 된다.

(4-3) (10점)

(1) $k > 1$ 이면 $b_n = a_{2n-1}$ 은 점화식 $b_1 = k$, $b_{n+1} = 4b_n - 3$ 을 만족하므로

$$b_n = 1 + (k-1)4^{n-1}$$

이다. 따라서 $\{a_{2n-1}\}$ 은 발산한다.

(2) $k=1$ 일 때, $a_n=1\ (n\ge 2)$ 이므로 $\{a_n\}$ 과 $\{a_{2n-1}\}$ 은 모두 수렴한다.

(3) $0<k<1$ 일 때, 충분히 큰 n 에 대해 $-1\le a_n\le 0$ 이다. 이 때 $a_{n+1}=-a_n-1$ 은 $-1\le a_{n+1}\le 0$ 을 만족하므로 $a_{n+2}=-a_{n+1}-1=a_n$ 이다. 그러므로 $\{a_{2n-1}\}$ 은 항상 수렴하지만, $\{a_n\}$ 은 어떤 N에 대해 $a_N=-\dfrac{1}{2}$ 일 때만 수렴한다.

(a) $0<k\le\dfrac{1}{2}$ 일 때, $-1<f(k)\le 0$ 이고, 이 중 $f(k)=-\dfrac{1}{2}$ 이 되는 k의 값은 $k=\dfrac{1}{4}$ 이다. 즉, $\{a_n\}$ 이 수렴하는 k의 값은 $k=\dfrac{1}{4}$ 뿐이다.

(b) $\dfrac{1}{2}<k\le\dfrac{3}{4}$ 일 때, $0<f(k)\le\dfrac{1}{2}$ 이고, 이 중 $\{a_n\}$ 이 수렴하는 k 의 값은 $f(k)=\dfrac{1}{4}$ 을 만족하는 $k=\dfrac{5}{8}$ 뿐이다.

(c) 이 작업을 반복하면, $0\le k<1$ 일 때, $\{a_n\}$ 이 수렴하는 k의 값은

$$1-\frac{3}{2^{n+1}}\quad (n=1,2,3,\ \cdots)$$

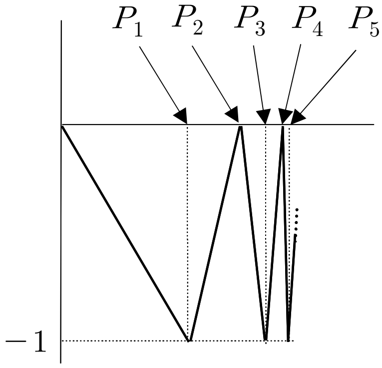
이다.

따라서, $\{a_n\}$ 은 발산하지만 $\{a_{2n-1}\}$ 은 수렴하는 $k>0$ 는 열린구간 $(0,1)$ 에서 다음 집합을 제외한 부분이다.

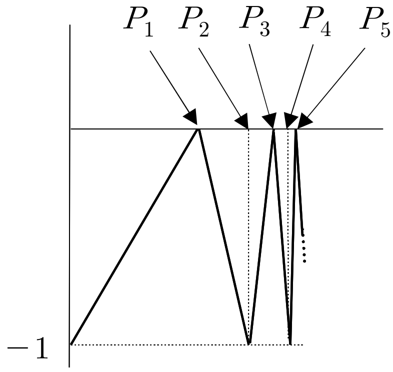
$$\left\{\frac{1}{4},\frac{5}{8},\ \cdots,1-\frac{3}{2^{n+1}},\ \cdots\right\}$$

그러므로 문제의 조건을 만족하는 열린구간은 $\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{5}{8}\right)$ 이다.

(별해) $k\ge 1$ 이면 $b_n=1+(k-1)4^{n-1}$ 이므로, $\{b_n\}$ 은 $k=1$ 일 때 수렴하고 $k>1$ 일 때 ∞ 로 발산한다. $0<k<1$ 이면 충분히 큰 n 에 대해 $-1\le a_n\le 0$ 이다. (왜냐하면 $a_1,a_2,\cdots,a_n>0$ 일 때 $a_n=1+(k-1)2^{n-1}$ 이기 때문이다.) 이 때 $a_{n+1}=-a_n-1$ 은 구간 $[-1,0]$ 의 값이므로, $a_{n+2}=a_n$ 이다. 따라서 $\{a_{2n-1}\}$ 은 항상 수렴하지만, $\{a_n\}$ 은 어떤 N에 대해 $a_N=-\dfrac{1}{2}$ 일 때만 수렴한다. (4-2)의 별해에 의해 $x>0$ 인 영역에서 $f^n(x)=(\underbrace{f\ \circ\cdots\circ\ f}_{f\text{가 } n\text{개}})(x)$ 의 그래프 중에서 x 축 아래의 부분은 다음과 같다.



또는



$$\left(P_1=\frac{1}{2},\ P_2=\frac{3}{4},\ P_3=\frac{7}{8},\ P_4=\frac{15}{16},\ P_5=\frac{31}{32}\right)$$

이 중에서 $a_{n+1}=f^n(k)=-\frac{1}{2}$ 인 k의 값은

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4},\quad \frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{5}{8},\quad \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}=\frac{13}{16},\ \cdots,$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}-\frac{1}{2^{n+1}}=1-\frac{3}{2^{n+1}},\ \cdots$$

이다. 따라서 k가 구간 $\left(0,\frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{1}{4},\frac{5}{8}\right)$, $\left(\frac{5}{8},\frac{13}{16}\right)$, $\cdots$ 의 원소일 때 $\{a_n\}$은 발산하지만 $\{a_{2n-1}\}$은 수렴한다. 그러므로 문제의 조건을 만족하는 열린구간은 $\left(\frac{1}{4},\frac{5}{8}\right)$이다.