2015학년도 인하대학교 논술우수자(일반)-자연계
2차 논술 모의고사 문제지

[문제 1] (20점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

> 두 행렬 A, B에 대하여 행렬 A의 열의 개수와 행렬 B의 행의 개수가 같을 때, 행렬 A의 제i행과 행렬 B의 제j열의 성분을 차례대로 각각 곱하여 더한 것을 (i, j)성분으로 하는 행렬을 A와 B의 곱이라 하고, 기호로 AB와 같이 나타낸다. 일반적으로 곱이 정의되는 세 행렬 A, B, C에 대하여 결합법칙 $(AB)C = A(BC)$가 성립하며, 이를 ABC라고 쓴다.

(※) (1,1)성분과 (2,1)성분이 모두 1인 2×2행렬의 집합을 T라고 하자.

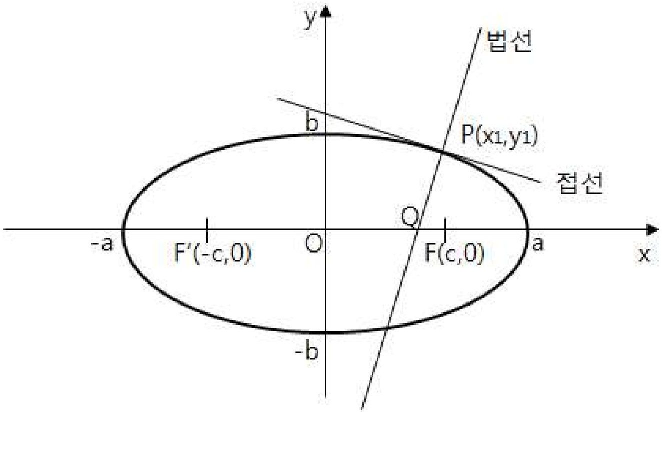
(1-1) T에 속하는 두 행렬 A, B가 $AB \in T$ 를 만족할 때, 행렬 A를 구하시오. (5점)

(1-2) T에 속하는 네 행렬 A, B, C, D가 $AB \in T, CD \in T, ABCD \in T$를 만족한다고 한다. 행렬 CD의 모든 성분의 합이 8일 때, 행렬 $(AD)^2 CB$를 구하시오. (15점)

[문제 2] (25점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

> 곡선 C 위의 점 P에서 곡선에 접하는 접선에 수직이고 점 P를 지나는 직선을 점 P에서 곡선 C의 법선이라 한다.

(※) $a > b > 0$인 상수 a, b에 대하여, 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$의 두 초점을 $F(c, 0), F'(-c, 0)$이라고 하자.



(2-1) 타원위의 임의의 점 $P(x_1, y_1)$ (단, $y_1 \neq 0$)에서의 타원의 법선이 x축과 만나는 점을 Q라고 할 때, Q는 선분 $F'F$ 위의 점임을 보이시오. (15점)

(2-2) 선분 $F'F$ 을 $3:1$로 내분하는 점 Q가 타원의 x축이 아닌 어떤 법선과 x축의 교점이 되도록 하는 필요충분조건을 a, b에 관한 부등식으로 나타내시오. (10점)

[문제 3] (30점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) $a<b$를 만족하는 상수 a,b에 대해 함수 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$의 그래프는 정의역 $[a,b]$의 원소 x와 이에 대응하는 함숫값 $f(x)$의 순서쌍 전체의 집합 $\{(x,f(x))\mid a\le x\le b\}$ 을 뜻한다.

(나) 양의 상수 h에 대해 함수 $f:[-h,h]\to\mathbb{R}$가 주어졌다. 임의의 $x\in[-h,h]$에 대해 평면의 점 $(-x,-f(x))$가 f의 그래프 위의 점이면, 다시 말해서 $f(-x)=-f(x)$이면 f를 기함수라 하고, 이 때 f의 그래프가 원점에 대해 대칭이라고 한다.

(다) 실수 a,b가 상수이고 h가 양의 상수라 하자. 주어진 함수 $f:[a-h,a+h]\to\mathbb{R}$에 대해

$$g(x)=f(x+a)-b \qquad (-h\le x\le h)$$

로 정의된 함수 $g:[-h,h]\to\mathbb{R}$가 기함수이면 f의 그래프가 평면의 점 (a,b)에 대해 대칭이라고 한다.

(※) h는 양의 상수이고 a,b는 상수이다.

(3-1) 함수 $f:[a-h,a+h]\to\mathbb{R}$의 그래프가 평면의 점 (a,b)에 대해 대칭일 필요충분조건은 모든 $x\in[a-h,a+h]$에 대해 아래의 등식이 성립하는 것이다.

$$f(x)+f(2a-x)=A$$

상수 A의 값을 구하고, 그 이유를 설명하시오. (10점)

(3-2) 함수 $f:[a-h,a+h]\to\mathbb{R}$의 그래프가 평면의 점 (a,b)에 대해 대칭일 때 정적분 $\int_{a-h}^{a+h}f(x)dx$의 값을 a나 b 또는 h를 이용하여 나타내고, 그 이유를 설명하시오. (10점)

(3-3) 정적분 $\int_0^{2\pi}\frac{1}{1+2^{\sin x}}dx$의 값을 구하고, 그 이유를 설명하시오. (10점)

[문제 4] (25점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 좌표공간에서 서로 다른 두 점 $A(x_1,y_1,z_1)$와 $B(x_2,y_2,z_2)$를 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}\ \ (\text{단, } x_1\ne x_2,\ y_1\ne y_2,\ z_1\ne z_2)$$

혹은 적당한 매개변수 t에 대해

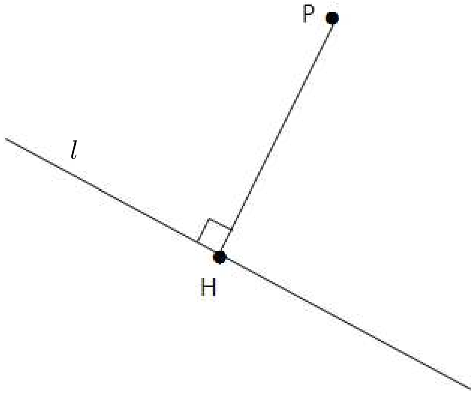
$$\begin{cases}x=x_1+t(x_2-x_1)\\ y=y_1+t(y_2-y_1)\\ z=z_1+t(z_2-z_1)\end{cases}$$

로 표현된다. 또한 좌표공간에서 영벡터가 아닌 벡터 $\vec{n}=(a,b,c)$에 수직인 평면의 방정식은

$$ax+by+cz+d=0$$

으로 주어진다.

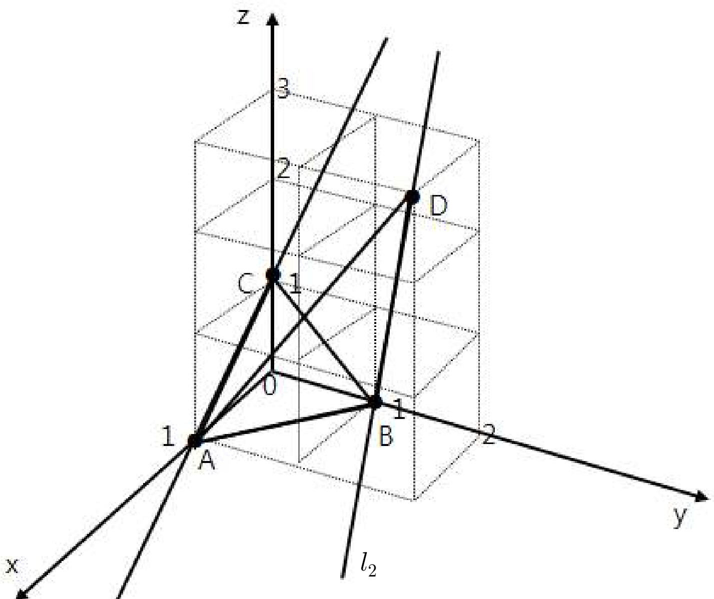
(나) 좌표평면 혹은 좌표공간에서 한 점 P와 P를 지나지 않는 직선 l 사이의 거리는 점 P에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 할 때 선분 PH의 길이이다. 이때, 직선 위의 점 Q 중에서 선분 PQ의 길이가 최소가 되도록 하는 점 Q는 수선의 발 H가 된다.



(다) 두 평면 α, β가 만날 때, 두 평면이 이루는 각의 크기 $\theta\left(0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right)$는 두 평면의 법선벡터가 이루는 각의 크기를 θ_1이라 하면, θ는 $\theta_1, \pi-\theta_1$ 중 크지 않은 값이다. 따라서 $\cos\theta = |\cos\theta_1|$이 성립한다.

(라) 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$에 대하여 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \vec{b} = \overrightarrow{OB}$인 세 점 O, A, B를 잡을 때, $\angle AOB = \theta \ (0 \le \theta \le \pi)$를 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$가 이루는 각의 크기라고 한다. 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$가 이루는 각의 크기가 θ일 때, $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$를 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 내적이라고 하고 기호로 $\vec{a} \cdot \vec{b}$와 같이 나타낸다. 즉 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$이다. 또한 벡터의 내적을 성분을 사용하여 나타낼 수 있다. 좌표공간의 두 벡터 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$에 대해서 코사인법칙을 적용하면 $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$이 성립함을 보일 수 있다.

(※) 좌표공간의 네 점 $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$, $D(1,2,3)$에 대하여 α는 세 점 A, B, C를 지나는 평면이고 β는 세 점 A, B, D를 지나는 평면이라 하자. 또한 l_1은 두 점 A, C를 지나는 직선이고 l_2는 두 점 B, D를 지나는 직선이라 하자.



(4-1) 두 평면 α 와 β 가 이루는 각의 크기를 $\theta \left(0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}\right)$ 라 할 때, $\cos\theta$ 의 값을 구하시오. (10점)

(4-2) 점 P 는 직선 l_1 위의 임의의 점이고 점 Q 는 직선 l_2 위의 임의의 점이라 할 때, 선분 PQ 의 길이의 최솟값을 구하시오. (15점)

2015학년도 인하대학교 논술우수자(일반) 자연계
2차 논술 모의고사 해설 및 예시 답안

1. 출제의도

정상적인 고등학교 수학교과를 이수한 수험생이면 충분하게 풀 수 있는, 철저히 교과서 중심의 문제를 출제하였다. 행렬의 곱 연산, 타원의 기본 성질, 점대칭 그래프와 정적분의 관계, 좌표공간에서 두 평면이 이루는 각 및 평행하지 않고 만나지도 않은 두 직선 사이의 최소거리 등을 잘 이해하고 있으며, 주어진 문제를 논리적으로 분석할 수 있는 능력과 자신의 생각을 논리적이고 합리적으로 표현하는 능력을 평가하고자 하는 의도로 문제를 출제하였다.

2. 주제 분석과 제시문 해설

(가) 주제 분석
[문제 1] : (1,1)성분과 (2,1)성분이 모두 1인 2×2행렬의 집합 T와 행렬의 곱 연산과 연관된 사고 능력을 측정하고자 하였다. (1-1)은 행렬의 곱 연산에 닫혀 있을 조건을 구하는 문제이고 (1-2)는 (1-1)의 내용을 적용하여 제시된 어떤 조건 등과 관련된 문제를 단계적으로 해결하는 문제이다.

[문제 2] : 타원의 방정식의 이해 능력과 이를 이용한 증명 능력을 측정하고자 하였다. (2-1)은 타원 위의 임의의 점에서 타원의 법선과 x축과의 교점은 항상 두 초점 사이에 있음을 보이는 문제이고 (2-2)는 (2-1)의 내용과 타원의 정의로부터 얻어지는 a,b,c의 관계를 적용하여 제시된 조건 등과 관련된 문제를 단계적으로 해결하는 문제이다.

[문제 3] : 그래프의 기하학적 성질을 수식으로 정의할 수 있는데, 이 문제에서는 정의를 이용하여 주어진 함수의 대칭성을 확인하는 능력과 정적분을 계산하는 능력을 측정하고자 하였다. (3-1)은 제시문에 주어진 정의를 활용하여 점에 대한 대칭성을 수식으로 표현하는 문제이다. (3-2)는 그래프의 대칭성과 치환적분법을 활용하여 정적분의 값을 쉽게 계산할 수 있는 사례를 다루었다. 이는 기함수의 정적분을 일반화한 결과이다. (3-3)은 (3-1)과 (3-2)의 내용을 적용하여 실제 정적분의 값을 구하는 사례이다.

[문제 4] : 좌표공간에서 직선의 방정식과 평면의 방정식의 이해 능력과 벡터의 내적의 활용 능력을 측정하고자 하였다. (4-1)은 두 평면이 만날 때, 두 평면이 이루는 각의 코사인 값을 구하는 문제이고 (4-2)는 두 직선이 평행하지도 만나지도 않을 때, 두 직선 사이의 최소거리를 구하는 문제이다.

(나) 제시문 해설
[문제 1] : 제시문 (가)에서는 행렬의 곱의 정의와 행렬의 곱 연산에 대한 결합법칙을 소개하였다.
[문제 2] : 제시문 (가)에서는 곡선 위의 점에서 곡선의 법선에 대한 정의를 주었다.
[문제 3] : 제시문 (가)에서는 함수의 그래프의 정의를 제시하였다. 제시문 (나)에서는 그래프의 원점 대칭성과 기함수의 정의를 수식으로 제시하였다. 제시문 (다)에서는 원점이 아닌 임의의 점에 대해 그래프가 대칭이라는 것의 정의를 제시하였다.
[문제 4] : 제시문 (가)에서는 좌표공간에서 직선의 방정식과 평면의 방정식을 제시하였다. 제시문 (나)에서는 좌표평면 혹은 좌표공간에서 직선과 직선 위에 있지 않는 점 사이의 거리의 정의를 주었다. 제시문 (다)에서는 두 평면이 이루는 각에 대한 정의를 주었다. 제시문 (라)에서는 두 벡터의 내적의 두 가지 정의를 주었다.

(다) 제시문 출처
[문제 1] 제시문 : 『수학1』, 천재교육, 22쪽, 24쪽
[문제 2] 제시문 : 창작
[문제 3] 제시문 (가) : 『수학』, 천재교육, 230쪽
[문제 3] 제시문 (나) : 창작
[문제 3] 제시문 (다) : 창작
[문제 4] 제시문 (가) : 『수학』, 천재교육, 180쪽
[문제 4] 제시문 (나) : 『기하와 벡터』, (주)교학사, 154쪽, 155쪽
[문제 4] 제시문 (다) : 『기하와 벡터』, (주)교학사, 162쪽
[문제 4] 제시문 (라) : 『수학 II』, (주)지학사, 132쪽

3. 논제 해설

[문제 1] : (1-1)에서는 T의 두 원소(2×2 행렬)를 곱(행렬의 곱)하여 그 결과가 다시 T의 원소가 되기 위한 조건을 생각한다. (1-2)는 (1-1)의 내용을 적용하여 제시된 조건을 이용하면 단계적으로 해결할 수 있는 문제이다.

[문제 2] : (2-1)은 타원 위의 점 $P(x_1, y_1)$에서 법선을 구하여 Q의 x좌표가 $-c$와 c 사이에 있음을 보이면 된다. 타원의 기본 성질로부터 두 부등식 $-a < x_1 < a$, $0 < c < a$을 이용하면 보일 수 있다. (2-2)는 (2-1)의 내용과 타원의 정의로부터 얻어지는 성질인 $c^2 = a^2 - b^2$을 적용하는 문제이다.

[문제 3] : (3-2)에서는 치환적분법을 사용하되, (3-1)의 결과를 활용할 수 있는 방식으로 사용하기 위해 $x = 2a - y$라는 치환을 사용하는 것이 핵심이다. (3-3)에서는 피적분함수가 (3-1)의 등식을 만족한다는 것을 파악하는 것이 핵심이다. 상수 a와 b의 값을 알아내는 것도 포함되는데, 구간 $[0, 2\pi]$의 중점 π가 a의 값이라는 것을 알아차리는 것이 출발점이다.

[문제 4] : (4-1)에서는 좌표공간에서 만나는 두 평면이 이루는 각의 코사인 값을 구하는 문제이다. 먼저 세 점을 지나는 평면의 방정식을 각각 구하고, 평면의 법선벡터와 내적을 이용하여 구하는 교과서 내용의 문제이다. (4-2)에서는 평행하지 않고 만나지도 않는 두 직선 사이의 최소거리를 구하는 문제이다. 두 직선 위에서 각각 임의의 한 점씩을 잡고 그 두 점 사이의 거리가 최소라 가정하였을 때, 두 점을 있는 벡터는 반드시 두 직선과 수직임을 알아차리는 것이 출발점이다. 따라서 내적을 이용하여 이 문제를 해결 할 수 있다.

4. 평가 기준

• 주어진 제시문을 정확하게 이해하고 이를 바탕으로 각 논제에서 요구하는 문제를 파악하는 능력
• 고등학교 수학 과목에서 다루는 최소한의 기본 개념을 이해하고 있는 정도
• 논제에서 요구하는 사항을 정확히 이해하고 기존 지식과 제시문의 내용을 바탕으로 논제의 답을 논리적으로 추론하는 능력

5. 예시 답안

[문제 1] (20점)

(1-1) (5점)

$A=\begin{pmatrix}1 & a_1\\ 1 & a_2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & b_1\\ 1 & b_2\end{pmatrix}$이라고 하면, $AB=\begin{pmatrix}1+a_1 & b_1+a_1b_2\\ 1+a_2 & b_1+a_2b_2\end{pmatrix}\in T$이려면, $a_1=a_2=0$이어야 하므로, $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$이다.

(1-2) (15점)

$A=\begin{pmatrix}1 & a_1\\ 1 & a_2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & b_1\\ 1 & b_2\end{pmatrix}$이라고 하면, $AB=\begin{pmatrix}1+a_1 & b_1+a_1b_2\\ 1+a_2 & b_1+a_2b_2\end{pmatrix}\in T$이려면, $a_1=a_2=0$이어야 하고, $AB=\begin{pmatrix}1 & b\\ 1 & b\end{pmatrix}$이다 ($b=b_1$). 마찬가지로 $C=A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$이고, $CD=\begin{pmatrix}1 & d\\ 1 & d\end{pmatrix}$꼴이다. 그런데, 문제의 조건에서 행렬 CD의 모든 성분의 합이 8이므로, $d=3$이다. 또한, $(AB)(CD)\in T$이므로, 같은 논리에 의하여, $AB=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$이므로, $b=0$ 이다. 따라서 $(AD)^2(CB)=(CD)^2(AB)=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 3\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16 & 0\\ 16 & 0\end{pmatrix}$이다.

[문제 2] (25점)

(2-1) (15점)

점 $P(x_1,y_1)$ (단, $y_1\neq 0$)에서의 타원의 접선의 방정식은 $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$이므로, $P(x_1,y_1)$에서의 법선의 방정식은 $-\frac{y_1}{b^2}(x-x_1)+\frac{x_1}{a^2}(y-y_1)=0$이다. 점 Q의 x좌표를 구하기 위해서 이 방정식에 $y=0$을 대입하면, $x=\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)x_1=\frac{c^2}{a^2}x_1$을 얻는다. (단, $c=\sqrt{a^2-b^2}$.) 즉, Q의 좌표는 $\left(\frac{c^2}{a^2}x_1, 0\right)$이다. 이때, $-a<x_1<a$이므로, $-c<\frac{c^2}{a^2}x_1<c$이다.

(2-2) (10점) (2-1)의 계산에서 $\frac{c^2}{a^2}x_1=\frac{c}{2}$가 만족되려면, $x_1=\frac{a^2}{2c}$이어야 한다. 따라서 $\frac{a^2}{2c}<a$일 때, 문제의 조건이 만족된다. 이것은 $a^2<4c^2=4(a^2-b^2)$, 즉, $b<\frac{\sqrt{3}}{2}a$일 때이다.

[문제 3] (30점)

(3-1) (10점)

함수 $g:[-h,h]\to\mathbb{R}$를 $g(x)=f(x+a)-b$로 정의하자. 제시문 (다)에 의해 f의 그래프가 평면의 점 (a,b)에 대해 대칭일 필요충분조건은 g가 기함수인 것이다. 즉, 모든 $-h\le y\le h$에 대해 $g(-y)=-g(y)$이다.

$g(-y)=f(-y+a)-b$이고 $-g(y)=-f(y+a)+b$이므로, 위의 등식을 다시 쓰면

모든 $-h\le y\le h$에 대해 $f(-y+a)+f(y+a)=2b$

이다. 이 등식에서 $x=y+a$로 치환하면 임의의 $a-h\le x\le a+h$에 대해 $f(2a-x)+f(x)=2b$ 임을 얻는다. 따라서 $A=2b$이다.

(3-2) (10점)

정적분의 식에서 $y=2a-x$ $(a-h \le x \le a+h)$로 치환하면

$$\int_{a-h}^{a+h} f(x)dx = -\int_{a+h}^{a-h} f(2a-y)dy = \int_{a-h}^{a+h} f(2a-x)dx$$

이다. $a-h \le x \le a+h$일 때 $f(2a-x)=2b-f(x)$이므로, 이를 위의 등식에 대입하면

$$\int_{a-h}^{a+h} f(x)dx = \int_{a-h}^{a+h} f(2a-x)dx = \int_{a-h}^{a+h} (2b-f(x))dx$$
$$= 4bh-\int_{a-h}^{a+h} f(x)dx$$

이다. 그러므로 $\int_{a-h}^{a+h} f(x)dx = 2bh$이다. 답은 $2bh$.

(3-3) (10점)

$f(x)=\dfrac{1}{1+2^{\sin x}}$ $(0 \le x \le 2\pi)$이라 두면 임의의 $0 \le x \le 2\pi$에 대해

$$f(2\pi-x) = \frac{1}{1+2^{\sin(2\pi-x)}} = \frac{1}{1+2^{-\sin x}} = \frac{2^{\sin x}}{1+2^{\sin x}} = 1-\frac{1}{1+2^{\sin x}} = 1-f(x)$$

이다. 이를 다시 쓰면 $f(x)+f(2\pi-x)=1$ $(0 \le x \le 2\pi)$이다. (3-1)의 결과에 따르면 $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$의 그래프는 평면의 점 $(\pi, 1/2)$에 대해 대칭이다. 따라서 정적분의 값은 (3-2)의 결과에 의해 π이다.

[문제 4] (25점)

(4-1) (10점)

세 점 $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$를 지나는 평면 α의 방정식을

$ax+by+cz+d=0$ ---①

이라 하면, 세 점 A, B, C는 평면 α 위의 점이므로 $a+d=0$, $b+d=0$, $c+d=0$

$a=b=c=-d$ ---②

②를 ①에 대입하여 정리하면 $ax+ay+az-a=0$. 여기서 $a=0$이면 $b=c=d=0$이 되어 평면을 나타내지 않으므로 $a\ne 0$이다. 양변을 a로 나누어 정리하면 구하는 평면 α의 방정식과 평면 α의 법선벡터 $\overrightarrow{m}$는 다음으로 주어진다.

$$\alpha : x+y+z-1=0, \quad \overrightarrow{m}=(1,1,1)$$

마찬가지로, 세 점 $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $D(1,2,3)$를 지나는 평면 β의 방정식을

$ax+by+cz+d=0$ ---③

이라 하면, 세 점 A, B, D는 평면 β 위의 점이므로 $a+d=0$, $b+d=0$, $a+2b+3c+d=0$

$a=b=-d,\ c=\dfrac{2}{3}d$ ---④

④를 ③에 대입하여 정리하면 $ax+ay-\dfrac{2}{3}az-a=0$. 여기서 $a=0$이면 $b=c=d=0$이 되어 평면을 나타내지 않으므로 $a\ne 0$이다. 양변을 a로 나누어 정리하면 구하는 평면 β의 방정식과 평면 β의 법선벡터 $\overrightarrow{n}$는 다음으로 주어진다.

$$\beta : x+y-\frac{2}{3}z-1=0, \quad \overrightarrow{n}=(1,1,-\frac{2}{3})$$

두 평면 α, β가 이루는 각이 θ이므로 제시문 (가)와 제시문 (다)에 의하여

$$\cos\theta = \frac{|\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{m}||\overrightarrow{n}|} = \frac{\frac{4}{3}}{\sqrt{3}\sqrt{\frac{22}{9}}} = \frac{4}{\sqrt{66}} = \frac{2}{33}\sqrt{66}.$$

(4-2) (15점)

직선 l_1 상의 점 P와 직선 l_2 상의 점 Q에서 최소가 된다고 가정하면 $\overrightarrow{PQ}\perp l_1$, $\overrightarrow{PQ}\perp l_2$ 이다. 직선 l_1과 l_2의 매개방정식은 다음과 같다.

$l_1 : (x,y,z) = (1,0,0) + t(-1,0,1) = (1-t,0,t)$

$l_2 : (x,y,z) = (0,1,0) + s(1,1,3) = (s,1+s,3s)$

여기서 $(-1,0,1)$은 l_1의 방향벡터이고, $(1,1,3)$은 l_2의 방향벡터이다. 점 P, Q의 좌표를 각각 $P(1-t,0,t)$, $Q=(s,1+s,3s)$라 두면 $\overrightarrow{PQ}=(s+t-1, s+1, 3s-t)$이다. $\overrightarrow{PQ}$는 두 방향벡터와 각각 수직이므로 내적이 0이다. 따라서 $(s+t-1, s+1, 3s-t)\cdot(-1,0,1)=0$ 이고 $(s+t-1, s+1, 3s-t)\cdot(1,1,3)=0$ 이다.

이를 정리하면 $2s-2t+1=0, 11s-2t=0$이고, 따라서 $s=\frac{1}{9}, t=\frac{11}{18}$ 이며, $\overrightarrow{PQ}=(-\frac{5}{18}, \frac{20}{18}, -\frac{5}{18})$ 이다. 그러므로 구하는 최솟값은

$$|\overrightarrow{PQ}| = \frac{5}{18}\sqrt{1+16+1} = \frac{5}{6}\sqrt{2} \text{ 이다.}$$