수 리 논 술

■ 수학 [100점]

[문제 1] (25점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 두 함수 $f: X \to Y$와 $g: Y \to Z$가 주어졌을 때, 집합 X의 임의의 원소 x에 대하여 함숫값 $f(x)$는 집합 Y의 원소이다. 또한 집합 Y의 원소 $f(x)$에 대하여 함숫값 $g(f(x))$는 집합 Z의 원소이다. 이때 집합 X의 임의의 원소 x에 집합 Z의 원소 $g(f(x))$를 대응시켜 X를 정의역, Z를 공역으로 하는 새로운 함수를 얻을 수 있다. 이렇게 얻은 함수를 두 함수 f와 g의 합성함수라 하고, 기호

$$g \circ f : X \to Z \quad \text{또는} \quad y = g(f(x))$$

로 나타낸다.

(나) 함수 $f(x)$에서 x가 a보다 작은 값을 가지면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면 α를 $x=a$에서 $f(x)$의 좌극한이라고 하며, $\lim_{x \to a-0} f(x) = \alpha$와 같이 나타낸다. 또, x가 a보다 큰 값을 가지면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 β에 한없이 가까워지면 β를 $x=a$에서 $f(x)$의 우극한이라고 하며, $\lim_{x \to a+0} f(x) = \beta$와 같이 나타낸다. 우극한과 좌극한이 모두 존재하더라도 그 값이 서로 같지 않으면, 즉 $\lim_{x \to a+0} f(x) \neq \lim_{x \to a-0} f(x)$이면 극한값 $\lim_{x \to a} f(x)$는 존재하지 않는다.

(다) 함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 $a+h$까지 변할 때, 극한값 $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$가 존재하면, 함수 $y=f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다고 하며, 이 극한값을 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수라 하고, 이를 기호로 $f'(a)$와 같이 나타낸다.

(※) 다음과 같이 함수 $y=f(x)$가 실수 전체의 집합에서 정의되어 있다.

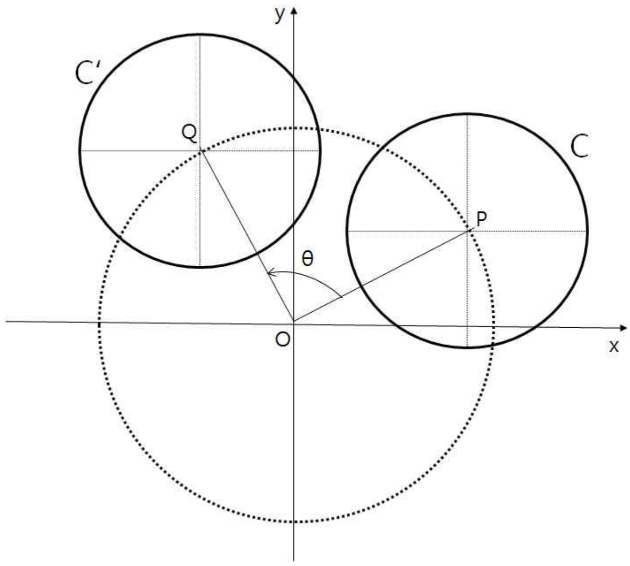
$$f(x) = \begin{cases} x+2 & (x < -1) \\ x^2 & (-1 \le x < 1) \\ 2x-1 & (x \ge 1) \end{cases}$$

(1-1) 합성함수 $g = f \circ f$의 그래프의 개형을 그리고, 미분가능하지 않은 점을 모두 구하시오. (10점)

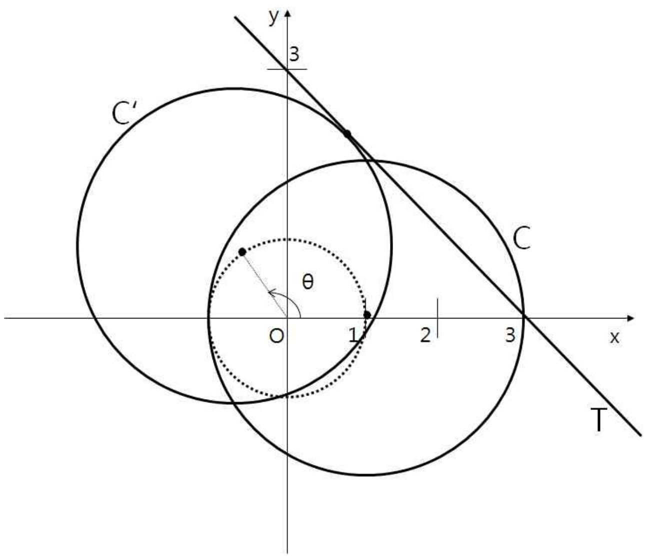
(1-2) 조건 $a_1 = k$와 점화식 $a_{n+1} = f(a_n)$ $(n \ge 1)$으로 정의되는 수열 $\{a_n\}$이 극한값을 가질 k의 범위를 구하시오. (15점)

[문제 2] (25점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 좌표평면 위에 주어진 원 C를 원점을 중심으로 각 θ만큼 회전시키면 반지름은 변하지 않고 원 C의 중심 P가 원점을 중심으로 각 θ만큼 회전된 점 Q를 중심으로 갖는 원 C'이 된다.



(2-1) 방정식 $(x-1)^2+y^2=4$로 주어지는 원을 C, 방정식 $x+y=3$으로 주어지는 직선을 T라고 하자. 원 C를 원점을 중심으로 각 $\theta\ (0 \le \theta < \pi)$만큼 회전 변환시킨 도형을 C'이라고 할 때, T와 C'가 한 점에서 만나게 되는 θ의 값에 대하여, $\cos\theta$의 값을 구하시오. (15점)



(2-2) 방정식 $(x-1)^2+y^2=1$으로 주어지는 원을 K라 하고, $(\pm r, \pm r)$을 꼭짓점으로 갖는 정사각형을 S라 할 때, K를 원점을 중심으로 임의의 각으로 회전시킨 도형과 S의 교점의 개수가 항상 2 이하가 되도록 하는 r의 범위를 구하시오. (10점)

인하대학교 INHA UNIVERSITY

[문제 3] (25점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) (적분과 미분의 관계) 함수 $f(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속일 때,

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad (a \le x \le b)$$

는 $[a, b]$에서 연속이고 (a, b)에서 미분가능하며 $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$이다. 즉,

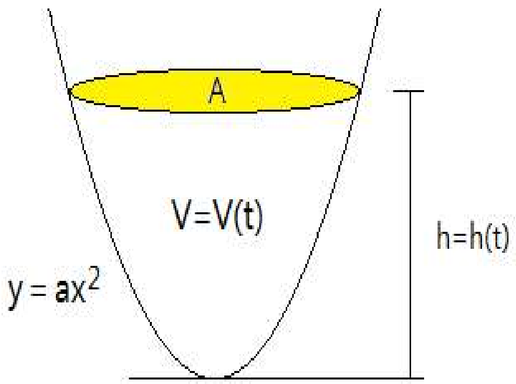
$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x) \quad (a \le x \le b)$$

(나) 미분가능한 두 함수 $y = f(u)$, $u = g(x)$에 대하여 합성함수 $y = f(g(x))$도 미분가능하며, 그 도함수는

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \quad \text{또는} \quad y' = f'(g(x))g'(x)$$

이다.

(※) 양의 상수 a에 대해 $-\sqrt{\frac{10}{a}} \le x \le \sqrt{\frac{10}{a}}$ 에서 정의된 포물선 $y = ax^2$을 y축 둘레로 회전하여 얻은 포물면 모양의 빈 그릇이 있다.



(3-1) 이 그릇에 물이 가득 채워졌을 때 물의 부피를 구하시오. (5점)

(3-2) $t = 0$일 때 이 그릇에 물을 붓기 시작하였다. 시각 t에서 수면의 높이를 $h = h(t)$라 하고, 그릇에 담긴 물의 부피를 $V = V(t)$라 할 때 V가 미분가능하고 항상 $\frac{d}{dt}V(t) = b$ (b는 양의 상수)가 되도록 물을 붓는다. $t = c$일 때 그릇에 물이 가득 채워진다고 하고 h가 t에 관해서 미분가능하다고 가정할 때 $\lim_{t \to c-0} \frac{d}{dt}h(t)$를 구하시오. (10점)

인하대학교
INHA UNIVERSITY

(3-3) 이 그릇에 물이 가득 담겨 있는데, 수면의 넓이에 비례하는 양의 물이 증발하여 물의 부피가 점점 작아진다. 시각 t 에서 그릇에 담긴 물의 부피를 $V=V(t)$ 라 하고, 수면의 높이를 $h=h(t)$ 라 하면 수면의 넓이는 $A=A(h)=A(h(t))$ 로 표현된다. 그러면 상수 $k>0$ 에 대해 $\dfrac{d}{dt}V(t)=-kA$ 가 성립한다. 이 그릇의 물이 완전히 말라버릴 때까지 시간이 얼마나 걸리는가? (단, $V=V(t)$ 와 $h=h(t)$ 가 미분가능하고 $A=A(h(t))$ 는 연속이라 가정한다.) (10점)

[문제 4] (25점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 치환적분법 : 미분가능한 함수 $g(t)$에 대하여 $x=g(t)$로 놓으면

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))g'(t)\,dt$$

이다. 예를 들면, $\int e^{f(\theta)}f'(\theta)\,d\theta$는 $f(\theta)=t$ 로 놓으면 $f'(\theta)\,d\theta = dt$이므로

$$\int e^{f(\theta)}f'(\theta)\,d\theta = \int e^t\,dt = e^t + C = e^{f(\theta)} + C$$

이다.

(나) 정적분의 성질 : 두 함수 $f(\theta)$, $g(\theta)$가 구간 $[a, b]$에서 $f(\theta) \le g(\theta)$이면 $\int_a^b f(\theta)\,d\theta \le \int_a^b g(\theta)\,d\theta$이다.

(다) 함수의 극한에 대한 성질 : $H(x) \le F(x) \le G(x)$이고 $\lim_{x\to\infty} H(x) = \lim_{x\to\infty} G(x) = L$이면 $\lim_{x\to\infty} F(x) = L$이다.

(4-1) $x > 0$일 때,

$$F(x) = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} e^{x\tan\theta}\,d\theta \text{ 와 } G(x) = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} e^{x\tan\theta}\sec^2\theta\,d\theta$$

라고 하자. 이때, $\frac{1}{2}G(x) \le F(x) \le G(x)$임을 증명하시오. (10점)

(4-2) 제시문 (다)와 (4-1)에서 주어진 부등식 관계를 이용하여,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(xF(x))}{x}$$

의 값을 구하시오. (15점)

2015학년도 인하대학교 수시모집 모의 논술고사 수리논술

해설 및 예시 답안

수학 (100점)

1. 출제의도

정상적인 고등학교 수학교과를 이수한 수험생이면 충분하게 풀 수 있는, 철저히 교과서 중심의 문제를 출제하였다. 함수의 극한, 미분계수, 원과 직선의 관계, 정적분과 미분의 관계 등을 잘 이해하고 있으며, 주어진 문제를 논리적으로 분석할 수 있는 능력과 자신의 생각을 논리적이고 합리적으로 표현하는 능력을 평가하고자 하는 의도로 문제를 출제하였다.

2. 주제 분석과 제시문 해설

(가) 주제 분석

[문제 1]은 합성함수의 미분가능하지 않은 점을 구하는 것과 주어진 함수에 의해 정의되는 수열이 극한값을 가질 조건을 구하는 것이다. [문제 2]는 원을 회전시켜 주어진 직선에 접하는 경우와 주어진 정사각형과의 교점의 개수가 2개 이하일 경우에 대한 조건을 구하는 것이다. [문제 3]은 포물면 모양의 빈 그릇에 물이 채워졌을 때, 부피, 일정한 부피의 변화율을 갖도록 물을 붓는 경우 높이의 변화율의 극한값, 물이 완전히 말라버릴 때까지 걸리는 시간 등을 구하는 것이다. [문제 4]는 정적분으로 정의된 두 함수의 부등식 관계를 보이고 이 부등식을 활용하여 함수의 극한을 구하는 것이다.

(나) 제시문 해설

[문제 1]에서 제시문 (가)는 합성함수의 정의, 제시문 (나)는 우극한과 좌극한이 존재하더라도 같지 않으면 극한값은 존재하지 않음, 제시문 (다)는 한 점에서 미분가능에 대한 정의를 각각 설명하였다. [문제 2]의 제시문은 좌표평면 위에 주어진 원 C를 원점을 중심으로 각 θ만큼 회전시키면 반지름은 변하지 않고 원 C의 중심 P가 원점을 중심으로 각 θ만큼 회전된 점 Q를 중심으로 갖는 원이 됨을 설명하였다. [문제 3]에서 제시문 (가)는 정적분과 미분과의 관계, 제시문 (나)는 미분가능한 두 함수의 합성함수의 미분법을 각각 설명하였다. [문제 4]에서 제시문 (가)는 치환적분법, 제시문 (나)는 정적분의 성질, 제시문 (다)는 함수의 극한에 대한 성질 등을 각각 설명하였다.

(다) 제시문 출처

[문제 1]
제시문 (가) :『수학』, 천재문화, 222쪽
제시문 (나) :『수학 II』, (주)지학사, 69쪽; 두산동아, 82쪽
제시문 (다) :『수학 II』, (주)지학사, 113쪽

[문제 2]
제시문은 창작된 것이지만 고등학교 수학 교과서의 수준을 넘지 않는 내용으로 쉽게 이해할 수 있다.

[문제 3]
제시문 (가) :『적분과 통계』, (주)중앙교육진흥연구소, 41쪽
제시문 (나) :『수학 II』, (주)지학사, 132쪽

[문제 4]
제시문 (가) :『적분과 통계』, (주)중앙교육진흥연구소, 23쪽, 25쪽
제시문 (나) :『적분과 통계』, (주)중앙교육진흥연구소, 49쪽
제시문 (가) :『수학 II 익힘책』, (주)금성출판사, 75쪽

3. 논제 해설
[문제 1]은 주어진 함수 f에 대하여 합성함수 $f \circ f$의 그래프를 그리고 미분가능하지 않은 점을 찾고, 그리고 $a_1 = k,\ a_{n+1} = f(a_n)\ (n \geq 1)$으로 정의되는 수열 $\{a_n\}$이 극한값을 가질 조건을 찾는 문제이다. [문제 2]는 원 $(x-1)^2 + y^2 = 4$을 회전시켜 직선 $x+y=3$과 접하는 경우 회전각 θ에 대한 $\cos\theta$를 구하는 문제와 원 $(x-1)^2+y^2=1$을 회전시켜 꼭짓점이 $(\pm r, \pm r)$인 정사각형과의 교점의 개수가 항상 2 이하가 되는 r의 범위를 찾는 문제이다. [문제 3]은 포물선 $y = ax^2$을 y축 둘레로 회전하여 얻은 포물면 모양의 빈 그릇에 물이 가득 채워졌을 때 물의 부피, 부피가 일정하게 물을 붓는 경우 수면의 높이의 변화율의 극한, 그리고 수면의 넓이에 비례하는 양의 물이 증발하여 물의 부피가 점점 작아질 때, 물이 완전히 말라버릴 때까지 걸리는 시간을 구하는 문제이다. [문제 4]는 정적분으로 정의된 두 함수 $F(x) = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} e^{x\tan\theta}\, d\theta$ 와 $G(x) = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} e^{x\tan\theta} \sec^2\theta\, d\theta$의 부등식 관계를 삼각함수의 성질로부터 유도하고 이 부등식을 이용하여 $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(xF(x))}{x}$의 값을 구하는 문제이다.

4. 평가 기준

- 주어진 제시문을 정확하게 이해하고 이를 바탕으로 각 논제에서 요구하는 문제를 파악하는 능력
- 고등학교 수학 과목에서 다루는 최소한의 기본 개념을 이해하고 있는 정도
- 논제에서 요구하는 사항을 정확히 이해하고 기존 지식과 제시문의 내용을 바탕으로 논제의 답을 논리적으로 추론하는 능력

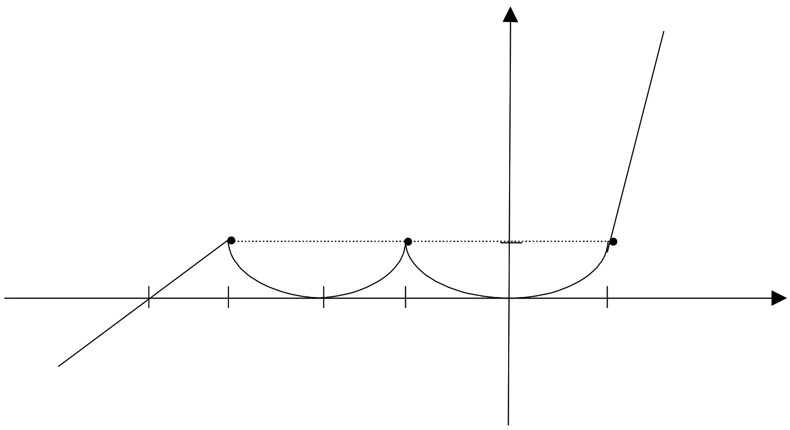
5. 예시 답안

[문제 1] (25점)

(1-1) (10점)

$$g(x)=\begin{cases} x+4 & (x< -3) \\ (x+2)^2 & (-3\le x< -1) \\ x^4 & (-1\le x<1) \\ 4x-3 & (x\ge 1) \end{cases}$$

이므로



좌우 미분계수가 같으므로 $g(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다. 미분가능하지 않은 점은 $x=-3, -1$ 두 개다.

(1-2) (15점)

(i) $k< -1$ 인 경우 : $a_n< -1$ 이면 $a_{n+1}=a_n+2$ 이므로, 수열 $\{a_n\}$ 에서 $-1\le a_m<1$ 인 m 이 존재한다. 그러면, $n>m$ 인 n 에 대하여 $a_{n+1}=a_n^2$ 이므로, $a_n=a_m^{2^{n-m}}$ 은 0 $(-1<a_m<1$ 인 경우) 또는 1 ($a_m=1$ 인 경우)로 수렴한다.

(ii) $-1<k<1$ 인 경우 : $a_n=k^{2^{n-1}}$ 은 0으로 수렴한다.

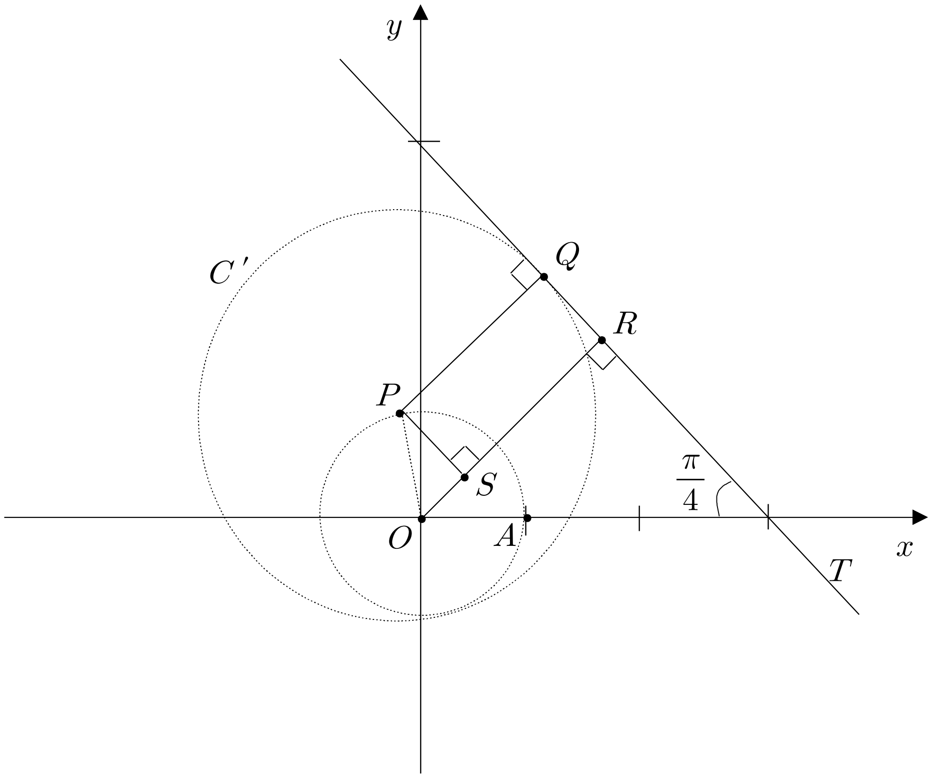
(iii) $k=-1$ 또는 $k=1$ 인 경우 : $a_n=1\ (n\ge 2)$ 이다. 따라서 수렴한다.

(iv) $k>1$ 인 경우 : $a_{n+1}=2a_n-1$ 이고, $a_n=1+(k-1)2^{n-1}$ 이므로 발산한다.

따라서 수열 $\{a_n\}$ 이 극한값을 가질 k 의 범위는 $k\le 1$ 이다.

[문제 2] (25점)

(2-1) (15점)



위의 그림과 같이 회전이동한 원 C' 은 중심이 $P(\cos\theta, \sin\theta)$ 이고 반지름이 $\overline{PQ} = 2$ 인 원이다. 이 원이 직선 T 에 접할 때 위 그림에서 $\overline{OR} = \frac{3}{\sqrt{2}}$, $\angle POS = \theta - \frac{\pi}{4}$ 이므로 $\overline{OS} = \cos(\angle POS) = \cos(\theta - \frac{\pi}{4}) = \frac{3}{\sqrt{2}} - 2$ 이다. 따라서

$$\cos\theta = \cos(\frac{\pi}{4} + (\theta - \frac{\pi}{4})) = \cos\frac{\pi}{4}\cos(\theta - \frac{\pi}{4}) - \sin\frac{\pi}{4}\sin(\theta - \frac{\pi}{4})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{3}{\sqrt{2}} - 2\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \left(\frac{3}{\sqrt{2}} - 2\right)^2} = \frac{3}{2} - \sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-15 + 12\sqrt{2}}$$

이다.

(2-1) 별해

위의 그림과 같이 회전이동한 원 C' 은 중심이 $P(\cos\theta, \sin\theta)$ 이고 반지름이 $\overline{PQ} = 2$ 인 원이다. 중심 $P(\cos\theta, \sin\theta)$ 에서 직선 $T : x + y - 3 = 0$까지의 거리 $\frac{|\cos\theta + \sin\theta - 3|}{\sqrt{2}}$ 가 2이어야 하므로, $\cos\theta + \sin\theta = 3 - 2\sqrt{2}$ 이다. 이때, 좌변은 $\sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$와 같으

므로, $\cos(\theta-\frac{\pi}{4})=-2+\frac{3}{\sqrt{2}}$ 이다. 따라서

$$\cos\theta=\cos(\frac{\pi}{4}+(\theta-\frac{\pi}{4}))=\cos\frac{\pi}{4}\cos(\theta-\frac{\pi}{4})-\sin\frac{\pi}{4}\sin(\theta-\frac{\pi}{4})$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}-2\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\left(\frac{3}{\sqrt{2}}-2\right)^2}=\frac{3}{2}-\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-15+12\sqrt{2}}$$

이다.

(2-2) (10점)

주어진 원 K를 45° 회전한 원 C가 S와 만나는 점의 개수를 생각해보자.

$0<r<\sqrt{2}$ 이면 C와 S의 윗변과 오른쪽 변과 각각 한 번씩 만난다.

그런데 이 범위에서 특히 $1<r<\sqrt{2}$ 인 경우, 원 K에는 원점과의 거리가 S의 꼭짓점에서 원점까지의 거리와 같은 점 P가 존재한다. 즉, $\overline{OP}=\sqrt{2}r$인 점 $P\in K$가 존재한다. 이때, P가 S의 꼭짓점에 오도록 K를 적당히 회전하면, 회전한 원과 S는 세 점에서 만난다. 왜냐하면, 회전한 원의 중심은 S의 내부에 위치하기 때문이다.

$r=\sqrt{2}$ 인 경우에도 C와 S는 S의 꼭짓점 $(\sqrt{2},\sqrt{2})$을 포함해서 3개의 점에서 만난다.

$\sqrt{2}<r<1+\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이면 C와 S는 S의 윗변과 오른쪽 변에서 각각 2번씩 총 4번 만난다.

$r=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이면, C는 S의 윗변과 오른쪽 변의 각각 한 점에서 접하고, $r>1+\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이면, C와 S는 만나지 않는다.

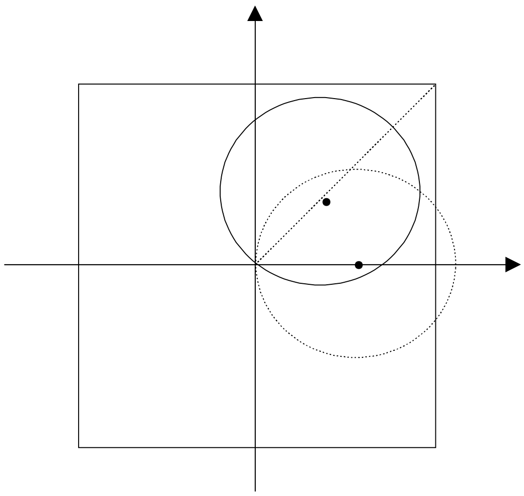
따라서 문제의 조건을 만족하려면 $r\geq 1+\frac{\sqrt{2}}{2}$ 또는 $0<r\leq 1$이어야 한다.

이제 $r\geq 1+\frac{\sqrt{2}}{2}$ 인 경우 K를 $0\leq\theta<\frac{\pi}{4}$ 만큼 회전시키면, 정사각형의 윗변, 아랫변과는 만나지 않고, 오른쪽 변과 기껏해야 2점에서 만나므로, S와의 교점은 2개 이하이다. 마찬가지로 모든 θ값에 대하여 같은 논리로 $S\cap K$의 교점은 2개 이하이다.

마찬가지로 $0<r\leq 1$인 경우 주어진 원을 회전시켰을 때, S와 만나는 점들은 원 K에서 $x\leq 1$인 부분 (반원)이 회전하여 만나는 점들과 같다. K를 $0<\theta<\frac{\pi}{4}$ 만큼 회전시키면, S의 윗변과 한 점에서 만나고 S의 아랫변 또는 오른쪽 변과 한 점에서 만난다. 이 경우 $S\cap K$는 2개의 점이며, 같은 논리에 의해 모든 θ값에 대하여 $S\cap K$는 2개의 점이다.

따라서 구하는 r의 범위는 $0<r\leq 1$ 그리고 $r\geq 1+\frac{\sqrt{2}}{2}$이다.

(참고) r 을 실수 범위에서 풀이한 학생의 경우는 범위를 $0<|r|\le 1$ 그리고 $|r|\ge 1+\sqrt{2}$ 로 구하면 된다. $r=0$ 은 정사각형이 만들어지지 않으므로 답에서 배제한다.



[문제 3] (25점)

(3-1) (5점)

회전체의 부피 공식에 의해 빈 그릇에 물이 가득 채워질 때 물의 부피는 다음과 같다.

$$V=\pi\int_0^{10}\frac{y}{a}dy = \left[\frac{\pi y^2}{2a}\right]_0^{10} = \frac{50\pi}{a}$$

(3-2) (10점)

시각 t 일 때 그릇 안의 물은 $0\le y\le h(t)$ 인 영역에 위치하고,

$V(t)=\pi\int_0^{h(t)}\frac{y}{a}dy = \frac{\pi}{2a}(h(t))^2$이다.

양변을 t 로 미분하면 $b=V'(t)=\frac{\pi}{a}h(t)h'(t)$ 이다. 따라서 $0<t<c$ 일 때 $h'(t)=\frac{ab}{\pi h(t)}$ 이다. $h(c)=10$ 이므로 $\lim_{t\to c-0}h'(t)=\frac{ab}{10\pi}$ 이다.

(3-2) 별해

시각 t 일 때 그릇 안의 물은 $0\le y\le h=h(t)$ 인 영역에 위치하고,

$V(t)=\pi\int_0^{h}\frac{y}{a}dy$ 이다. 양변을 h 로 미분하면 $\frac{dV}{dh}=\frac{\pi h}{a}$ 이다. $\frac{dV}{dt}=b$ 이므로

$\frac{dh}{dt} = \frac{dh}{dV}\frac{dV}{dt} = \frac{ab}{\pi h}$ 이다. $h(c) = 10$ 이므로 $\lim_{t \to c-0} h'(t) = \frac{ab}{10\pi}$ 이다.

(3-3) (10점)

시각 t 일 때 그릇 안의 물은 $0 \le y \le h(t)$ 인 영역에 위치하고,

$V(t) = \int_0^{h(t)} A(y)dy$ 이다. $F(s) = \int_0^{s} A(y)dy$ 라 두면 $V(t) = F(h(t))$ 이다.

$F'(s) = A(s)$ 이므로 $V'(t) = F'(h(t))h'(t) = A(h(t))h'(t)$ 이다.

$V'(t) = -kA(h(t))$ 라는 가정에 의해 $h'(t) = -k$ 이다. $h(0) = 10$ 이므로

$h(t) = 10 - kt$ 이다. 따라서 $t = \frac{10}{k}$ 일 때 물이 완전히 말라버린다.

(3-3) 별해

$h = ax^2$ 로부터 수면의 반지름 $x = x(h) = \sqrt{\frac{h}{a}}$ 을 얻는다. 따라서

$A = A(h) = \pi x^2 = \frac{\pi h}{a}$ 이다. 그러므로 가정에 의해 $V'(t) = -\frac{k\pi}{a}h(t)$ ---(1)이다. 한편, 그릇의 물은 $0 \le y \le h = h(t)$ 인 영역에 존재하므로

$$V(t) = \int_0^{h(t)} A(y)dy = \int_0^{h(t)} \frac{\pi y}{a}dy = \frac{\pi}{2a}(h(t))^2$$

이다. 양변을 미분하면 $V'(t) = \frac{\pi}{a}h(t)h'(t)$ ---(2)이다. (1)과 (2)로부터 $h'(t) = -k$ 이다. $h(0) = 10$ 이므로 $h(t) = 10 - kt$ 이다. 따라서 $t = \frac{10}{k}$ 일 때 물이 완전히 말라버린다.

[문제 4] (25점)

(4-1) (10점)

$-\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4}$ 이므로 $\frac{1}{\sqrt{2}} \le \cos\theta \le 1$, $1 \le \sec\theta \le \sqrt{2}$ 이다.

따라서 $1 \le \sec^2\theta \le 2$ 이므로 $e^{x\tan\theta} \le e^{x\tan\theta}\sec^2\theta \le 2e^{x\tan\theta}$ 이다.

$-\frac{\pi}{4}$ 에서 $\frac{\pi}{4}$ 까지 적분을 취하면 $\frac{1}{2}G(x) \le F(x) \le G(x)$ 이다.

(4-2) (15점)

제시문 (가)로부터 $G(x) = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} e^{x\tan\theta} \sec^2\theta \, d\theta = \left[\frac{1}{x} e^{x\tan\theta} \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{e^x - e^{-x}}{x}$ 를 얻는다.

$x > 0$ 이고 ln 은 증가함수이므로 (4-1)에서 주어진 부등식 $\frac{1}{2} G(x) \le F(x) \le G(x)$ 으로

부터 $\frac{1}{x} \ln\left(\frac{1}{2} x\, G(x)\right) \le \frac{1}{x} \ln\left(x\, F(x)\right) \le \frac{1}{x} \ln\left(x\, G(x)\right)$ 을 얻는다.

한편 $\frac{1}{x} \ln\left(\frac{1}{2} x\, G(x)\right) = \frac{1}{x} \ln \frac{1}{2} + \frac{1}{x} \ln\left(x\, G(x)\right)$ 이고 $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \ln \frac{1}{2} = 0$ 이므로

구하는 극한값은 제시문 (다)에 의해

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \ln\left(x\, F(x)\right) &= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \ln\left(x\, G(x)\right) \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \ln\left(e^x - e^{-x}\right) \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \ln\left(e^x (1 - e^{-2x})\right) = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{\ln(1 - e^{-2x})}{x}\right) = 1
\end{aligned}$$