2013학년도

인하대 자연계 모의논술
실제 답안 평가

인 하 대 학 교

수학 : 수학과학우수자

<총평>

[논제 1]은 수학적 귀납법을 이용하여 증명하는 것이 편한데, 대부분의 학생들이 이 문제는 잘 해결해 주었다. 다만, ‘수학적 귀납법을 이용하여 증명하겠다.’는 서술을 먼저 하고 시작하는 것이 좋겠다.

[논제 2]의 핵심은 n이 커짐에 따라 a_n이 무한히 커진다는 것을 증명하는 것이다. 학생들 대부분이 그 핵심 부분을 당연한 것이라고 생각하고 그냥 넘어 갔다. 처음 세 개 항 정도를 계산해 보고는 그냥 무한히 커진다고 주장하거나, 증가수열이므로 무한히 커진다고 주장하는 경우가 많았다. 당연해 보이는 것을 논리적으로 정확하게 서술하는 것이 부족하다는 느낌이다.

[논제 3]은 AB의 길이를 코사인 법칙을 써서 θ의 식으로 나타낸 후, 이것을 미분한 값이 최대가 되는 순간을 찾는 문제이다. 대부분의 학생들이 식으로 나타내는 부분까지는 잘 하였지만, 이 값을 제곱을 하여 식을 간단히 한 후 두 번 미분하는 경우도 있었고, 미분한 값을 구한 후, 별다른 진행 없이 그냥 $\theta=\pi/2$일 때, 최대변화율을 갖는다고 주장하는 경우도 있었다. 두 번 미분한 값이 0이 되는 점을 찾은 후, 그 점보다 작을 때는 이차 미분한 값이 양수이고 그 점보다 클 때는 음수라는 사실로부터 일차 미분한 값이 최댓값을 갖는다고 정확히 서술한 학생이 드물었다. 논술 문제에서는 핵심이 되는 부분이 무엇인지를 잘 파악하고 그 부분에 대해서는 논리적으로 정확하게 서술하는 것이 필요하다.

<실제 답안 평가>

논제 1 : 우수 답안

[논제 1]

수학적 귀납법을 이용한다.

$n=1$일 때 $S_1=2-\frac{1}{a_2-1}$인데 $a_2=1+a_1$이고 $a_1=1$, 그리고 $S_1=\frac{1}{a_1}$이므로

$S_1=2-\frac{1}{a_1}=1=\frac{1}{a_1}$로 $S_n=2-\frac{1}{a_{n+1}}$은 $n=1$일 때 성립한다.

$n=k$일 때 $S_n=2-\frac{1}{a_{n+1}-1}$이 성립한다고 하면

$S_k=2-\frac{1}{a_{k+1}-1}=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}$이다.

$n=k$일 때 성립한다고 했으니 $n=k+1$일 때도 성립하면 $S_n=2-\frac{1}{a_{n+1}-1}$이 성립한다.

$S_{k+1}=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}+\frac{1}{a_{k+1}}$이다.

$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots\frac{1}{a_k}=S_k=2-\frac{1}{a_{k+1}-1}$인데 $a_{k+1}=1+a_1a_2\cdots a_k$, $a_{k+1}-1=a_1a_2\cdots a_k$이므로

$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}=2-\frac{1}{a_1a_2\cdots a_k}$로 나타낼 수 있다.

$S_{k+1}=2-\frac{1}{a_1a_2\cdots a_k}+\frac{1}{a_{k+1}}=2-\frac{a_{k+1}-a_1a_2\cdots a_k}{a_1a_2\cdots a_{k+1}}$인데 $a_{k+1}=1+a_1a_2\cdots a_k$이므로

$a_{k+1}-a_1a_2\cdots a_k=1$,

$a_1a_2\cdots a_k=a_{k+1}-1$이다.

따라서 $S_{k+1}=2-\frac{1}{a_{k+1}-1}$로 나타낼 수 있다.

$n=1$, $n=k$, $n=k+1$일 때 모두 성립하므로

$S_n=2-\frac{1}{a_{n+1}-1}$이다.

수학적 귀납법의 서술이 아주 정확히 이루어졌다. 특히 증명을 시작할 때 ‘수학적 귀납법을 이용한다.’는 것을 언급한 것이 좋다.

논제 1 : 우수 답안

논제 1)

i) $n=1$ 일때 $S_1 = \frac{1}{a_1} = 1$ 이고 $2 - \frac{1}{a_{1+1}-1} = 2 - \frac{1}{2-1} = 1$

이므로 $S_1 = 2 - \frac{1}{a_2 - 1}$ 이 성립한다.

ii) $n=k$ 일때 $S_n = 2 - \frac{1}{a_{n+1}-1}$ 이 성립한다고 가정하면

$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k} = 2-\frac{1}{a_{k+1}-1} = 2-\frac{1}{1+a_1a_2\cdots a_k - 1} = 2 - \frac{1}{a_1a_2\cdots a_k}$

이 성립하고 양변에 $\frac{1}{a_{k+1}}$ 를 더하면

$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}+\frac{1}{a_{k+1}} = 2 - \frac{1}{a_1a_2\cdots a_k}+\frac{1}{a_{k+1}}$

$= 2 - \frac{a_{k+1} - a_1a_2\cdots a_k}{a_{k+1}(a_1a_2\cdots a_k)} = 2 - \frac{1}{a_{k+1}(a_1a_2\cdots a_k)} = 2 - \frac{1}{a_1a_2\cdots a_k a_{k+1}}$

$= 2 - \frac{1}{a_{k+2}-1}$ 이 성립한다.

따라서 $S_{k+1} = 2 - \frac{1}{a_{k+2}-1}$ 이 성립하므로

$S_n = 2-\frac{1}{a_{n+1}-1}$ 은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

수학적 귀납법을 이용한 증명의 형식을 잘 갖추고 있다. 다만, 이 명제를 수학적 귀납법을 이용하여 증명할 것이라는 말을 하고 증명을 시작하는 것이 좋겠다.

논제 2 : 아쉬운 답안

[논제 2]

$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(2 - \frac{1}{a_{n+1}-1}\right)$

$a_n = 1+a_1a_2\cdots a_{n-1}$, $a_1 = 1$ 이다. $a_2=2, a_3=3, a_4=7,$ 로 a_n은 n이 증가할수록 커지므로 a_n은 무한대로 발산한다.

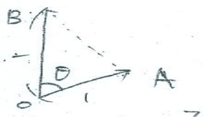
$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ 이므로 $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-1) = \infty$ 가 성립한다.

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_{n+1}-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\infty} = 0$ 이므로 $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{a_{n+1}-1}\right) = 2$

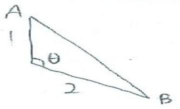
$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = 2$

n이 커질 때 a_n이 무한히 커진다는 것을 논리적으로 증명하지 않고 a_1, a_2, a_3만 계산하고는 그냥 a_n이 무한히 커진다고 주장하고 있다. 주어진 조건으로부터 $a_{n+1} - a_n > 1$ 임을 보임으로써 $a_n > n$ 임을 보일 수 있다. 따라서 a_n은 무한히 커진다. 이외에도 여러 가지 방법으로 $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ 임을 보일 수 있다.

논제 2 : 아쉬운 답안
[논제 2] $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{a_{n+1}-1}\right)$ $a_n = 1 + a_1 a_2 \cdots a_{n-1}$, $a_1 = 1$ 이다. $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 7$, 로 a_n은 n이 증가할수록 커지므로 a_n은 무한대로 발산한다. $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ 이므로 $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-1) = \infty$가 성립한다. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_{n+1}-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\infty} = 0$ 이므로 $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{a_{n+1}-1}\right) = 2$ $\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = 2$
대부분의 학생들이 그랬듯이 이 학생도 a_1, a_2, a_3만 계산해 보고는 그냥 a_n이 무한히 커진다고 주장하고 있다. 논술 시험에서는 문제의 핵심이 되는 부분은 논리적으로 분명히 증명해야 한다.

논제 3 : 우수 답안
[논제3] 중심을 O. 시침의 끝을 A. 분침의 끝을 B, 두 바늘이 이루는 각도를 θ라 하면 $(0 \le \theta \le \pi$  이고 $\overline{AB}^2 = 1^2 + 2^2 - 2\times1\times2\cos\theta$ 이므로 $\overline{AB} = \sqrt{5-4\cos\theta}$ 각도 θ는 시간에 비례하므로 시간 대신 각도에 대해 $\overline{AB}$를 미분하면 $\frac{d\overline{AB}}{d\theta} = \frac{4\sin\theta}{2\sqrt{5-4\cos\theta}} = \frac{2\sin\theta}{\sqrt{5-4\cos\theta}}$ 가 각도에 따른 $\overline{AB}$의 변화율이다. $\overline{AB}$의 변화율이 가장 커질 때는 $\frac{2\sin\theta}{\sqrt{5-4\cos\theta}}$가 최대값을 가질 때이므로 극대값과 양 끝값을 비교한다. θ가 0일 때는 0이고 π일 때는 0이다. 극대값을 구하면, $\frac{2\cos\theta\sqrt{5-4\cos\theta} - 2\sin\theta\frac{2\sin\theta}{\sqrt{5-4\cos\theta}}}{5-4\cos\theta} = 0$ 일 때 극값을 가진다. 분모는 0이 아니므로 $\frac{10\cos\theta - 8\cos^2\theta - 4\sin^2\theta}{\sqrt{5-4\cos\theta}}$, $10\cos\theta - 8\cos^2\theta - 4\sin^2\theta = 0$ 이다. $\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta$ 이므로 $-8\cos^2\theta - 4\sin^2\theta + 10\cos\theta = -4\cos^2\theta + 10\cos\theta - 4 = 0$ $2\cos^2\theta - 5\cos\theta + 2 = (2\cos\theta - 1)(\cos\theta - 2) = 0$ 에서 $-1 \le \cos\theta \le 1$ 이므로 $\cos\theta = \frac{1}{2}$ $\cos\theta$ $\frac{1}{2}$의 좌우에서 (+)에서 (−)로 바뀌므로 극대값을 갖는다 $\overline{AB} = \sqrt{5-4\cos\theta}$ 에 대입하면 $\overline{AB} = \sqrt{3}$. $\overline{AB}$의 길이가 가장 빨리 증가하는 순간의 $\overline{AB}$의 길이는 $\sqrt{3}$이다
모든 수식 계산을 했을 뿐만 아니라 수식 사이사이에 필요한 서술들을 매우 잘 하였다. 특히, 마지막 부분에서 "$\cos\theta = 1/2$의 좌우에서 (+)에서 (−)로 바뀌므로 극댓값을 갖는다."는 말은 필요한 말이다. 다른 학생들은 단순히 두 번 미분한 값이 0이 되는 순간의 θ를 찾아서 그때 최대순간변화율을 갖는다고 주장한 반면, 이 학생은 필요한 말이 무엇인지 알고 있다. 다만, "$\theta = \pi/2$ 좌우에서 (+)에서 (−)로 바뀐다."는 말이 보다 정확한 말이다.

논제 3 : 아쉬운 답안



코사인법칙으로 $\overline{AB}$ 를 구한다.

$1^2+2^2-2\cdot1\cdot2\cos\theta = \overline{AB}^2 = 5-4\cos\theta$.

$\overline{AB} = \sqrt{5-4\cos\theta}$ $(\because \overline{AB}\ge 0)$

길이가 가장 빨리 증가하는 순간은 속력이 최대이므로, 양변 미분하면

$\overline{AB}' = \frac{1}{2}(5-4\cos\theta)^{-\frac{1}{2}}\times 4\sin\theta = \frac{2\sin\theta}{\sqrt{5-4\cos\theta}}$

$\frac{\pi}{2}$에서 속력 최대 이므로 $\sqrt{5-4\cos\frac{\pi}{2}} = \sqrt{5}$

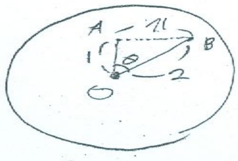
$\therefore \overline{AB} = \sqrt{5}$

$\overline{AB} = \sqrt{5-4\cos\theta}$ 라는 식을 올바로 세우고 이 길이가 가장 빨리 증가하는 순간은 이 길이를 미분한 값이 최대가 되는 때라는 것도 올바로 이해하고 있다. 또한 미분한 값을 올바로 구하였다. 하지만 마지막 부분에서 별다른 근거 없이 $\theta=\pi/2$일 때 미분한 값이 최대라고 주장하고 있는데 그것은 옳지 않다. 실은, $\overline{AB}$ 를 두 번 미분한 값이 0이 되는 순간을 구하여야 올바른 답을 구할 수 있다.

논제 3 : 아쉬운 답안

논제 3]

<그림 1>과 같이 시계의 중심을 O라 잡고
△ABO를 그리고 $\overline{AB} = x$ 라 두자.



<그림 1> 주어진 조건의 시계

코사인법칙에 의하여

$x^2 = 1^2+2^2-2\cdot1\cdot2\cdot\cos\theta$

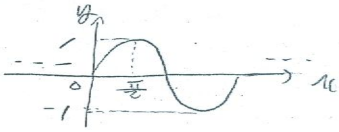
$= 5-4\cos\theta$ 가 성립한다.

따라서 $x = \sqrt{5-4\cos\theta}$ $(\because x>0)$ ... ①

한편, x가 가장 빨리 증가하는 순간은 각 θ에 대한 x의 변화율이 가장 큰 순간이므로 $x^2 = 5-4\cos\theta$ 에서 θ에 대해 미분하면

$2x\frac{dx}{d\theta} = 4\sin\theta$ $\quad\therefore \frac{dx}{d\theta} = \frac{4\sin\theta}{2x} = \frac{2\sin\theta}{x}$

$-1\le\sin\theta\le1$ 에서 $\sin\theta=1$ 일 때 $\frac{dx}{d\theta}$가 최대가 되므로
오른쪽 $\sin\theta$ 그래프에서 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 임을
알 수 있다.



<그림 2> $\sin\theta$ 그래프

따라서 $\overline{AB}$의 길이가 가장 빨리 증가하는 순간의
$\overline{AB}$의 길이는 ① 식에 의해

$\overline{AB} = \sqrt{5-4\cos\theta} = \sqrt{5-4\cos\frac{\pi}{2}} = \sqrt{5}$

AB의 길이를 θ의 식으로 올바로 나타냈지만 $\overline{AB} = \sqrt{5-4\cos\theta}$ 에 대하여 $\overline{AB}^2$의 최대순간변화율을 구하는 것으로 변형하여 문제를 풀었으나 그것은 옳지 않다. $\overline{AB}^2 = 5-4\cos\theta$가 되어 미분한 값을 구하는 것이 용이하고 $\overline{AB}^2$이 최대가 되는 것은 $\overline{AB}$가 최대가 되는 때와 일치하지만 최대순간변화율을 구할 때는 그렇게 되지 않는다.