2013학년도

인하대 자연계 모의논술 실제 답안 평가

인 하 대 학 교

수학 : 일반우수자

<총평>

[논제 1]은 부등식 $x^2+y^2 \le 1$의 영역에서 $x+y$의 최댓값과 최솟값을 구하는 과정을 통하여 기본교과지식(직선 밖의 한 점에서 직선에 이르는 거리, 원 위의 한 점에서 접선의 방정식, 직각이등변삼각형과 피타고라스 정리 등)의 적용능력을 평가하는 문제이다. 고등학교 수학 교과서에서 많이 다루는 문제였기에 대부분 올바른 답을 제시하였다. 하지만 $x+y=k$로 놓고, k는 직선 $y=-x+k$의 "y절편"이라는 설명 없이 직선 $y=-x+k$가 단위원에 접할 때의 그림을 제시하고 최대, 최소가 생긴다고 언급한 답안이 많았다. 이러한 유형의 문제는 최종적인 답은 물론 그 답을 얻기 위한 풀이과정이 논리적으로 올바른지를 평가하기 때문에 풀이과정의 제시에도 유의하여야 한다.

[논제 2]는 일차변환에 의해 변환된 도형의 식을 구하는 과정을 통하여 기본교과지식(일차변환과 도형)의 응용능력을 평가하는 문제이다. 주어진 일차변환을 나타내는 행렬($A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$라 하자)을 구하지 못한 답안은 거의 없었다. 일부 답안은 행렬 A가 역행렬을 갖는 경우($ab \neq 1$)만 변환된 도형의 식을 구하였고, 대부분의 답안은 행렬 A가 역행렬을 갖지 않는 경우($ab=1$)도 답을 제시했는데, 이 과정에서 a, b는 음이 아닌 정수라는 조건($a=1=b$)을 적용하지 않아(감점의 요인) 제시된 답이 주로 원점을 지나는 직선 $y=bx$ 혹은 $y=\frac{1}{a}x$(기본교과지식 내용)이었다. 실제, 행렬 A가 역행렬을 갖지 않는 경우, 평면에 놓인 단위원은 원점을 지나는 선분으로 변환된다. [논제 2]에 앞서 [논제 1]이 주어진 이유를 생각했다면 출제자의 의도를 파악했을 것이다.

[논제 3]은 평면도형의 일종인 타원을 통하여 미분, 적분의 활용능력, 특히 적분과정에서 치환을 통한 삼각함수의 적분능력을 평가하는 것이다. 이 문제의 풀이과정은 크게 다음 세 단계로 나눌 수 있다.

(1) 미분(혹은 다른 방법)을 통하여 접선의 방정식과 접점을 구하는 단계
(2) 구하고자 하는 넓이를 정적분으로 표현하는 단계
(3) 치환을 통하여 삼각함수를 적분하는 단계

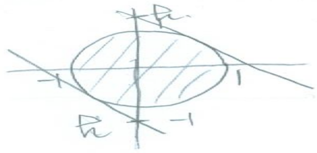
채점 결과는 다음과 같다.
(A) 아예 포기하거나 (1)단계에 못 미치는 답안 (약 35%)
(B) (1)단계만 푼 답안 (약 20%)
(C) (2)단계까지 푼 답안 (약 35%)
(D) 마지막 (3)단계까지 푼 답안 (약 10%)

이중 (2)단계까지 해결하고 적분을 해결하지 못한 (C) 그룹 35%의 답안은 공통적으로 치환을 못한 것이다. 이 부류에 속한 학생들은 여러 가지 적분 기법을 익히고 연습함으로써 보다 향상된 점수를 기대할 수 있는 잠재력이 있다고 생각된다. 한편 (A), (B) 그룹에 속하는 55%의 학생들은 좀 더 기본에 충실한 공부가 필요해 보인다.

<실제 답안 평가>

논제 1 : 우수 답안

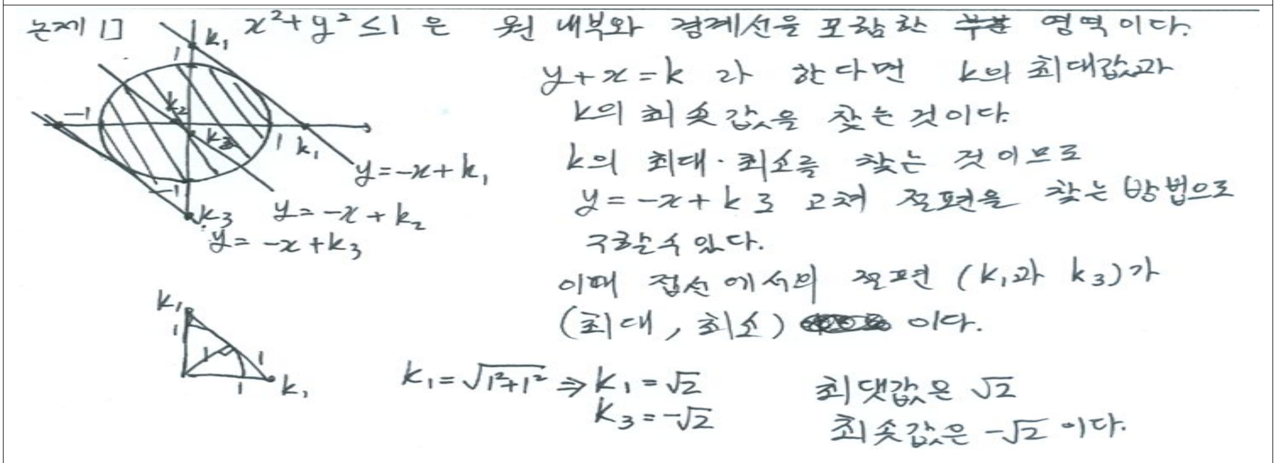
논제1) 부등식 $x^2+y^2\le 1$ 영역 D는 원의 넓이 이므로 $x+y$의 최댓값과 최솟값은 영역 D에 접하는 기울기가 -1인 1차함수의 y절편 값이다



$x+y$의 최댓값, 최솟값을 k라 두면 $x+y=k$와 원 $x^2+y^2=1$의 원점과의 거리가 $x^2+y^2=1$의 반지름인 1이다
이때 어떤 1차함수 $ax+by+c=0$과 어떤 한점 (a',b')과의 거리공식은
$\frac{|aa'+bb'+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 이다
$x+y-k=0$ $(0,0)$
$\frac{|-k|}{\sqrt{2}}=1$ $\therefore k=\pm\sqrt{2}$
그러므로 $x+y$의 최댓값은 $\sqrt{2}$이고 최솟값은 $-\sqrt{2}$이다

많은 학생들이 작성한 대표적인 형태이다. 즉 $x+y=k$로 놓고 k는 직선 $y=-x+k$의 y절편이기 때문에 이 직선이 원 $x^2+y^2=1$에 접할 때 최대, 최소를 갖는다는 사실을 부등식 $x^2+y^2\le 1$의 영역과 직선 $y=-x+k$을 그림으로 보여주었다. 그리고 k값을 구하는 과정은 점과 직선 사이의 거리 공식을 활용하여 결과를 얻었다. 하지만 "부등식 $x^2+y^2\le 1$의 영역 D는 원의 넓이"라는 표현은 감점의 요인이 될 수도 있다. 이것을 "부등식 $x^2+y^2\le 1$의 영역 D는 경계를 포함한 단위원의 내부"라는 표현으로 바꾸었으면 한다.

논제 1 : 우수 답안


논제 1] $x^2+y^2\le 1$ 은 원 내부와 경계선을 포함한 ~~부분~~ 영역이다.

$y+x=k$ 라 한다면 k의 최대값과 k의 최솟값을 찾는 것이다.

k의 최대·최소를 찾는 것이므로 $y=-x+k$로 고쳐 절편을 찾는 방법으로 구할 수 있다.

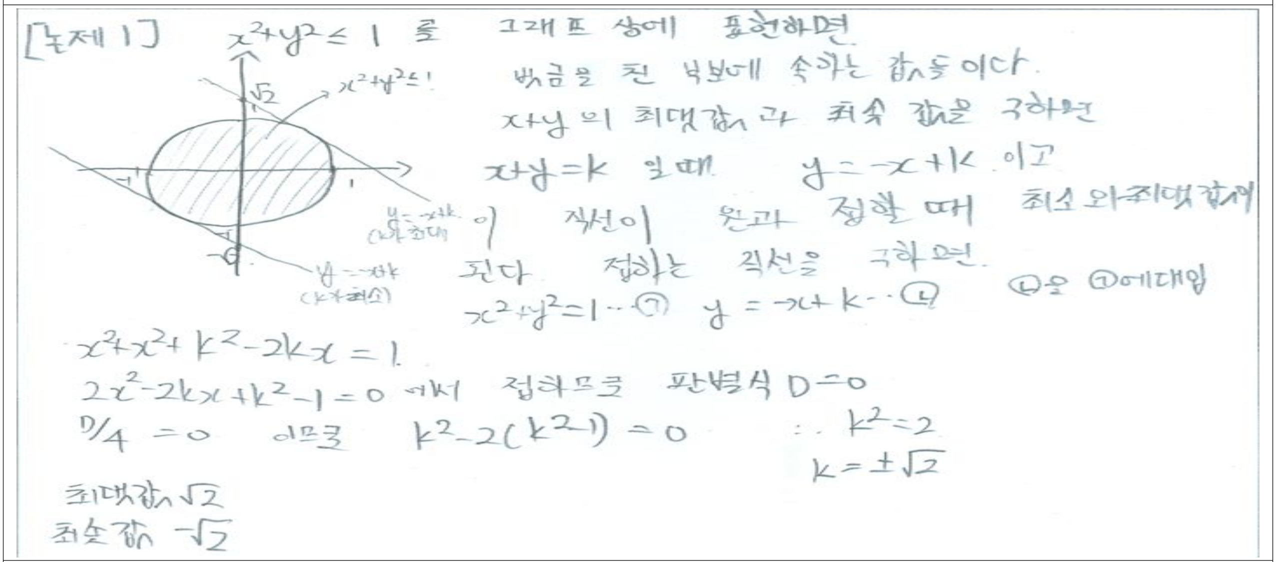
이때 접선에서의 절편 (k_1과 k_3)가 (최대, 최소) 이다.

$k_1=\sqrt{1^2+1^2} \Rightarrow k_1=\sqrt{2}$, $k_3=-\sqrt{2}$

최댓값은 $\sqrt{2}$ 최솟값은 $-\sqrt{2}$ 이다.

$x+y=k$로 놓고 k는 직선 $y=-x+k$의 y절편이기 때문에 이 직선이 원 $x^2+y^2=1$에 접할 때 최대, 최소를 갖는다는 사실을 부등식 $x^2+y^2\le 1$의 영역과 직선 $y=-x+k$을 그림으로 보여주었다. 그리고 k값을 구하는 과정은 직각이등변삼각형과 피타고라스 정리를 활용하여 결과를 얻었다. 하지만 두 번째 그림인 직각이등변삼각형에 대한 설명이 없어 감점의 요인이 될 수도 있다. 본인이 당연한 것으로 생각하여 설명 없이 그림으로 보여주고 진행하는 것은 논술 시험에서 아주 위험한 생각이다.

논제 1 : 아쉬운 답안


[논제 1] $x^2+y^2\le 1$ 를 그래프 상에 표현하면 빗금을 친 부분에 속하는 값들이다.

$x+y$의 최댓값과 최솟값을 구하면

$x+y=k$ 일 때 $y=-x+k$ 이고

이 직선이 원과 접할 때 최소와 최댓값이 된다. 접하는 직선을 구하면

$x^2+y^2=1 \cdots ㉠$ $y=-x+k \cdots ㉡$ ㉡을 ㉠에 대입

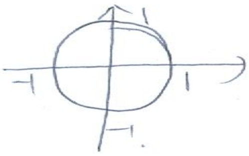
$x^2+x^2+k^2-2kx=1$

$2x^2-2kx+k^2-1=0$ 에서 접하므로 판별식 $D=0$

$D/4=0$ 이므로 $k^2-2(k^2-1)=0$ $\therefore k^2=2$, $k=\pm\sqrt{2}$

최댓값 $\sqrt{2}$
최솟값 $-\sqrt{2}$

$x+y=k$로 놓고, 직선 $y=-x+k$가 원 $x^2+y^2=1$에 접할 때 최댓값과 최솟값을 가진다는 사실을 부등식 $x^2+y^2\le 1$의 영역과 직선 $y=-x+k$을 그림으로 보여주었다. 또한 k값을 구하는 과정은 이차방정식이 중근을 갖는 조건(판별식$=0$)을 활용하여 결과를 얻었다. 하지만, 최대, 최소가 직선이 원에 접할 때 생긴다는 이유가 빠져있어 감점의 요인이다. 그림과 함께 "k가 직선 $y=-x+k$의 y 절편"임을 언급하여 이유를 분명히 말해주는 것이 좋다.

논제 1 : 아쉬운 답안
[논제1] $x^2+y^2 \le 1$ $x+y$의 최대, 최소를 구해야 하므로. $x^2+y^2=1$의 영역을 먼저 구해 보면 그림과 같이 된다.      여기서 $x+y=k$ 라고 하면 $y=-x+k$ 즉, k는 기울기가 -1인 직선의 y절편이 되므로 k의 최댓값은 기울기가 -1인 직선이 단위원에   윗쪽에 접할 때 y절편값이 최댓값이고. 아래쪽에 접할 때 y절   편값이 최솟값이다. 중심이 원점이고 기울기를 알고 있으므로   접선방정식 $y=mx \pm r\sqrt{m^2+1}$에 대입을 해 보면 $m=-1$ ~~...~~ 이고 $r=1$이므로 $y=-x \pm 1\sqrt{1+1} = -x \pm \sqrt{2}$ 이다. $\therefore$ $k=\sqrt{2}$ 가 최댓값 $k=-\sqrt{2}$ 가 최솟값이 된다.
$x+y=k$로 놓고 k는 직선 $y=-x+k$의 y절편이기 때문에 직선 $y=-x+k$이 원 $x^2+y^2=1$에 접할 때 최댓값과 최솟값을 가진다는 사실을 언급하였고, k값을 구하는 과정은 접선의 식을 활용하여 결과를 얻었다. 하지만 "$x^2+y^2 \le 1$ $x+y$의 최대, 최소"라는 표현을 "부등식 $x^2+y^2 \le 1$의 영역에서 $x+y$의 최대, 최소"라는 말로 바꾸고, 그림은 경계를 포함한 단위원의 내부에 빗금으로 표시하고, 직선 $y=-x+k$을 접하도록 그려주는 것이 더 좋은 답안이다.

논제 2 : 우수 답안

[논제2]

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

i) $ab-1 \neq 0$

$$\frac{1}{ab-1} \begin{pmatrix} b & -1 \\ -1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$x = \frac{b}{ab-1}x' - \frac{1}{ab-1}y'$

$y = \frac{-1}{ab-1}x' + \frac{a}{ab-1}y'$ 이다.

이것을 $x^2+y^2=1$에 대입하면

$$\frac{1}{(ab-1)^2}\left(b^2x'^2 - 2bx'y' + y'^2\right) + \frac{1}{(ab-1)^2}\left(x'^2 - 2ax'y' + a^2y'^2\right) = 1$$

$(b^2+1)x^2 - 2(a+b)xy + (a^2+1)y^2 = (ab-1)^2$ 을 구할수 있다.

ii) $ab-1=0$, 즉 $a=1$, $b=1$ ($\because a>0, b>0$ 인 정수)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$x' = x+y$

$y' = x+y$

$\therefore x' = y'$

$y = x - x'$ 이고, 원 $x^2+y^2=1$ 의 영역의 점에서의 일차변환 이다

$y = x - x'$ 와 $(0,0)$의 거리가 1보다 작거나 같다 $\frac{|-x'|}{\sqrt{2}} = 1$ 이므로 $-\sqrt{2} \leq x' \leq \sqrt{2}$.

같은 방식으로 $-\sqrt{2} \leq y' \leq 2$ 옮겨지는 방정식은 $y = x$ ($-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$, $-\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2}$)

출제자가 요구하는 핵심 포인트를 정확히 찾아내었으며, 동시에 결론을 얻는 과정을 논리적으로 잘 설명하고 있다. 일차변환을 나타내는 행렬 $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$이 역행렬을 갖는 경우($ab \neq 1$)와 역행렬을 갖지 않는 경우($ab = 1$, 조건으로부터 $a = 1 = b$)로 나누어 변환된 도형을 각각 구하였다. 특히, 역행렬을 갖지 않는 경우, [논제 1]의 결과를 잘 활용한 모범답안이다.

논제 2 : 아쉬운 답안

[논제 2] $f : (x, y) \to (ax+y, x+by)$ $\Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

(1) A^{-1}가 존재할때, $ab-1 \neq 0$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{ab-1} \begin{pmatrix} b & -1 \\ -1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$x = \frac{bx'-y'}{ab-1}$ ...... ①

$y = \frac{-x'+ay'}{ab-1}$ .... ②

$x^2+y^2=1$ ... ③

①, ②를 ③에 대입하면

$\left(\frac{bx'-y'}{ab-1}\right)^2 + \left(\frac{-x'+ay'}{ab-1}\right)^2 = 1$

$\frac{b^2x'^2 - 2bx'y' + y'^2}{(ab-1)^2} + \frac{x'^2 - 2ax'y'}{(ab-1)^2} = 1$

$\frac{(b^2+1)x'^2 - 2(a+b)x'y' + (a^2+1)y'^2}{(ab-1)^2} = 1$

$\boxed{\therefore (b^2+1)x^2 - 2(a+b)x'y' + (a^2+1)y^2 = a^2b^2 - 2ab + 1}$

(2) A^{-1}가 존재하지 않을 때 → $ab-1=0$ $ab=1$

$\therefore a=1, b=1$ ($\because a, b$는 음이아닌 정수)

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 에 $a=1, b=1$ 대입하면

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$x' = x+y$

$y' = x+y$

$y' = x'$

$\boxed{\therefore y = x}$

논제 2 : 아쉬운 답안

[논제2] 일차변환 $f(x+y) \to (ax+y, x+by)$를 행렬 F로 나타내면

$F : \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$ $\therefore \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ ($x'y'$은 변환된 점)

i) $ab-1 \neq 0$ 즉, $ab \neq 1$ 인 경우

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{ab-1} \begin{pmatrix} b & -1 \\ -1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{ab-1} \begin{pmatrix} bx-y \\ -x+ay \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

위 행렬을 $x^2+y^2=1$ 에 대입하면

$\left(\frac{1}{ab-1}\right)^2 (bx-y)^2 + \left(\frac{1}{ab-1}\right)^2 (-x+ay)^2 = 1$

$(bx-y)^2 + (-x+ay)^2 = (ab-1)^2$

$(b^2+1)x^2 - 2(a+b)xy + (a^2+1)y^2 = (ab-1)^2$

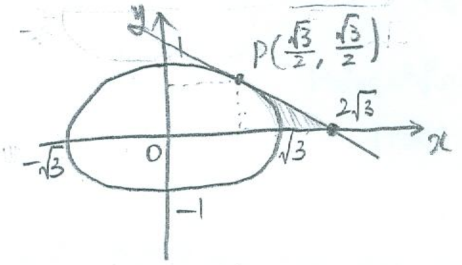
ii) $ab-1=0$ 즉 $ab=1$인 경우 ab는 음이 아닌 정수이므로 $a=1, b=1$이다

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ $\therefore \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

좌표평면 위에 모든 점은 $y=x$로 옮겨진다.

$\therefore x^2+y^2=1$ 은 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 나 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$로 옮겨진다

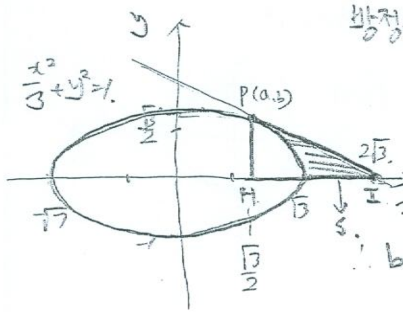
일차변환을 나타내는 행렬 $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$이 역행렬을 갖는 경우($ab \neq 1$)와 역행렬을 갖지 않는 경우($ab=1$, 조건으로부터 $a=1=b$)로 나누어 변환된 도형을 각각 구하였다. 하지만 역행렬을 갖지 않는 경우, 출제자의 의도를 파악하지 못하여 [논제 1]의 결과를 활용하지 못한 답안이다.

논제 3 : 우수 답안
3. 점 P의 좌표를 $P(x_p, y_p)$라 하면, 점 P를 접점으로 하여 타원 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$에 접하는 접선의 방정식은 $\frac{x_p}{3}x+y_py=1 \cdots ㉠$ ㉠의 x절편이 $x=2\sqrt{3}$이므로 $(2\sqrt{3}, 0)$을 대입하면 $x_p=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 한편, 점 P는 타원 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$ 위의 점이므로 $\frac{x_p^2}{3}+y_p^2=1$ $\frac{3}{3\times4}+y_p^2=1$ $\therefore y_p=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ 접선이 두 개가 나오지만 구하고자 하는 넓이는 둘 중 어떤 접선으로 하던지 똑같기 때문에 점 P의 좌표를 $P(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$이라 하면  구하고자 하는 넓이가 위 그래프의 색칠된 부분이므로 구하는 넓이를 S라 하면, $S=\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\sqrt{3}}\sqrt{1-\frac{x^2}{3}}\,dx$ 한편, $x=\sqrt{3}\sin\theta$로 치환하면 $\frac{dx}{d\theta}=\sqrt{3}\cos\theta$ $S=\frac{9}{8}-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{1-\sin^2\theta}\times\sqrt{3}\cos\theta\right)d\theta$ $=\frac{9}{8}-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{3}\cos^2\theta\,d\theta$ $=\frac{9}{8}-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos2\theta\right)d\theta$ $=\frac{9}{8}-\frac{\sqrt{3}}{6}\pi+\frac{3}{8}$ $=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$ 따라서, 구하고자 하는 넓이는 $\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$ (답) $\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$
사고력, 표현력, 계산력 모든 부분에서 우수하며 완벽한 답안이다.

논제 3 : 우수 답안

논제 3.

P를 (a,b)라 가정하면 점P에서 타원의 접선의 방정식은 $\frac{ax}{3}+by=1$ 이고, x절편은 $2\sqrt{3}$ 이므로,



$\frac{a}{3}\times 2\sqrt{3}=1$ 이다. ∴ $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 또 (a,b)는 타원 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$ 위에 점임으로 $\frac{a^2}{3}+b^2=1$ 이고

∴ $b=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이다. (P는 제1사분면 위의 점 이라 가정)

접선의 방정식을 구하면 $\frac{\sqrt{3}}{6}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y=1$ ... ① 이다.

타원과 접선 및 x축으로 둘러 싸인 도형의 넓이를 S라 가정하면

$S=\left(2\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}-\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\sqrt{3}}\sqrt{1-\frac{x^2}{3}}\,dx$ ... ② 이다.

$x=\sqrt{3}\sin\theta$ ... ③ 라 가정하고 ③식을 θ에 대해 미분하면

$\frac{dx}{d\theta}=\sqrt{3}\cos\theta$ ... ④ 또, $\frac{\sqrt{3}}{2}\le x\le\sqrt{3}$ 일때 $\frac{1}{2}\le\sin\theta\le 1$ 임으로,

θ값의 범위는 $\frac{\pi}{6}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$. 이다

따라서 $\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\sqrt{3}}\sqrt{1-\frac{x^2}{3}}\,dx$를 ③식으로 치환하여 치환적분법으로 정리하면

$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\times\sqrt{3}\cos\theta\times d\theta$ 이고 정리하면 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{3}\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta$ 이고,

값을 구하면, $\sqrt{3}\left(\left[\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\right)=\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)$

∴ ②식에서 S를 구하면 $S=\frac{9}{8}-\frac{\sqrt{3}\pi}{6}-\frac{3}{8}=\frac{6}{8}-\frac{\sqrt{3}\pi}{6}$

$\boxed{\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{3}}{6}\pi}$

사고력과 표현력은 완벽하고, 계산력 또한 마지막에 부호 틀린($\frac{3}{8}$을 $-\frac{3}{8}$으로) 흠이 있긴 하나 거의 완벽하다. 계산 마지막 부호의 오류는 감점의 소지가 있으니 신중을 기해야겠다.

논제 3 : 아쉬운 답안

[논제3] 타원 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$ 의 x절편이 $2\sqrt{3}$이므로 두개의 직선이 나오는데 타원의 접선의 방정식을 구해보면

$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$ 에서 $a^2=3$ $b^2=1$이고 이 직선이 $(2\sqrt{3}, 0)$을 지나므로

$y=mx\pm\sqrt{3m^2+1}$ $(2\sqrt{3}, 0)$을 대입하면 $2\sqrt{3}m=\mp\sqrt{3m^2+1}$

양변을 제곱하면

$12m^2=3m^2+1$

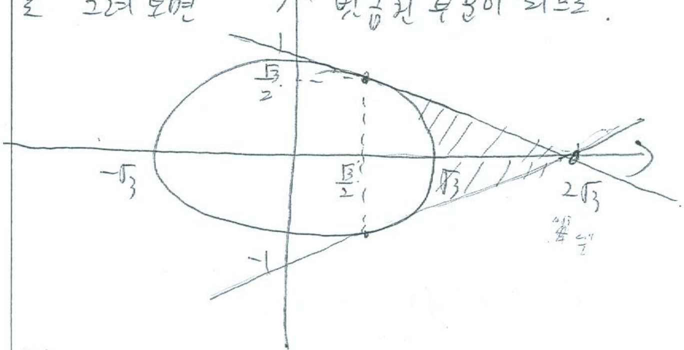
$9m^2=1$

$\therefore m=\pm\frac{1}{3}$ 이되므로

$y=\frac{1}{3}(x-2\sqrt{3})$

$y=-\frac{1}{3}(x-2\sqrt{3})$] 두개의 직선이 나오게 된다.

이때 타원, 직선, x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 그래프로 그려보면 빗금친 부분이 되므로.



접점의 좌표를 구해서 직선으로 둘러싸인 삼각형에서 타원을 접점부터 $\sqrt{3}$까지 적분해서 빼서 2배한것이 빗금친 부분의 넓이 이므로

접점의 x좌표는 $\cancel{\frac{1}{3}(x-2\sqrt{3})}$ $\frac{x^2}{3}+\left(\frac{1}{3}(x-2\sqrt{3})\right)^2=1$ 에서 x값이므로.

$3x^2+(x-2\sqrt{3})^2=9$.

$4x^2-4\sqrt{3}x+3=0$.

$x=\frac{+2\sqrt{3}\pm\sqrt{0}}{4}$ $\therefore$ x좌표는 $\frac{\sqrt{3}}{2}$이 된다.

삼각형의 넓이는 $=\frac{1}{2}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9}{8}$ 이고.

$\frac{\sqrt{3}}{2}$부터 $\sqrt{3}$까지 x축과 타원으로 둘러싸인 부분의 넓이 $=-\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$ 이므로.

정답은 $2\left\{\frac{9}{8}-\left(-\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{\sqrt{3}}{6}\pi\right)\right\}$

$=2\left\{\frac{9+\sqrt{3}}{8}+\frac{\sqrt{3}}{6}\pi\right\}$

$=\underbrace{\frac{9+\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{3}\pi}$ // 정답.

$\frac{\sqrt{3}}{2}$부터 $\sqrt{3}$까지 타원을 적분해서 빼면 되므로

$\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\sqrt{3}}\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{3}}\right)dx$. 에서 $\frac{x}{\sqrt{3}}=\sin t$로 치환하면

$x=\sqrt{3}\sin t$

$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 x}\cdot\sqrt{3}\cos t\,dt$ $\sqrt{3}\cdot\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{2}=\sqrt{3}$이고

$\frac{dx}{dt}=\sqrt{3}\cos t$ 이므로.

$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{3}\cos^2 t\,dt$

$=\sqrt{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2t+1}{2}\,dt$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2t+t\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$

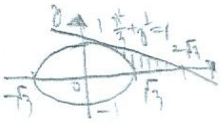
6/6

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\left\{\frac{1}{2}\left(0-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\right\}$

$=-\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$

표현력은 우수하나 사고력과 계산력은 약간의 아쉬움이 있다. 접점을 구할 때 모범답안에 비하여 다소 복잡한 과정을 거쳤으며, 이는 감점의 요인은 아니지만 보완해야할 부분이다. 또한 문제에서 요구하는 부분의 넓이를 이해 못하여 구해야 하는 답의 두 배를 구하였으며, 이는 감점의 요인이다. 한편, 계산 마지막 단계에서 실수가 있으며 끝까지 신중을 기했으면 하는 아쉬움이 생긴다.

논제 3 : 아쉬운 답안

논제(3) 

$\frac{x^2}{3}+y^2=1$ 위의 점에서 기울기가 m인 접선의 방정식을 구해보면 $y=mx\pm\sqrt{3m^2+1}$ 이다. x절편의 값은

$\mp\frac{\sqrt{3m^2+1}}{m}=2\sqrt{3}$, $\mp\sqrt{3m^2+1}=2\sqrt{3}m$, $3m^2+1=12m^2$ $\therefore m^2=\frac{1}{9}$ 이므로

$m=\pm\frac{1}{3}$, 따라서 구하고자하는 직선은 $y=\pm\frac{1}{3}x\mp\sqrt{\frac{4}{3}}=\pm\frac{1}{3}x\mp\frac{2}{3}\sqrt{3}$

$\pm$ 부호에 관계없이 구하고자 하는 넓이는 같으므로 부호를 $+$로 설정하자. 빗금친 영역의 넓이는 $\sqrt{3}$을 기준으로 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$과 직선이 만나는 점부터 $2\sqrt{3}$까지의 범위에서 구한다. $\frac{x^2}{3}+\frac{1}{9}x^2-\frac{4}{9}\sqrt{3}x+\frac{4}{3}=1$, $\frac{4}{9}x^2-\frac{4}{9}\sqrt{3}x+\frac{1}{3}=0$에서 $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$이다. 타원의 방정식은 $y=\sqrt{1-\frac{x^2}{3}}$ 이므로

$\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\sqrt{3}-\sqrt{1-\frac{x^2}{3}}\right)dx+\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)x$가 영역의 넓이이다. 이것은

$\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{2\sqrt{3}}-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\sqrt{3}\,dx-\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\sqrt{3}}\sqrt{1-\frac{x^2}{3}}\,dx$ 와 같은데 $\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\sqrt{3}}\sqrt{1-\frac{x^2}{3}}\,dx$에서 $x=\sqrt{3}\sin\theta$로

치환하면 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2\theta}\,dx$ 인데 $x=\sqrt{3}\sin\theta$에서 $dx=\sqrt{3}\cos\theta\,d\theta$이므로

$1-\sin^2\theta=\cos^2\theta$ 이므로 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{3}\cos^2\theta\,d\theta$ 이다.

$\sqrt{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta=\sqrt{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta$ 이므로 $\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

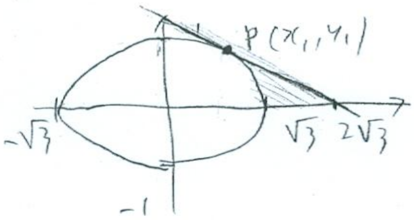
$\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{2\sqrt{3}}-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\sqrt{3}\,dx=\left[-\frac{1}{6}x^2+\frac{2}{3}\sqrt{3}x\right]_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{2\sqrt{3}}=\frac{9}{8}$, 따라서 구하고자 하는 넓이는

$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)+\frac{9}{8}=\frac{\sqrt{3}}{6}\pi+\frac{3}{4}$ 이다.

사고력, 표현력, 계산력 모든 부분에서 대체로 우수하나 약간의 미흡함이 있다. 넓이를 구함에 있어 애초에 삼각형의 넓이에서 타원의 넓이를 뺄 생각을 했더라면 마지막 계산에서 실수가 없지 않았을까 하는 생각이 든다. 또한 삼각형의 넓이는 적분하지 않고 직접 계산하는 것이 시간과 실수를 줄여줄 것이다. 표현력에 있어서는 좀 더 산뜻하게 서술할 수 있는데, 다소 소설이나 수필처럼 말이 많은 게 흠이다. 물론 이것이 감점의 요인은 아니다.

논제 3 : 아쉬운 답안

타원 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$ 의 그래프를 그리면



타원 위의 한 점 P를 1사분면 위에 있고
$P(x_1, y_1)$라 하면
점 P를 지나는 접선의 방정식은

$\frac{x_1 x}{3}+y_1 y=1, \quad x_1 x+3y_1 y=3$

이 그래프가 점 $(2\sqrt{3}, 0)$을 지나므로

$2\sqrt{3}x_1=3 \quad x_1=\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

점 P는 또한 타원 위의 점이므로

$\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{3}+y_1^2=1 \quad y_1^2=\frac{3}{4} \quad y_1=\frac{\sqrt{3}}{2} \ (y>0)$

$P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

따라서 접선의 방정식은 $y=-\frac{1}{3}x+\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 이다.

$\frac{x^2}{3}+y^2=1$ 에서 $y=\sqrt{-\frac{x^2}{3}+1}$ 이다.

따라서 구하는 영역의 넓이는

$$\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{2\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{3}x+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)dx-\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\sqrt{3}}\sqrt{-\frac{x^2}{3}+1}\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{6}x^2+\frac{2\sqrt{3}}{3}x\right]_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{2\sqrt{3}}-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\pi-\frac{3}{4}\right)$$

$$=\frac{9}{8}+\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{3}}{3}\pi=\frac{15}{8}-\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$$

사고력은 우수하나 표현력은 상당한 문제점이 있다. 계산력은 무난해 보인다. 표현력의 가장 큰 문제점은 적분 과정을 보여주지 않았다는 점이다. 계산 결과를 미루어 짐작하건데 연습지에 계산한 후 답을 옮겨 적은 것으로 추정되지만, 이 과정이 치환을 통한 삼각함수의 적분이며 이를 얼마나 잘 수행하는지 보고 싶은 것이 이 문제의 의도의 일부이다. 다시 말하면 중요한 부분을 생략한 것이다. 또한 삼각함수 공식을 적용하는 과정에서 1/2을 빠뜨린 것으로 추측된다.