논술고사 출제 의도 및 답안 (자연계열 II)

문제 1

[문제 1] 함수 $f(\theta)=-\frac{2}{3}(\cos^3\theta-\sin^3\theta)+3(\cos\theta-\sin\theta)$에 대하여 다음 물음에 답하시오. [20점]

(1) 실수 θ에 대하여 $t=\cos\theta+\sin\theta$라 할 때, $f'(\theta)$를 t에 관한 다항식으로 나타내시오.

(2) 함수 $f(\theta)$의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

문제 1 - 출제 의도

고등학교 수학교육과정의 기본개념인 도함수의 계산과 다항식의 인수분해를 이용해 주어진 함수의 최댓값과 최솟값을 구하는 문제이다. 치환과 인수분해를 통해 주어진 식을 간략히 표현하는 수리적 능력, 도함수의 계산과 성질을 이해하고 활용하는 응용력, 그리고 풀이과정을 논리적으로 설명하는 표현능력을 평가한다.

문제 1 - 출제 근거

가) 교육과정 근거

적용 교육과정	교육과학기술부 고시 제 2011-361호 [별책8] “수학과 교육과정”

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행연도	쪽수
고등학교 교과서	고등학교 수학 I	황선욱 외	좋은책신사고	2016	28-41
	고등학교 미적분 I	이준열 외	천재교육	2016	138-149
	고등학교 미적분 II	우정호 외	동아출판	2016	76-85, 96-104, 109-111, 131-136

	고등학교 미적분 II	이준열 외	천재교육	2016	67-79, 92-114, 125-130

문제 1 - 채점 기준

문항		배점
1-(1)	실수 θ에 대하여 $t=\cos\theta+\sin\theta$라 할 때, $f'(\theta)$를 t에 관한 다항식으로 나타내시오	10
	삼각함수의 미분법과 합성함수의 미분법에 의해, 도함수 $f'(\theta)=2\cos^2\theta\sin\theta+2\sin^2\theta\cos\theta-3(\cos\theta+\sin\theta)$를 구함 $=(2\cos\theta\sin\theta-3)(\cos\theta+\sin\theta)$	5
	$t^2=\cos^2\theta+\sin^2\theta+2\cos\theta\sin\theta=1+2\cos\theta\sin\theta$를 이용하여 도함수를 t에 대한 다항식으로 아래와 같이 표현함 $f'(\theta)=(t^2-4)t=t^3-4t$	5
1-(2)	함수 $f(\theta)$의 최댓값과 최솟값을 구하시오	10
	$[0,2\pi)$ 구간에서 함수 $f(x)$의 최댓값, 최솟값을 찾음	2
	$t^2-4<0$이고, $f'(\theta)=t(t^2-4)=0$의 필요충분조건은 $t=\cos\theta+\sin\theta=0$임을 통해, 함수 $f(\theta)$가 $\theta=\frac{3\pi}{4}$ 그리고 $\frac{7\pi}{4}$ 에서 극값을 가짐을 찾음	4
	위에서 찾은 극값을 통해 함수 $f(\theta)$ 의 최댓값은 $\frac{8}{3}\sqrt{2}$ 이고, 최솟값은 $-\frac{8}{3}\sqrt{2}$ 임을 찾음	4

문제 1 - 예시 답안

1-(1) 실수 θ에 대하여 $t=\cos\theta+\sin\theta$라 할 때, $f'(\theta)$를 t에 관한 다항식으로 나타내시오.

(풀이) 삼각함수의 미분법과 합성함수의 미분법에 의해, 도함수는 아래와 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= 2\cos^2\theta\sin\theta+2\sin^2\theta\cos\theta-3(\cos\theta+\sin\theta) \\ &= (2\cos\theta\sin\theta-3)(\cos\theta+\sin\theta) \end{aligned}$$

$t^2=\cos^2\theta+\sin^2\theta+2\cos\theta\sin\theta=1+2\cos\theta\sin\theta$를 이용하여 도함수를 t에 대한 다항식으로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$f'(\theta)=(t^2-4)t=t^3-4t$$

1-(2) 함수 $f(\theta)$의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

(풀이) 함수 $f(x)$는 주기가 2π인 주기함수이고, 실수 전체에서 미분가능하다. 따라서 $[0,2\pi)$ 구간에서 함수 $f(x)$의 최댓값, 최솟값을 찾으면 된다. 한편 함수 $f(x)$는 극값을 갖는 점에서 최댓값, 최솟값을 갖는다.

$t^2=(\cos\theta+\sin\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta \le 2$에서 삼각함수의 덧셈정리

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,\ \alpha=\beta$이면, $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$를 적용하면

$t^2=(\cos\theta+\sin\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta=1+\sin2\theta\le 2$이므로, $t^2-4<0$이고,

$f'(\theta)=t(t^2-4)=0$의 필요충분조건은 $t=\cos\theta+\sin\theta=0$이다.

$t=0$일 때, $t^2=1+\sin2\theta=0$이고, $\sin2\theta=-1$이다.

함수 $f(\theta)$는 따라서 $\theta=\frac{3\pi}{4}$ 그리고 $\frac{7\pi}{4}$에서 극값을 갖는다. 극값은 다음과 같이 계산된다.

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{2}{3}\left(\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3\right)+3\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{8}{3}\sqrt{2}$$
$$f\left(\frac{7\pi}{4}\right)=-\frac{2}{3}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3\right)+3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{8}{3}\sqrt{2}$$

따라서 함수 $f(\theta)$의 최댓값은 $\frac{8}{3}\sqrt{2}$이고, 최솟값은 $-\frac{8}{3}\sqrt{2}$이다.

문제 2

[문제 2] 첫째항이 1인 수열 $\{a_n\}$이 있다. 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \left(\cos \frac{\pi}{2^{n+1}}\right) a_n$$

일 때, 다음 물음에 답하시오. [40점]

(1) $a_4 = \dfrac{1}{2^3 \sin \dfrac{\pi}{2^4}}$ 임을 보이시오.

(2) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n = \dfrac{1}{2^{n-1} \sin \dfrac{\pi}{2^n}}$ 이 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 보이시오.

(3) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$의 값을 구하시오.

문제 2 - 출제 의도

고등학교 수학의 중요한 부분인 수열과 삼각함수의 극한에서 배우는 여러 가지 성질들을 이해하고 이들을 활용할 수 있는지를 묻는 문제이다. 주어진 수식을 만족하는 수열의 값을 삼각함수의 덧셈정리와 수학적 귀납법을 이용하여 유도할 수 있는지를 평가하고자 한다.

문제 2 - 출제 근거

가) 교육과정 근거

적용 교육과정	교육과학기술부 고시 제 2011-361호 [별책8] “수학과 교육과정”

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행연도	쪽수
고등학교 교과서	고등학교 수학 II	조도연 외	천재교육	2016	163-167
	고등학교 미적분 I	우정호 외	동아출판	2017	12-17
	고등학교 미적분 II	김원경 외	비상교육	2016	75-93

문제 2 - 채점 기준

	문항	배점
3-(1)	$a_4 = \dfrac{1}{2^3 \sin \dfrac{\pi}{2^4}}$ 임을 보이시오	10
	주어진 수식 $a_{n+1} = \left(\cos \dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right) a_n$ 을 반복적으로 적용하여 아래의 수식을 얻음 $a_4 = \cos\left(\dfrac{\pi}{2^4}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{2^3}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{2^2}\right) a_1$	2
	삼각함수의 덧셈정리 $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$, $\alpha=\beta$ 이면, $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ 를 이용하여 a_4를 사인함수로 표현함 $a_4 = \dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2^3}\right)}{2\sin\left(\dfrac{\pi}{2^4}\right)} \cdot \dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2^2}\right)}{2\sin\left(\dfrac{\pi}{2^3}\right)} \cdot \dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)}{2\sin\left(\dfrac{\pi}{2^2}\right)}$	6
	약분을 통해 $a_4 = \dfrac{1}{2^3 \sin \dfrac{\pi}{2^4}}$ 을 얻음	2
3-(2)	모든 자연수 n에 대하여 $a_n = \dfrac{1}{2^{n-1} \sin \dfrac{\pi}{2^n}}$ 이 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 보이시오.	20
	$n=1$일 때 $a_1 = \dfrac{1}{2^0 \sin \dfrac{\pi}{2^1}} = \dfrac{1}{1} = 1$이므로 성립함을 보임	2
	$n=k$일 때 다음처럼 수식이 성립한다고 가정함: $a_k = \dfrac{1}{2^{k-1} \sin \dfrac{\pi}{2^k}}$	3
	위에 주어진 수식이 $a_{k+1} = \left(\cos \dfrac{\pi}{2^{k+1}}\right) a_k$와 결합하여 아래의 관계식을 얻음 $a_{k+1} = \dfrac{\cos \dfrac{\pi}{2^{k+1}}}{2^{k-1} \sin \dfrac{\pi}{2^k}}$	3
	여기에서 삼각함수의 덧셈정리 $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$, $\alpha=\beta$ 이면, $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ 를 적용하여 아래의 수식을 얻음	10

	문항	배점
	$a_{k+1} = \dfrac{1}{2^k \sin \dfrac{\pi}{2^{k+1}}}$	
	주어진 수식은 모든 자연수 n에 대하여 $a_n = \dfrac{1}{2^{n-1} \sin \dfrac{\pi}{2^n}}$ 임을 도출함	2
3-(3)	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하시오	10
	a_{n+1}의 수식을 아래처럼 변형함 $a_{n+1} = \dfrac{1}{2^n \sin \dfrac{\pi}{2^{n+1}}} = \dfrac{2}{\pi} \dfrac{\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right)}$	5
	극한 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$을 이용하면 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{2}{\pi}$ 임을 보임	5

문제 2 - 예시 답안

3-(1) $a_4 = \dfrac{1}{2^3 \sin \dfrac{\pi}{2^4}}$ 임을 보이시오.

(풀이) 주어진 조건으로부터 제4항 a_4는 아래와 같이 표현된다.

$$a_4 = \cos\left(\frac{\pi}{2^4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2^3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2^2}\right) a_1$$

여기에 $a_1 = 1$과 삼각함수의 덧셈정리

($\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$, $\alpha = \beta$이면, $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$)를 적용하면

$$a_4 = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^3}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{2^4}\right)} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^2}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{2^3}\right)} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{2^2}\right)} = \frac{1}{2^3\sin\left(\frac{\pi}{2^4}\right)}$$

이 성립한다.

3-(2) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n = \dfrac{1}{2^{n-1} \sin \dfrac{\pi}{2^n}}$ 이 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 보이시오.

(풀이) (i) $n = 1$일 때 $a_1 = \dfrac{1}{2^0 \sin \dfrac{\pi}{2^1}} = \dfrac{1}{1} = 1$이므로 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 주어진 수식이 성립한다고 가정하자.
즉,

$$a_k = \frac{1}{2^{k-1}\sin\frac{\pi}{2^k}}$$

이 경우 위에 주어진 수식은 $a_{k+1} = \left(\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}\right)a_k$와 결합하여 다음의 관계식을 얻는다.

$$a_{k+1} = \frac{\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}}{2^{k-1}\sin\frac{\pi}{2^k}}$$

여기에서 삼각함수의 덧셈정리
$(\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$, $\alpha=\beta$이면, $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$)를 적용하면 수식

$$a_{k+1} = \cos\frac{\pi}{2^{k+1}} \cdot \frac{1}{2^k\sin\frac{\pi}{2^{k+1}}\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}} = \frac{1}{2^k\sin\frac{\pi}{2^{k+1}}}$$

을 얻는다. 따라서 수학적 귀납법에 의해 모든 자연수 n에 대하여 $a_n = \dfrac{1}{2^{n-1}\sin\frac{\pi}{2^n}}$임을 알 수 있다.

3-(3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하시오.

(풀이) a_{n+1}의 수식을 아래처럼 변형한다.

$$a_{n+1} = \frac{1}{2^n\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}} = \frac{2}{\pi}\frac{\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}$$

그리고 극한 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$을 이용하면 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{2}{\pi}$임을 알 수 있다.

문제 3

[문제 3] 자연수 n에 대하여 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 각각

$$f(x)=2x^3-3x^2+20n,\ g(x)=3nx^2-6nx+4n^2+28$$

이다. 다음 물음에 답하시오. [40점]

(1) 두 곡선 $f(x)$와 $g(x)$가 만나는 서로 다른 교점의 개수가 2 이상인 자연수 n을 모두 구하시오.

(2) 위 (1)의 조건을 만족하는 자연수 n에 대하여 두 곡선 $f(x)$와 $g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

문제 3 - 출제 의도

정적분의 활용, 도함수의 활용 단원에서 다루는 다항함수들로 둘러싸인 도형의 넓이, 방정식의 서로 다른 실근의 개수 등을 소재로 문항을 구성하였다. 다항함수들의 극값과 다항함수들이 만나는 서로 다른 교점들의 개수 사이의 관계를 파악할 수 있는지를 묻고자 하였다. 극댓값과 극솟값을 활용하여 다항함수들이 만나는 서로 다른 교점들의 개수를 결정할 수 있는지와 정적분을 활용하여 다항함수들로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있는지를 묻고자 하였다.

문제 3 - 출제 근거

가) 교육과정 근거

적용 교육과정	교육과학기술부 고시 제 2011-361호 [별책8] “수학과 교육과정”

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행연도	쪽수
고등학교 교과서	고등학교 미적분 I	황선욱 외	좋은책신사고	2016	128-130, 173-176
	고등학교 미적분 I	우정호 외	동아출판	2017	156-159, 218-256
	고등학교 미적분 I	류희찬 외	천재교과서	2017	134-136, 188-192
	고등학교 미적분 I	정상권 외	금성출판사	2017	133-138, 185-190

	고등학교 미적분 I	이준열 외	천재교육	2016	145-149, 202-206

문제 3 - 채점 기준

	문항	배점
3-(1)	두 곡선 $f(x)$와 $g(x)$가 두 점 이상에서 만나는 자연수 n을 모두 구하시오.	20
	삼차식 $h(x)=f(x)-g(x)=0$이 두 개 이상의 근을 갖기 위한 조건으로 $h(x)$의 극댓값이 0보다 크거나 같고(크고) 극솟값이 0보다 작아야(작거나 같아야) 함을 지적함	5
	$h'(x) = 6x^2 - 6(n+1)x + 6n = 6(x-1)(x-n) = 0$으로부터 극점 $x = 1$, $x = n$을 찾음	2
	n이 자연수라는 조건으로부터 $n \geq 1$을 확인하고 $h(1)$이 극댓값이고, $h(n)$이 극솟값임을 지적함	2
	극댓값 조건 $h(1) = -4n^2 + 23n - 29 \geq 0$ 로부터 $\frac{23-\sqrt{65}}{8} \leq n \leq \frac{23+\sqrt{65}}{8}$ 를 유도함	2
	n이 자연수라는 조건으로부터 $n = 2$이거나 $n = 3$임을 보임	2
	극댓값 $h(1) = \begin{cases} 1, \ n=2 \\ 4, \ n=3 \end{cases}$ 이 되어 0보다 크다는 것을 확인함	3
	극솟값 $h(n)$이 $n = 2$인 경우 $h(n) = 0$이고, $n = 3$인 경우 $h(3) = -4 < 0$임을 보임으로써 극솟값이 0보다 작음을 보임	3
	결론적으로 $n = 2$이거나 $n = 3$인 경우만 두 곡선 $f(x)$와 $g(x)$가 두 점 이상에서 만남을 주장함	1
3-(2)	위 (1)의 조건을 만족하는 자연수 n에 대하여, 두 곡선 $f(x)$와 $g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이 $A(n)$의 최댓값과 최솟값을 구하시오	20
	(1)의 풀이를 근거로 두 곡선 $f(x)$와 $g(x)$가 두 점 이상에서 만나는 자연수 n은 $n = 2$이거나 $n = 3$인 경우임을 지적함	1
	$n = 2$ 인 경우, $h(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4 = 0$의 근이 $x = \frac{1}{2}$, 2임을 보임	2
	$2 - \sqrt{3} \leq 2 \leq 2 + \sqrt{3}$ 임을 보임	1
	둘러싸인 도형의 넓이가 아래와 같음을 보임 $A(2) = \int_{\frac{1}{2}}^{2} (2x^3 - 9x^2 + 12x - 4)\,dx = \left[\frac{1}{2}x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 4x\right]_{\frac{1}{2}}^{2} = \frac{27}{32}$	4

	문항	배점
	$n=3$인 경우, $h(x)=2x^3-12x^2+18x-4=0$ 근이 $x=2,\ 2\pm\sqrt{3}$ 임을 보임	2
	둘러싸인 도형의 넓이가 $A(3)=\int_{2-\sqrt{3}}^{2}(2x^3-12x^2+18x-4)\,dx+\int_{2}^{2+\sqrt{3}}(-2x^3+12x^2-18x+4)\,dx$ 임을 보임 혹은 $A(3)=2\int_{2-\sqrt{3}}^{2}(2x^3-12x^2+18x-4)\,dx$ 임을 보임	2
	$A(3)=9$임을 보임	5
	최댓값은 9이고 최솟값은 $\frac{27}{32}$임을 지적함	2

문제 3 - 예시 답안

3-(1) 두 곡선 $f(x)$와 $g(x)$가 만나는 서로 다른 교점의 개수가 2 이상인 자연수 n을 모두 구하시오.

(풀이) $h(x)=f(x)-g(x)=2x^3-3(n+1)x^2+6nx-4n^2+20n-28$

라 하면, 삼차식 $h(x)=0$이 두 개 이상의 근을 갖기 위해서는 $h(x)$의 극댓값이 0보다 크거나 같고(크고) 극솟값이 0보다 작아야(작거나 같아야) 한다. 한편

$$h'(x)=6x^2-6(n+1)x+6n=6(x-1)(x-n)=0$$

이므로, 극값을 갖는 점은 $x=1$이거나 $x=n$이다.

n은 자연수이므로 $n\ge 1$이 성립한다. 따라서 삼차식 $h(x)=0$이 두 개 이상의 근을 갖기 위해서는 삼차함수 $h(x)$는 $x=1$에서 극댓값을 갖고 $x=n$에서 극솟값을 가져야 한다.

극댓값이 0보다 크거나 같아야 하므로

$$h(1)=2-3(n+1)+6n-4n^2+20n-28=-4n^2+23n-29\ge 0$$

즉 $4n^2-23n+29\le 0$이 성립한다. 따라서 $\frac{23-\sqrt{65}}{8}\le n\le\frac{23+\sqrt{65}}{8}$를 만족하는 자연수이다.

즉, $n=2$이거나 $n=3$이다. 이 경우 극댓값 $h(1)=\begin{cases}1,\ n=2\\4,\ n=3\end{cases}$ 이 되어 0보다 크다.

한편 극솟값은

$$\begin{aligned}h(n)&=2n^3-3(n+1)n^2+6n^2-4n^2+20n-28\\&=-n^3-n^2+20n-28\\&=-(n-2)(n^2+3n-14)\end{aligned}$$

이므로, $n=2$인 경우는 $h(2)=0$이고, $n=3$인 경우는 $h(3)=-4<0$이 되어 두 경우 모두 극솟값이 0보다 작거나 같다. 결론적으로 $n=2$이거나 $n=3$인 경우만 두 곡선 $f(x)$와 $g(x)$가 두 점 이상에서 만난다.

3-(2) 위 (1)의 조건을 만족하는 자연수 n에 대하여 두 곡선 $f(x)$와 $g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

(풀이) (1)의 풀이에 의해 두 곡선 $f(x)$와 $g(x)$가 두 점 이상에서 만나는 자연수 n은 $n=2$이거나 $n=3$인 경우뿐이다. 한편 두 곡선 $f(x)$와 $g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $h(x)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같다.

(i) $n=2$인 경우,

$$h(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4 = (2x-1)(x-2)^2 = 0$$

이므로 근은 $x = \frac{1}{2}, 2$가 된다. 따라서 둘러싸인 도형의 넓이는

$$A(2) = \int_{\frac{1}{2}}^{2} (2x^3 - 9x^2 + 12x - 4)\,dx = \left[\frac{1}{2}x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 4x\right]_{\frac{1}{2}}^{2} = \frac{27}{32}$$

이다.

(ii) $n=3$인 경우,

$$h(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x - 4 = 2(x-2)(x^2-4x+1) = 0$$

이므로 근은 $x=2,\ 2\pm\sqrt{3}$이 된다. 한편 둘러싸인 도형은 점 $(2,0)$에 대한 점대칭이므로 넓이는

$$\begin{aligned}
A(3) &= 2\int_{2-\sqrt{3}}^{2} (2x^3 - 12x^2 + 18x - 4)\,dx \\
&= 4\int_{2-\sqrt{3}}^{2} (x-2)(x^2-4x+1)\,dx \\
&= 4\int_{2-\sqrt{3}}^{2} (x-2)((x-2)^2-3)\,dx \\
&= 4\int_{-\sqrt{3}}^{0} x(x^2-3)\,dx \\
&= 4\int_{-\sqrt{3}}^{0} (x^3-3x)\,dx \\
&= 4\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2\right]_{-\sqrt{3}}^{0} \\
&= 9
\end{aligned}$$

이다. 따라서 최댓값은 9이고 최솟값은 $\frac{27}{32}$이다.

(별해) (ii) $n=3$인 경우,

$$h(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x - 4 = 2(x-2)(x^2-4x+1) = 0$$

이므로 근은 $x=2,\ 2\pm\sqrt{3}$ 이 된다. 따라서 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\begin{aligned}
A(3) &= \int_{2-\sqrt{3}}^{2} (2x^3 - 12x^2 + 18x - 4)\,dx + \int_{2}^{2+\sqrt{3}} (-2x^3 + 12x^2 - 18x + 4)\,dx \\
&= 2F(2) - F(2-\sqrt{3}) - F(2+\sqrt{3})
\end{aligned}$$

이고, 여기서 $F(x) = \frac{1}{2}x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 4x$ 이다.

한편 $\alpha = 2 \pm \sqrt{3}$ 은 $x^2 - 4x + 1 = 0$ 의 근이므로,

$$\begin{aligned} F(\alpha) &= \frac{1}{2}\alpha^4 - 4\alpha^3 + 9\alpha^2 - 4\alpha \\ &= \frac{1}{2}\alpha^2(\alpha^2 - 4\alpha) - 2\alpha(\alpha^2 - 4\alpha) + \alpha^2 - 4\alpha \\ &= -\frac{1}{2}\alpha^2 + 2\alpha - 1 \\ &= -\frac{1}{2}(\alpha^2 - 4\alpha) - 1 = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

이다. 따라서

$$A(3) = 2F(2) - F(2-\sqrt{3}) - F(2+\sqrt{3}) = 8 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 9$$

이다. 따라서 최댓값은 9이고 최솟값은 $\frac{27}{32}$ 이다.