논술고사 출제 의도 및 답안 (자연계열 II)

문제 1

[문제 1] 정수 $n \geq 0$에 대하여 아래와 같이 표현된 수열 $\{I_n\}$이 있다.

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$$

다음 물음에 답하시오. [30점]

(1) 정수 $n \geq 0$에 대하여 $I_{n+1} \leq I_n$이 성립함을 보이시오.

(2) 자연수 $n \geq 2$에 대하여 $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$가 성립함을 보이시오.

(3) 극한값 $\lim_{n \to \infty} \dfrac{I_{n+1}}{I_n}$을 구하시오.

문제 1 - 출제 의도

고등학교 수학의 가장 중요한 부분 중의 하나인 수열과 극한, 적분에서 배우는 여러 가지 성질들을 이해하고 이들을 활용할 수 있는지를 묻는 문제이다. 이를 위하여 삼각함수의 n제곱으로 주어진 함수로 만들어지는 수열에 대하여 조건을 분석하고 논리적인 사고로 수열의 성질과 점화식을 찾아낼 수 있는지를 평가하고자 한다.

문제 1 - 출제 근거

가) 교육과정 근거

적용 교육과정	교육과학기술부 고시 제 2011-361호 [별책8] “수학과 교육과정”

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	고등학교 미적분 II	김원경 외	비상교육	2014	137, 146, 151
	고등학교 미적분 I	우정호 외	동아출판	2014	21

문제 1 - 채점 기준

문항		배점
1-(1)	정수 $n \ge 0$에 대하여 $I_{n+1} \le I_n$이 성립함을 보이시오	5
	구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$에서 $0 \le \sin x \le 1$을 언급	2
	구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$에서 $\sin^{n+1} x \le \sin^n x$	2
	$I_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x\,dx \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = I_n$	1
1-(2)	자연수 $n \ge 2$에 대하여 $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$가 성립함을 보이시오	15
	$\sin^n x$를 $\sin^{n-1} x \cdot \sin x$로 나타냄.	2
	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \cdot \sin x\,dx$에 부분적분을 적용하여 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \cdot \sin x\,dx = \left[\sin^{n-1} x(-\cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x\,dx$ 을 얻음.	8
	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$을 얻음.	3
	$I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$을 정리하여 $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$을 얻음.	2
1-(3)	극한값 $\lim_{n\to\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n}$ 을 구하시오.	10
	문항 (1)로부터 $\frac{I_{n+2}}{I_n} \le \frac{I_{n+1}}{I_n} \le 1$을 유도	3
	문항 (2)에서 $\frac{n+1}{n+2} = \frac{I_{n+2}}{I_n} \le \frac{I_{n+1}}{I_n} \le 1$을 유도	3
	조임정리를 적용하여 $\lim_{n\to\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$을 얻음.	4

문제 1 - 예시 답안

1-(1) 정수 $n \geq 0$에 대하여 $I_{n+1} \leq I_n$이 성립함을 보이시오.

(풀이) 구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$에서 $0 \leq \sin x \leq 1$이기 때문에 $\sin^{n+1}x \leq \sin^n x$이다. 그러므로

$$I_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}x\,dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = I_n \text{ 이 성립한다.}$$

1-(2) 자연수 $n \geq 2$에 대하여 $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$가 성립함을 보이시오.

(풀이) 1보다 큰 자연수 n에 대하여 부분적분법을 이용하면

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}x \cdot \sin x\,dx \\
&= \left[\sin^{n-1}x\,(-\cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n-2}x\,\cos^2 x\,dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n-2}x\,\cos^2 x\,dx \\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}x\,(1-\sin^2 x)\,dx \\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}x\,dx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx \\
&= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n
\end{aligned}$$

이므로 $nI_n = (n-1)I_{n-2}$이고 $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$이다.

1-(3) 극한값 $\lim_{n\to\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n}$ 을 구하시오.

(풀이) 문항 (1)에 의하여 $I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$이므로 $\frac{I_{n+2}}{I_n} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$이 성립하고, 문항 (2)에 의하여 $\frac{n+1}{n+2} = \frac{I_{n+2}}{I_n}$이다. 그러므로 $\frac{n+1}{n+2} = \frac{I_{n+2}}{I_n} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$이 참이고 수열의 조임정리에 의하여

$$1 = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$$

이므로 $\lim_{n\to\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$이다.

문제 2

[문제 2] 부등식 $||y|+|x-2|-3|+||y|+|x+2|-3| \le 2$를 만족하는 좌표평면 위의 점의 집합을 D라 할 때 다음 물음에 답하시오. [30점]

(1) 부등식 $(|y|+|x-2|-3)(|y|+|x+2|-3) \le 0$을 만족하는 영역을 좌표평면 위에 나타내시오.

(2) 부등식 $2|y|+|x-2|+|x+2| \le 8$을 만족하는 영역을 좌표평면 위에 나타내시오.

(3) 집합 D의 영역을 좌표평면 위에 나타내고 넓이를 구하시오.

문제 2 - 출제 의도

이 문제는 부등식의 영역에 대한 이해를 활용하여 일차함수와 절댓값의 결합으로 나타난 부등식의 해를 구하고 좌표평면 위의 영역으로 나타내는 문제이다. 이 과정에서 부등식의 영역을 활용하여 주어진 부등식의 해를 구하기 위한 조건을 이끌어 내는 수리적 능력, 절댓값과 1차함수의 합성으로 주어진 함수의 그래프를 활용하여 연립 부등식의 해를 구하는 수학 개념의 종합적 활용 능력과 풀이 과정에서 나타나는 여러 가지 계산을 효과적으로 기획하고 면밀하게 수행하는 능력을 평가하고자 한다.

문제 2 - 출제 근거

가) 교육과정 근거

적용 교육과정	교육과학기술부 고시 제 2011-361호 [별책8] “수학과 교육과정”

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	고등학교 수학 I	정상권 외	금성출판사	2014	107-125, 191-211
	고등학교 수학 I	류희찬 외	천재교과서	2014	106-127, 200-221
	고등학교 수학 I	김창동 외	교학사	2014	100-116, 183-198

문제 2 - 채점 기준

문항		배점
2-(1)	부등식 $(\|y\|+\|x-2\|-3)(\|y\|+\|x+2\|-3)\leq 0$을 만족하는 영역을 좌표 평면 위에 나타내시오.	7
	곱으로 나타난 부등식을 부호에 따라 두 가지 경우로 나눈다.	2
	좌표 평면위에 $\|y\|+\|x-2\|=3$과 $\|y\|+\|x+2\|=3$을 각각 마름모로 나타낸다.	3
	부등식의 부호에 따라 답의 영역을 나타낸다.	2
2-(2)	부등식 $2\|y\|+\|x-2\|+\|x+2\|\leq 8$을 만족하는 영역을 좌표평면 위에 나타내시오.	7
	y의 값에 따라 꺾은 주어진 영역의 경계를 나타내는 그래프의 관계식을 구한다.	2
	경계를 나타내는 그래프를 바르게 그린다.	3
	부등식이 나타내는 영역을 올바르게 표시한다.	2
2-(3)	집합 D의 영역을 좌표평면 위에 나타내고 넓이를 구하시오.	16
	주어진 부등식을 풀기 위하여 $\|y\|+\|x-2\|=3$과 $\|y\|+\|x+2\|=3$ 에 의한 네 영역으로 구별한다.	3
	각 영역에 따라 부등식을 바르게 풀어서 영역으로 나타낸다.	10
	네 영역을 모아서 좌표평면 위에 직사각형으로 나타낸다.	2
	직사각형의 넓이 8을 구한다.	1

문제 2 - 예시 답안

2-(1) 부등식 $(|y|+|x-2|-3)(|y|+|x+2|-3)\leq 0$을 만족하는 영역을 좌표평면 위에 나타내시오.

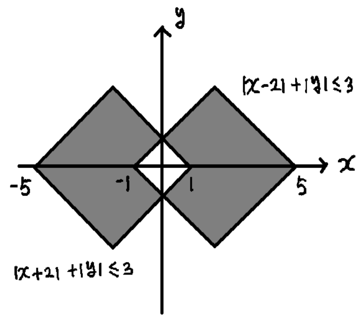
(풀이) 부등식 $(|y|+|x-2|-3)(|y|+|x+2|-3)\leq 0$은 다음 두 영역으로 나누어진다.

(i) $|y|+|x-2|\leq 3$ 이고 $|y|+|x+2|\geq 3$

(ii) $|y|+|x-2|\geq 3$ 이고 $|y|+|x+2|\leq 3$

따라서 부등식을 만족하는 영역은 두 마름모 $|y|+|x-2|=3$와 $|y|+|x+2|=3$ 내부의 점과 경계의 점의 합집합

$\{(x,y) \mid |y|+|x-2| \le 3\} \cup \{(x,y) \mid |y|+|x+2| \le 3\}$
에서 교집합이 나타내는 영역의 내부
$\{(x,y) \mid |y|+|x-2|<3,\ |y|+|x+2|<3\}$
을 뺀 것이다.
따라서 구하는 영역은 오른쪽과 같다.



(2) 부등식 $2|y|+|x-2|+|x+2| \le 8$을 만족하는 영역을 좌표평면 위에 나타내시오.
(풀이) 주어진 부등식 $2|y|+|x-2|+|x+2| \le 8$이 나타내는 영역은 y가 양수 일 때

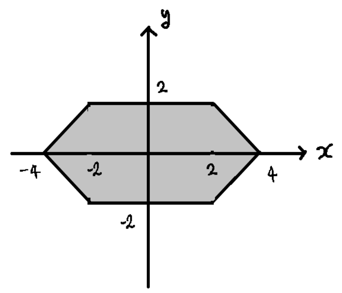
$$y=-\frac{|x-2|+|x+2|}{2}+4$$

의 그래프 아래쪽의 점들과 y가 음수 일 때

$$y=\frac{|x-2|+|x+2|}{2}-4$$

의 그래프 위쪽의 점들이다.

따라서 문항의 부등식이 나타내는 영역은 그래프
$y=-\dfrac{|x-2|+|x+2|}{2}+4$,
$y=\dfrac{|x-2|+|x+2|}{2}-4$사이의 점들이다.
따라서 구하는 영역은 오른쪽과 같다.



(3) 집합 D의 영역을 좌표평면 위에 나타내고 넓이를 구하시오.
(풀이) 절댓값 부호를 풀기 위하여 두 마름모꼴 $|y|+|x-2|=3$와 $|y|+|x+2|=3$ 로 나누어지는 좌표 평면의 네 영역을 생각한다.

(i) $|y|+|x-2| \ge 3$ 이고 $|y|+|x+2| \ge 3$
(ii) $|y|+|x-2| \le 3$ 이고 $|y|+|x+2| \le 3$
(iii) $|y|+|x-2| \le 3$ 이고 $|y|+|x+2| \ge 3$
(iv) $|y|+|x-2| \ge 3$ 이고 $|y|+|x+2| \le 3$

(ㄱ) [영역(i)] $|y|+|x-2| \ge 3$ 이고 $|y|+|x+2| \ge 3$ 일 때 부등식을 풀면

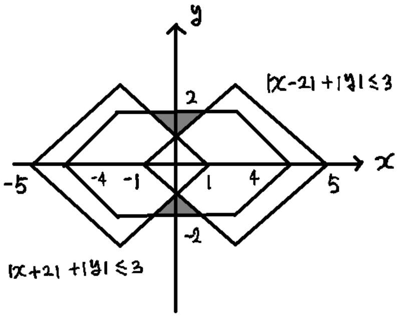
$$|y|+|x-2|-3+|y|+|x+2|-3 \le 2$$
$$\Rightarrow\ 2|y|+|x-2|+|x+2| \le 8$$

이다. 도형 $2|y|+|x-2|+|x+2|=8$과 마름모 $|y|+|x-2|=3$의 교점은 $(1,\pm 1)$이고, 도형 $2|y|+|x-2|+|x+2|=8$과 마름모 $|y|+|x+2|=3$의 교점은 $(-1,\pm 1)$이다.

따라서 주어진 영역은 세 부등식

$$\begin{cases} |y|+|x-2| \geq 3 \\ |y|+|x+2| \geq 3 \\ 2|y|+|x-2|+|x+2| \leq 8 \end{cases}$$

을 모두 만족하는 좌표 평면의 점으로 문항 (2)에 따라 구하는 영역은 오른쪽과 같다.



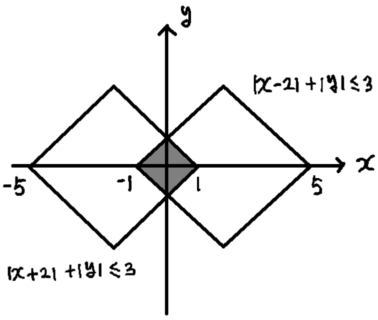
(ㄴ) [영역(ii)] $|y|+|x-2| \leq 3$이고 $|y|+|x+2| \leq 3$ 일 때, 부등식을 풀면

$$|y|+|x-2|-3+|y|+|x+2|-3 \geq -2$$
$$\Rightarrow \ 2|y|+|x-2|+|x+2| \geq 4$$

이다. 주어진 영역에서 $-1 \leq x \leq 1$이므로

$$2|y|+|x-2|+|x+2| = 2|y|+2-x+x+2 \geq 4$$
$$\Rightarrow \ 2|y| \geq 0$$

따라서 주어진 영역에서 모든 점이 부등식을 만족하며 구하는 영역은 두 부등식 $|y|+|x-2| \leq 3$과 $|y|+|x+2| \leq 3$ 를 만족하는 평면위의 점으로 영역은 다음과 같다.



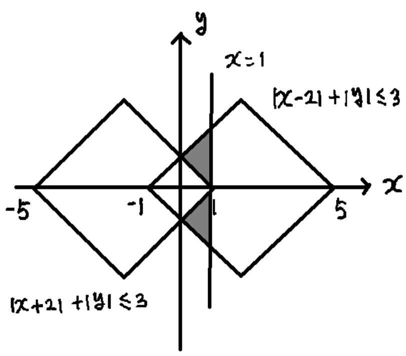
(ㄷ) [영역(iii)] $|y|+|x-2| \leq 3$ 이고 $|y|+|x+2| \geq 3$일 때, 부등식을 풀면

$$-|y|-|x-2|+3+|y|+|x+2|-3 \leq 2$$
$$\Rightarrow \ -|x-2|+|x+2| \leq 2$$

이다. 주어진 영역에서 $0 \leq x \leq 5$이므로 부등식 $-|x-2|+|x+2| \leq 2$를 $0 \leq x \leq 5$에서 풀면 $0 \leq x \leq 1$ 이다. 또한 직선 $x=1$ 와 원 $|y|+|x-2|=3$의 교점은 $(1,\pm 2)$이다. 따라서 주어진 영역에서 구하는 부등식의 영역은 세 부등식

$$\begin{cases} |y|+|x-2| \leq 3 \\ |y|+|x+2| \geq 3 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

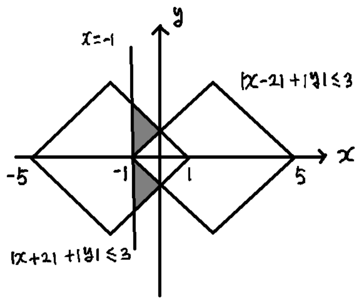
을 만족하는 좌표평면의 점의 집합으로 오른쪽 그림과 같다.



(ㄹ) [영역(iv)] $|y|+|x-2| \geq 3$ 이고 $|y|+|x+2| \leq 3$일 때, 부등식을 풀면

$$|y|+|x-2|-3-|y|-|x+2|+3 \leq 2$$
$$\Rightarrow \ |x-2|-|x+2| \leq 2 \text{ 이다.}$$

주어진 영역에서 $-5 \le x \le 0$이므로 부등식 $|x-2|-|x+2| \le 2$를 $-5 \le x \le 0$에서 풀면 $-1 \le x \le 0$ 이다. 직선 $x=-1$ 와 원 $|y|+|x+2|=3$의 교점은 $(-1,\pm 2)$이다. 따라서 주어진 영역에서 구하는 부등식의 영역은 세 부등식

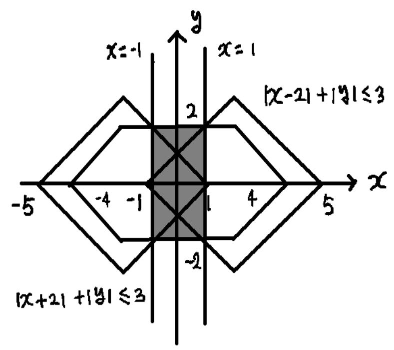


$$\begin{cases} |y|+|x-2| \ge 3 \\ |y|+|x+2| \le 3 \\ -1 \le x \le 0 \end{cases}$$

을 만족하는 좌표평면의 점의 집합으로 오른쪽 그림과 같다.

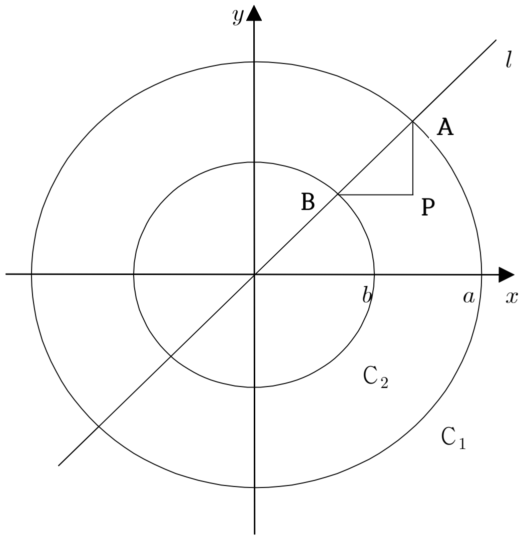
위 (ㄱ),(ㄴ),(ㄷ),(ㄹ)에서 구한 영역을 모두 합하여 구하는 부등식의 영역 D을 나타내면 오른쪽과 같이 가로 2, 세로 4인 직사각형이다.

따라서 구하는 영역의 넓이는 8이다.



문제 3

[문제 3] 그림과 같이 $a > b > 0$일 때 좌표평면 위에 두 원 $\mathrm{C}_1 : x^2 + y^2 = a^2$, $\mathrm{C}_2 : x^2 + y^2 = b^2$ 가 있다. 원점을 지나고 기울기가 양수인 직선 l이 두 원 C_1, C_2와 제1사분면에서 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 점 A를 지나고 x축에 수직인 직선과 점 B를 지나고 y축에 수직인 직선이 만나는 점을 P라 할 때, 다음 물음에 답하시오. [40점]



(1) 삼각형 ABP의 넓이의 최댓값을 구하시오.

(2) 점 P가 그리는 도형의 방정식을 구하시오.

(3) 점 $\mathrm{Q}(b, 0)$과 점 $\mathrm{Q}'(-b, 0)$에 대하여 두 선분 PQ, PQ'의 길이의 합이 일정하도록 하는 $\dfrac{a}{b}$의 값을 구하시오.

(4) 문항 (2)의 도형의 방정식이 문항 (3)의 조건을 만족할 때 그 도형 위의 점 P에서의 접선을 l'라 하자. 점 Q에서 l'에 내린 수선의 발을 H라 하고 점 Q'에서 l'에 내린 수선의 발을 H'라 할 때, $\angle \mathrm{QPH} = \angle \mathrm{Q'PH'}$이 성립함을 보이시오.

문제 3 - 출제 의도

도형의 방정식, 이차곡선, 평면곡선의 접선 단원에서 다루는 직선, 원, 타원, 접선을 소재로 문항을 구성하여, 주어진 관계를 만족하는 도형이 만나는 점들로 구성된 직각삼각형의 넓이를 파악할 수 있는지를 묻고, 넓이의 최댓값 문제를 해결할 수 있는지를 묻고자 하였다. 또한 주어진 관계를 만족하는 점들이 나타내는 도형의 방정식을 파악할 수 있는지 묻고자 하였으며, 두 점 사이의 거리, 직선과 점 사이의 거리를 이용하여 곡선의 접선과 곡선 사이의 관계를 이끌어 낼 수 있는지를 보고자 하였다.

문제 3 - 출제 근거

가) 교육과정 근거

적용 교육과정	교육과학기술부 고시 제 2011-361호 [별책8] “수학과 교육과정”

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	고등학교 수학 I	이준열 외	천재교육	2014	130-190
	고등학교 수학 I	황선욱 외	좋은책 신사고	2014	115-157
	고등학교 기하와 벡터	류희찬 외	천재교과서	2014	12-51, 152-169

문제 3 - 채점 기준

문항		배점
3-(1)	삼각형 ABP의 넓이의 최댓값을 구하시오.	8
	점 A, B 가 직선 위의 점임을 적용하여 $A=(x, mx)$, $B=(x', mx')$ 임을 설정함.	1
	점 A, B 는 각각 반지름이 a인 원과 반지름이 b인 원 위의 점임을 적용하여 $A=(x, mx)$, $B=(\frac{b}{a}x, \frac{mb}{a}x)$ 임을 설정함.	1
	삼각형 $\triangle ABP$ 의 넓이 $S(x)=\frac{1}{2}(x-\frac{b}{a}x)(mx-\frac{mb}{a}x)=\frac{1}{2}m(1-\frac{b}{a})^2x^2$ 임을 보임.	1
	A가 반지름 a인 원 위의 점임을 이용하여 삼각형 $\triangle ABP$ 의 넓이 $S(x)=\frac{1}{2}(1-\frac{b}{a})^2x\sqrt{a^2-x^2}$, $(0<x<a)$ 를 구함.	3
	완전제곱식이나 미분을 활용하여 $S(x)$ 의 최댓값이 $\frac{1}{4}(a-b)^2$ 임을 보임.	2
3-(2)	점 P가 그리는 도형의 방정식을 구하시오.	7
	점 P의 좌표를 $P(x, \frac{b}{a}y)=(X, Y)$ 로 설정함.	3
	점 $A(x, y)$ 가 원 $x^2+y^2=a^2$ 위의 점임을 이용하여 점 $P(X, Y)$ 들의 집합이 타원의 방정식 $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$, $(0<X<a, 0<Y<b)$ 을 만족함을 보임.	4
3-(3)	점 $\mathrm{Q}(b, 0)$과 점 $\mathrm{Q}'(-b, 0)$에 대하여 두 선분 PQ, PQ'의 길이의 합이 일정하도록 하는 $\frac{a}{b}$의 값을 구하시오.	9
	두 선분 PQ, PQ' 의 길이의 합이 일정하다는 조건으로부터 점 P 가 점 Q, Q' 가 초점인 타원 위의 점임을 지적함.	2
	점 P가 어떤 $c>d>0$ 에 대하여 $\frac{x^2}{c^2}+\frac{y^2}{d^2}=1$, $b^2=c^2-d^2$ 위의 점임을 보임.	3

	문항	배점
	문항 (2)의 결과로부터 점 $P(x,y)$ 는 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점임을 이용하여 $d^2(1-\frac{x^2}{c^2})=y^2=b^2(1-\frac{x^2}{a^2})$ 이 성립함을 보임 (혹은 연립방정식을 세움)	2
	위 설정식을 풀어 $\frac{a}{b}=\sqrt{2}$ 임을 보임.	2
3-(4)	문항 (2)의 도형의 방정식이 문항 (3)의 조건을 만족할 때 그 도형 위의 점 P에서의 접선을 l'라 하자. 점 Q에서 l'에 내린 수선의 발을 H라 하고 점 Q'에서 l'에 내린 수선의 발을 H'라 할 때, $\angle \mathrm{QPH} = \angle \mathrm{Q'PH'}$이 성립함을 보이시오.	16
	$\angle QPH = \angle Q'PH'$ 가 $\frac{\overline{QH}}{\overline{QP}}=\frac{\overline{Q'H'}}{\overline{Q'P}}$ 와 동치임을 지적함.	3
	점 $P(x_1,y_1)$ 에서의 접선의 방정식 $\frac{x_1}{2}x+y_1y=b^2$ 을 설정함.	2
	점과 직선사이의 거리를 이용하여 $\overline{QH}=\frac{b\lvert\frac{x_1}{2}-b\rvert}{\sqrt{(\frac{x_1}{2})^2+y_1^2}}$, $\overline{Q'H'}=\frac{b\lvert\frac{x_1}{2}+b\rvert}{\sqrt{(\frac{x_1}{2})^2+y_1^2}}$ 임을 설정함.	3
	두 점사이의 거리로부터 $\overline{QP}=\sqrt{(x_1-b)^2+y_1^2}$, $\overline{Q'P}=\sqrt{(x_1+b)^2+y_1^2}$ 를 설정함.	2
	$\frac{\overline{QH}}{\overline{QP}}=\frac{\overline{Q'H'}}{\overline{Q'P}} \Leftrightarrow \frac{b^2(\frac{x_1}{2}-b)^2}{((\frac{x_1}{2})^2+y_1^2)((x_1-b)^2+y_1^2)}=\frac{b^2(\frac{x_1}{2}+b)^2}{((\frac{x_1}{2})^2+y_1^2)((x_1+b)^2+y_1^2)}$ $\Leftrightarrow \frac{(\frac{x_1}{2}-b)^2}{(x_1-b)^2+y_1^2}=\frac{(\frac{x_1}{2}+b)^2}{(x_1+b)^2+y_1^2}$ 을 전개함.	3
	$y_1^2=b^2-\frac{x_1^2}{2}$ 임을 적용하여 $\frac{\overline{QH}}{\overline{QP}}=\frac{\overline{Q'H'}}{\overline{Q'P}}$ 임을 도출함.	3

문제 3 - 예시 답안

3-(1) 삼각형 ABP의 넓이의 최댓값을 구하시오.

(풀이) 직선 l의 방정식을 $y=mx\,(m>0)$ 라 하면, 점 A, B 는 각각 반지름이 a인 원과 반지름이 b인 원 위의 점이므로 $A=(x,mx)$, $B=(\frac{b}{a}x, \frac{mb}{a}x)$ 가 된다. 이 때 점 P의 좌표는 $(x, \frac{mb}{a}x)$가 된다.

삼각형 $\triangle ABP$ 의 넓이는

$S(x)=\frac{1}{2}(x-\frac{b}{a}x)(mx-\frac{mb}{a}x)=\frac{1}{2}m(1-\frac{b}{a})^2x^2,\ (0<x<a)$ 가 된다.

한편 A는 반지름 a인 원 위의 점이므로 $x^2+m^2x^2=a^2$ 이 되어 $m=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}$ 이 된다. 따라서 삼각형 $\triangle ABP$ 의 넓이는

$$S(x)=\frac{1}{2}(1-\frac{b}{a})^2x\sqrt{a^2-x^2},\ (0<x<a)$$

가 된다.

한편 $x\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2x^2-x^4}=\sqrt{\frac{a^4}{4}-(x^2-\frac{a^2}{2})^2}$ 이므로 $S(x)$의 최댓값은 $\frac{1}{4}(a-b)^2$ 이다.

3-(2) 점 P가 그리는 도형의 방정식을 구하시오.

(풀이) 점 A, B가 같은 직선 l 위의 점이면서 각각 반지름이 a인 원과 반지름이 b인 원 위의 점이므로 $A=(x,y),\ B=(\frac{b}{a}x,\frac{b}{a}y)$ 가 된다. 이 때 점 P의 좌표는 $(x,\frac{b}{a}y)$ 가 된다. $P(x,\frac{b}{a}y)=(X,Y)$ 라 하면 점 $A(x,y)$ 가 원 $x^2+y^2=a^2,\ (0<x<a, 0<y<a)$ 위의 점이므로 $a^2=x^2+y^2=X^2+(\frac{a}{b}Y)^2$ 가 성립한다.

따라서 점 $P(X,Y)$ 들의 집합은 타원의 방정식 $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1,\ (0<X<a, 0<Y<b)$ 을 만족한다.

3-(3) 점 $\mathrm{Q}(b,0)$과 점 $\mathrm{Q}'(-b,0)$에 대하여 두 선분 PQ, PQ'의 길이의 합이 일정하도록 하는 $\frac{a}{b}$의 값을 구하시오.

(풀이) 두 선분 PQ, PQ'의 길이의 합이 일정하게 되면 점 P는 점 Q, Q'가 초점인 타원 위의 점이 된다.

즉, 점 $P(x,y)$ 는 어떤 $c>d>0$ 에 대하여 $\frac{x^2}{c^2}+\frac{y^2}{d^2}=1,\ b^2=c^2-d^2$ 을 만족한다.

한편, 문항 (2)의 결과로부터 점 $P(x,y)$ 는 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점이므로 $d^2(1-\frac{x^2}{c^2})=y^2=b^2(1-\frac{x^2}{a^2})$ 이 성립한다.

$b^2=c^2-d^2$ 이므로 $c^2-2b^2-(1-\frac{b^2}{c^2}-\frac{b^2}{a^2})x^2=0,\ (0<x<a)$ 이 성립한다.

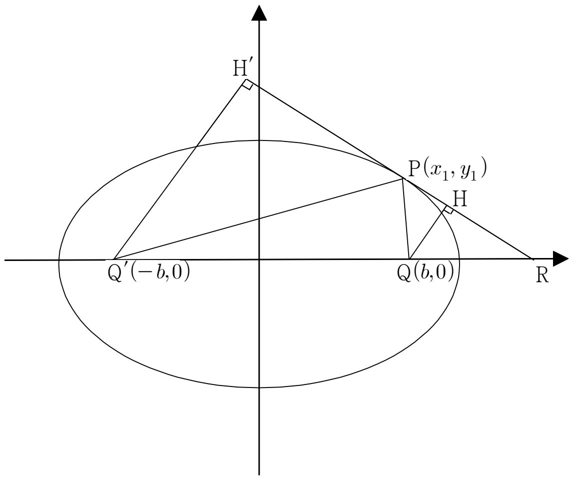
따라서 $a^2=2b^2$이 되고 a,b 가 양수이므로 $\frac{a}{b}=\sqrt{2}$ 임을 알 수 있다.

3-(4) 문항 (2)의 도형의 방정식이 문항 (3)의 조건을 만족할 때 그 도형 위의 점 P에서의 접선을 l'라 하자. 점 Q에서 l'에 내린 수선의 발을 H라 하고 점 Q′에서 l'에 내린 수선의 발을 H′라 할 때, ∠QPH = ∠Q′PH′이 성립함을 보이시오.

(풀이) $\angle QPH = \angle Q'PH'$ 가 되는 것은

$$\frac{\overline{QH}}{\overline{QP}} = \sin\angle QPH = \sin\angle Q'PH' = \frac{\overline{Q'H'}}{\overline{Q'P}}$$

이 되는 것과 같다.



점 $P(x_1, y_1)$ 가 타원 $\frac{x^2}{2} + y^2 = b^2$ 위의 점이므로 점 $P(x_1, y_1)$ 에서 접선의 방정식이 $\frac{x_1}{2}x + y_1 y = b^2$ 이 된다.

점과 직선사이의 거리에 의해서

$$\overline{QH} = \frac{b|\frac{x_1}{2} - b|}{\sqrt{(\frac{x_1}{2})^2 + y_1^2}}, \quad \overline{Q'H'} = \frac{b|\frac{x_1}{2} + b|}{\sqrt{(\frac{x_1}{2})^2 + y_1^2}}$$

이 되고, 두 점사이의 거리에 의해

$\overline{QP} = \sqrt{(x_1 - b)^2 + y_1^2}$, $\overline{Q'P} = \sqrt{(x_1 + b)^2 + y_1^2}$ 가 된다. 따라서

$$\frac{\overline{QH}}{\overline{QP}} = \frac{\overline{Q'H'}}{\overline{Q'P}} \Leftrightarrow \frac{b^2(\frac{x_1}{2} - b)^2}{((\frac{x_1}{2})^2 + y_1^2)((x_1 - b)^2 + y_1^2)} = \frac{b^2(\frac{x_1}{2} + b)^2}{((\frac{x_1}{2})^2 + y_1^2)((x_1 + b)^2 + y_1^2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\frac{x_1}{2} - b)^2}{(x_1 - b)^2 + y_1^2} = \frac{(\frac{x_1}{2} + b)^2}{(x_1 + b)^2 + y_1^2}$$

점 $P(x_1, y_1)$ 가 타원 $\frac{x^2}{2} + y^2 = b^2$ 위의 점이므로 $y_1^2 = b^2 - \frac{x_1^2}{2}$ 가 성립한다. 따라서

$$(x_1 - b)^2 + y_1^2 = (x_1 - b)^2 + b^2 - \frac{x_1^2}{2} = 2(\frac{x_1}{2} - b)^2, \; (x_1 + b)^2 + y_1^2 = (x_1 + b)^2 + b^2 - \frac{x_1^2}{2} = 2(\frac{x_1}{2} + b)^2$$

가 되어 $\frac{(\frac{x_1}{2} - b)^2}{(x_1 - b)^2 + y_1^2} = \frac{1}{2} = \frac{(\frac{x_1}{2} + b)^2}{(x_1 + b)^2 + y_1^2}$ 이 된다.

따라서 $\frac{\overline{QH}}{\overline{QP}} = \frac{\overline{Q'H'}}{\overline{Q'P}}$ 가 성립되어 $\angle QPH = \angle Q'PH'$ 가 되는 것을 알 수 있다.