

# 논술고사 출제의도 및 답안 (자연계열 II)

## 문항 및 제시문 출제 근거

### 1. 출제 범위

#### 1) 문제 1

- 직선, 원: 도형의 방정식 단원(수학: 좋은책 신사고)
- 타원: 이차곡선 단원(기하와 벡터: 천재교육)
- 삼각함수의 덧셈정리: 삼각함수 단원 (수학II: 천재교육)
- 삼각함수의 극한: 함수의 극한과 연속 단원 (수학II: 좋은책 신사고)
- 이차방정식의 근의 공식: 이차방정식 단원 (수학II: 좋은책 신사고)

#### 적용 교육과정

2007 개정 고등학교 교육과정 수학(교육인적자원부 제2007-79호)

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도
고등학교 교과서	고등학교 수학	황선욱 외	좋은책 신사고	2009
	기하와 벡터	최용준 외	천재교육	2010
	고등학교 수학 II	최용준 외	천재교육	2010
	고등학교 수학 II	황선욱 외	좋은책 신사고	2010

#### 2) 문제 2

- 함수: 고등학교 수학. VI 함수 (좋은책 신사고)
- 도형의 이동 : 고등학교 수학. V 도형의 이동 (좋은책 신사고)
- 수열의 극한 : 수학 I. V 수열의 극한 (좋은책 신사고)
- 정적분 : 적분과 통계. I 적분법 (좋은책 신사고)
- 관련 문제 :

좋은책 신사고 고등학교 수학(p.260 2번, p.261 9번)

좋은책 신사고 고등학교 수학 익힘(p.237 12번)

지학사 고등학교 수학 익힘(p.208 1번, 3번, p.209 4번)

2016년도 대학수학능력시험 수학영역(A형) 홀수형 13번-14번

2016년도 대학수학능력시험 수학영역(B형) 홀수형 11번

#### 적용 교육과정

2007 개정 고등학교 교육과정 수학(교육인적자원부 제2007-79호)

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도
------	-----	----	-----	------

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도
고등학교 교과서	고등학교 수학	황선욱 외	좋은책 신사고	2009
	고등학교 수학 I	황선욱 외	좋은책 신사고	2010
	적분과 통계	황선욱 외	좋은책 신사고	2010
	고등학교 수학 익힘	황선욱 외	좋은책 신사고	2009
	고등학교 수학 익힘	신항균 외	지학사	2009
기타	2016학년도 대학수학능력시험 수학영역 (A, B형)			

3) 문제 3

- 수학 II, 계승혁 외, 성지출판(p.87, p.89, p.140)
- 적분과 통계, 계승혁 외, 성지출판(p.19, p.28, p.65)
- 고등학교 수학, 황선욱 외, 좋은책 신사고(p.284)

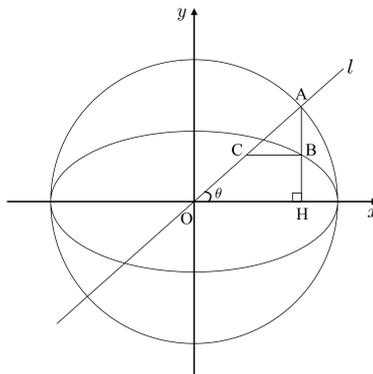
적용 교육과정	2007 개정 고등학교 교육과정 수학(교육인적자원부 제2007-79호)
---------	---

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도
고등학교 교과서	수학 II	계승혁 외	성지출판	2010
	적분과 통계	계승혁 외	성지출판	2010
	고등학교 수학	황선욱 외	좋은책 신사고	2009

2. 문항

**문항 1 - 문항**

1. 그림과 같이  $a > b > 0$  일 때 좌표평면에 원  $x^2 + y^2 = a^2$ 과 타원  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 이 있다. 원점  $O$ 를 지나는 직선  $l$ 이 원  $x^2 + y^2 = a^2$ 과 제1사분면에서 만나는 점을  $A$ 라 하고, 점  $A$ 에서  $x$ 축에 내린 수선의 발을  $H$ 라 하자. 선분  $AH$ 가 타원  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 과 만나는 점을  $B$ 라 하고, 점  $B$ 를 지나고  $x$ 축에 평행한 직선이 직선  $l$ 과 만나는 점을  $C$ 라 하자.  $\angle AOH = \theta$ 라 할 때, 다음 물음에 답하시오. (단,  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ) [30점]



- (1) 점 A, B, C의 좌표를  $a, b, \theta$ 의 식으로 나타내시오.
- (2) 삼각형 ABC의 넓이  $S(\theta)$ 를 구하고,  $S(\theta)$ 의 최댓값을 구하시오.
- (3)  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{S(\theta)}{\theta} = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$ 일 때,  $\frac{a}{b}$ 의 값을 구하시오.

**문항 1 - 출제의도 및 해설**

도형의 방정식, 이차곡선 단원에서 다루는 직선, 원, 타원을 소재로 문항을 구성하였다. 주어진 관계를 만족하는 도형 사이의 만나는 점들로 구성된 직각삼각형의 면적을 파악할 수 있는지를 묻는 문제이다. 특히, 직각삼각형의 면적을 삼각함수와 관련지어 구성하도록 하였으며 면적의 최댓값문제를 삼각함수를 활용하여 해결할 수 있는지를 묻고자 하였다. 면적과 관련된 극한의 질문에서는 삼각함수의 극한에 대한 이해를 묻고 근의 공식을 통해 조건에 맞는 결과를 이끌어 낼 수 있는지를 평가하고자 하였다.

**문항 1 - 채점기준**

문항		배점
1-1	점 A, B, C의 좌표를 $a, b, \theta$ 의 식으로 나타내시오.	6
1-2	삼각형 ABC의 넓이 $S(\theta)$ 를 구하고, $S(\theta)$ 의 최댓값을 구하시오.	12
1-3	$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{S(\theta)}{\theta} = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$ 일 때, $\frac{a}{b}$ 의 값을 구하시오.	12

**문항 1 - 예시답안 및 풀이**

1) 점 A, B, C의 좌표를  $a, b, \theta$ 의 식으로 나타내시오.

(예시답안)  $A = (x, y)$ 라 하면, A는 반지름이  $a$ 인 원 위의 점이므로  $\cos \theta = \frac{x}{a}, \sin \theta = \frac{y}{a}$ 를 만족한다. 따라서  $A = (x, y) = (a \cos \theta, a \sin \theta)$ 이다.

$B = (w, z)$ 라 하면, B는 A에서  $x$ 축에 내린 수선 위의 점이므로  $w = a \cos \theta$ 이다. 한편, B는 타원  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  위의 점이므로  $1 = \frac{w^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = \cos^2 \theta + \frac{z^2}{b^2}$ 을 만족한다. 따라서  $z = \pm b \sin \theta$ 가 된다.  $z > 0$ 이므로  $z = b \sin \theta$ 가 된다. 따라서  $B = (a \cos \theta, b \sin \theta)$ 이다.

$C = (u, v)$ 라 하면, 선분 BC가  $x$ 축에 평행이므로  $v = b \sin \theta$ 이다. 한편, A, C는 직선 1 위의

점이므로  $\frac{u}{b \sin \theta} = \frac{u}{v} = \frac{x}{y} = \frac{a \cos \theta}{b \sin \theta}$  를 만족한다.  $u = b \cos \theta$ 가 되어  $C = (b \cos \theta, b \sin \theta)$ 이다.

2) 삼각형 ABC의 넓이  $S(\theta)$ 를 구하고,  $S(\theta)$ 의 최댓값을 구하시오.

(예시답안) 삼각형 ABC는 직각삼각형이고, 선분 AB, BC의 길이는 각각  $(a-b) \sin \theta$ ,  $(a-b) \cos \theta$ 이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$$S(\theta) = \frac{1}{2}(a-b) \sin \theta \times (a-b) \cos \theta = \frac{1}{4}(a-b)^2 \sin 2\theta \text{가 된다.}$$

구간  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 에서 삼각함수  $\sin 2\theta$ 는  $\theta = \frac{\pi}{4}$ 일 때, 최댓값 1을 가지므로 삼각형 ABC의 넓이의 최댓값은  $\frac{1}{4}(a-b)^2$ 이 된다.

3)  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{S(\theta)}{\theta} = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$ 일 때,  $\frac{a}{b}$ 의 값을 구하시오.

(예시답안)  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{S(\theta)}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{(a-b)^2 \sin 2\theta}{4\theta} = \frac{1}{2}(a-b)^2$ 이므로, 조건으로부터

$$\frac{1}{2}(a-b)^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2) \text{이 성립한다. 따라서 } a^2 - 4ab + b^2 = 0 \text{이 성립한다.}$$

즉,  $(\frac{a}{b})^2 - 4(\frac{a}{b}) + 1 = 0$ 이므로 근의 공식으로부터  $\frac{a}{b} = 2 \pm \sqrt{3}$ 이다.

$a > b$ 을 가정하였으므로  $\frac{a}{b} = 2 + \sqrt{3}$ 이다.

## 문항 2 - 문항

2. 모든 실수  $x$ 에 대하여 함수  $f(x) = |x-1|$ 라 할 때, 다음 물음에 답하시오. [30점]

(1) 합성함수  $(f \circ f)(2x^2)$ 의 그래프와  $x$ 축이 만나는 점들의 좌표를 모두 구하시오.

(2)  $n$ 이 자연수일 때 닫힌 구간  $[0,1]$ 에서 정의된 함수  $g(x) = nx^2$ 의 함숫값이 정수가 되는  $x$ 를 모두 구하시오.

(3)  $n$ 이 자연수일 때 합성함수  $\underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{2n}(2nx^2)$ 의 그래프와  $x$ 축이 만나는 점들에

대하여 각 점과 원점 사이의 거리의 합을  $S_{2n}$ 이라 할 때, 극한값  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{2n}}{2n}$ 을 구하시오.

**문항 2 - 출제의도 및 해설**

이 문제는 합성함수의 성질에 대한 이해를 바탕으로 합성함수의 그래프와 축이 만나는 점들을 구하고 그로부터 구성된 식에 관한 극한값을 정적분을 이용하여 구하는 문제이다. 이 과정에서 합성함수의 성질, 그래프와 축이 만나는 점을 구하기, 극한값 구하기, 식의 구성, 정적분의 응용 등 중등교육 전반에서 다루는 다양한 수학적 개념과 원리의 종합적인 활용 능력과 계산능력을 평가하고자 한다.

**문항 2 - 채점기준**

문항		배점
2-1	합성함수 $(f \circ f)(2x^2)$ 의 그래프와 $x$ 축이 만나는 점들의 좌표를 모두 구하시오	5
2-2	$n$ 이 자연수일 때 닫힌 구간 $[0,1]$ 에서 정의된 함수 $g(x) = nx^2$ 의 함숫값이 정수가 되는 $x$ 를 모두 구하시오	7
2-3	$n$ 이 자연수일 때 합성함수 $\underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{2n}(2nx^2)$ 의 그래프와 $x$ 축이 만나는 점들에 대하여 각 점과 원점 사이의 거리의 합을 $S_{2n}$ 이라 할 때, 극한값 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{2n}}{2n}$ 을 구하시오.	18

**문항 2 - 예시답안 및 풀이**

1) 합성함수  $(f \circ f)(2x^2)$ 의 그래프와  $x$ 축이 만나는 점들의 좌표를 모두 구하시오.

**(예시답안)**  $(f \circ f)(2x^2) = ||2x^2 - 1| - 1| = 0$ 으로 두면  $2x^2 = 0, 2$ 므로  $x = 0, \pm 1$ 이다. 따라서 구하는 교점은  $(-1,0), (0,0), (1,0)$ 이다.

2)  $n$ 이 자연수일 때 닫힌 구간  $[0,1]$ 에서 정의된 함수  $g(x) = nx^2$ 의 함숫값이 정수가 되는  $x$ 를 모두 구하시오.

**(예시답안)** 자연수  $n$ 에 대하여 닫힌구간  $[0,1]$ 에 정의된 함수  $g(x) = nx^2$ 의 치역은 구간  $[0,n]$ 이다. 따라서 정수인 함숫값은  $k = 0, 1, \dots, n$ 이며  $nx^2 = k$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ )를 만족하는 구간  $[0,1]$ 의  $x$ 값은  $x = \sqrt{\frac{k}{n}}$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ )이다.

3)  $n$ 이 자연수일 때 합성함수  $\underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{2n}(2nx^2)$ 의 그래프와  $x$ 축이 만나는 점들에

대하여 각 점과 원점 사이의 거리의 합을  $S_{2n}$ 이라 할 때, 극한값  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{2n}}{2n}$ 을 구하시오.

**(예시답안)** 함수  $h(x) = 2nx^2$ 의 그래프를  $y$ 축을 따라  $-1$ 만큼 평행이동하고  $x$ 축 아래의 그래프를  $x$ 축에 대칭이 되도록  $x$ 축 위로 옮기면 함수  $f(2nx^2) = |2nx^2 - 1|$ 의 그래프를 얻는다. 같은 방법으로  $f(2nx^2) = |2nx^2 - 1|$ 의 그래프를  $y$ 축을 따라  $-1$ 만큼 평행이동하고  $x$ 축 아래의 그래프를  $x$ 축에 대칭이 되도록  $x$ 축 위로 옮기면 함수  $(f \circ f)(2nx^2) = ||2nx^2 - 1| - 1|$ 의 그래프를 얻는다. 합성함수  $\underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{2n}(2nx^2)$ 의 그래프는 이러한 과정을 함수  $h(x) = 2nx^2$ 의 그래프에  $2n$ 번 시행하여 얻어진다. 따라서 합성함수  $\underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{2n}(2nx^2)$ 의 그래프가  $x$ 축과 만나는 점들의  $x$ 좌표 중 가장 작은 값이  $-1$ 이고 가장 큰 값이  $1$ 임을 결정할 수 있다.

한편  $\underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{2n}(x) = ||\dots ||x - 1| - 1|\dots| - 1| = 0$ 의 근이 모두  $2$ 의 배수인 정수임을 알 수 있다. 자연수  $2n$ 에 대하여 문제 (2)와 같이  $y = 2nx^2$ 이 짝수가 되는 닫힌구간  $[-1, 1]$ 의 모든  $x$ 를 구하면  $x = \pm \sqrt{\frac{2k}{2n}}$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ )이다. 따라서 구하는 거리의 합  $S_{2n}$ 은  $\sum_{k=1}^n 2\sqrt{\frac{k}{n}}$ 이며 정적분의 성질을 활용하여 극한값을 구하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{2n}}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n 2\sqrt{\frac{k}{n}} = \int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} \text{ 이다.}$$

**문항 3 - 문항**

3. 중간값의 정리, 최대·최소의 정리, 평균값의 정리, 미적분의 기본 정리는 다음과 같다. [40점]

**중간값의 정리:** 함수  $f(x)$ 가 닫힌 구간  $[a, b]$ 에서 연속이고  $f(a) \neq f(b)$ 일 때,  $k$ 가  $f(a)$ 와  $f(b)$ 사이의 값이면  $f(c) = k$ 를 만족하는 실수  $c$ 가 열린 구간  $(a, b)$ 에 적어도 하나 존재한다.

**최대·최소의 정리:** 닫힌 구간  $[a, b]$ 에서 정의된 연속함수는 최댓값과 최솟값을 가진다.

**평균값의 정리:** 함수  $f(x)$ 가 닫힌 구간  $[a, b]$ 에서 연속이고 열린 구간  $(a, b)$ 에서 미분가능하면  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ 를 만족하는  $c$ 가 열린 구간  $(a, b)$ 에 적어도 하나 존재한다.

**미적분의 기본 정리:** 닫힌 구간  $[a, b]$ 에서 연속인 함수  $f(x)$ 에 대하여

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (\text{단, } a \leq x \leq b)$$

로 정의하면 함수  $F(x)$ 는 미분가능하고  $F'(x) = f(x)$ 이다.

$a < b$ 에 대하여 위 정리를 이용하여 다음 물음에 답하시오.

(1) 미적분의 기본 정리와 평균값의 정리를 이용하여 구간  $[a, b]$ 에 대하여

$$\int_a^b e^x \sin x dx = (b-a)e^c \sin c$$

를 만족하는 실수  $c$ 가 구간  $(a, b)$ 에 존재함을 보이시오.

(2) 최대·최소의 정리와 중간값의 정리를 이용하여 구간  $[a, b]$ 에 대하여

$$\int_a^b e^x \sin x dx = \sin c \int_a^b e^x dx$$

를 만족하는 실수  $c$ 가 구간  $(a, b)$ 에 존재함을 보이시오.

(3) 위의 문제 (2)에 의하여

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin x dx = \sin c \int_{-\pi}^{\pi} e^x dx$$

를 만족하는 실수  $c$ 가 구간  $(-\pi, \pi)$ 에 존재한다. 모든 실수  $c$ 의 합을 구하시오.

### 문항 3 - 출제의도 및 해설

고등학교 수학의 가장 중요한 부분 중의 하나인 미분과 적분에서 배우는 여러 가지 성질들을 이해하고 있고 이들을 활용할 수 있는지를 묻는 문제이다. 이를 위하여 중간값의 정리, 최대·최소의 정리, 평균값의 정리, 미적분의 기본 정리를 주고 삼각함수와 지수함수의 곱으로 나타내어진 함수에 대하여 학생 스스로 상황을 분석하여 논리적인 사고로 적절한 문제해결 방법을 찾아낼 수 있는지를 평가하고자 한다.

### 문항 3 - 채점기준

문항		배점
3-1	미적분의 기본 정리와 평균값의 정리를 이용하여 구간 $[a, b]$ 에 대하여 $\int_a^b e^x \sin x dx = (b-a)e^c \sin c$ 를 만족하는 실수 $c$ 가 구간 $(a, b)$ 에 존재함을 보이시오.	15

문항		배점
3-2	최대·최소의 정리와 중간값의 정리를 이용하여 구간 $[a, b]$ 에 대하여 $\int_a^b e^x \sin x dx = \sin c \int_a^b e^x dx$ 를 만족하는 실수 $c$ 가 구간 $(a, b)$ 에 존재함을 보이시오.	15
3-3	위의 문제 (2)에 의하여 $\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin x dx = \sin c \int_{-\pi}^{\pi} e^x dx$ 를 만족하는 실수 $c$ 가 구간 $(-\pi, \pi)$ 에 존재한다. 모든 실수 $c$ 의 합을 구하시오.	10

**문항 3 - 예시답안 및 풀이**

1) 미적분의 기본 정리와 평균값의 정리를 이용하여 구간  $[a, b]$ 에 대하여

$$\int_a^b e^x \sin x dx = (b-a)e^c \sin c$$

를 만족하는 실수  $c$ 가 구간  $(a, b)$ 에 존재함을 보이시오.(15점)

**(예시답안)**

미적분의 기본 정리에 의해  $x \in [a, b]$ 에 대하여  $F(x) = \int_a^x e^t \sin t dt$  는 미분가능하고

$F'(x) = e^x \sin x$  로 주어진다. 그러므로  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ 이고 평균값의 정리에 의

하여  $\frac{F(b) - F(a)}{b - a} = F'(c) = e^c \sin c$  가 성립하는  $c$ 가  $(a, b)$ 에 적어도 하나 존재한다.

2) 최대·최소의 정리와 중간값의 정리를 이용하여 구간  $[a, b]$ 에 대하여

$$\int_a^b e^x \sin x dx = \sin c \int_a^b e^x dx$$

를 만족하는 실수  $c$ 가 구간  $(a, b)$ 에 존재함을 보이시오.

**(예시답안)**

최대·최소의 정리에 의하여 구간  $[a, b]$  에서  $y = \sin x$ 는 최소값  $m$ 과 최대값  $M$ 을 가진다.

따라서  $f(x) = e^x \sin x$  는 구간  $[a, b]$  에서  $me^x \leq e^x \sin x \leq Me^x$  를 만족하고

$$m \int_a^b e^x dx \leq \int_a^b e^x \sin x dx \leq M \int_a^b e^x dx$$

이 성립한다.

위의 부등식을 양수인  $\int_a^b e^x dx$  로 나누면

$$m \leq \frac{\int_a^b e^x \sin x dx}{\int_a^b e^x dx} \leq M \text{ 이 되고,}$$

중간값의 정리에 의하여  $y = \sin x$ 는

$$\frac{\int_a^b e^x \sin x dx}{\int_a^b e^x dx} = \sin c \text{를}$$

만족하는  $c$ 를 구간  $(a, b)$ 에서 가진다.

3) 위의 문제 (2)에 의하여

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin x dx = \sin c \int_{-\pi}^{\pi} e^x dx$$

를 만족하는 실수  $c$ 가 구간  $(-\pi, \pi)$ 에 존재한다. 모든 실수  $c$ 의 합을 구하시오.

(예시답안)

부분적분에 의하여  $\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$  이므로

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin x dx = \left[ \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{-e^{\pi} \cos \pi + e^{-\pi} \cos(-\pi)}{2} = \frac{1}{2} (e^{\pi} - e^{-\pi}) \text{ 이고}$$

$$\sin c = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin x dx}{\int_{-\pi}^{\pi} e^x dx} = \frac{1}{2} \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{e^{\pi} - e^{-\pi}} = \frac{1}{2} \text{ 이다.}$$

그러므로  $c = \frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi$  이고 그 합은  $\pi$ 이다.