논술고사 출제의도 및 답안 (자연계열 Ⅰ)

문항 및 제시문 출제 근거

1. 출제 범위

1) 문제 1
- 직선, 원: 도형의 방정식 단원(수학: 좋은책 신사고)
- 타원: 이차곡선 단원(기하와 벡터: 천재교육)
- 삼각함수의 덧셈정리: 삼각함수 단원 (수학Ⅱ: 천재교육)
- 삼각함수의 극한: 함수의 극한과 연속 단원 (수학Ⅱ: 좋은책 신사고)
- 이차방정식의 근의 공식: 이차방정식 단원 (수학Ⅱ: 좋은책 신사고)

적용 교육과정	2007 개정 고등학교 교육과정 수학(교육인적자원부 제2007-79호)

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도
고등학교 교과서	고등학교 수학	황선욱 외	좋은책 신사고	2009
	기하와 벡터	최용준 외	천재교육	2010
	고등학교 수학 Ⅱ	최용준 외	천재교육	2010
	고등학교 수학 Ⅱ	황선욱 외	좋은책 신사고	2010

2) 문제 2
- 함수: 고등학교 수학. VI 함수 (좋은책 신사고)
- 도형의 이동 : 고등학교 수학. V 도형의 이동 (좋은책 신사고)
- 수열의 극한 : 수학 I. V 수열의 극한 (좋은책 신사고)
- 관련 문제 :

  좋은책 신사고 고등학교 수학(p.260 2번, p.261 9번)

  좋은책 신사고 고등학교 수학 익힘(p.237 12번)

  지학사 고등학교 수학 익힘(p.208 1번, 3번, p.209 4번)

  2016년도 대학수학능력시험 수학영역(A형) 홀수형 13번-14번

  2016년도 대학수학능력시험 수학영역(B형) 홀수형 11번

적용 교육과정	2007 개정 고등학교 교육과정 수학(교육인적자원부 제2007-79호)

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도
고등학교 교과서	고등학교 수학	황선욱 외	좋은책 신사고	2009

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도
고등학교 교과서	고등학교 수학 Ⅰ	황선욱 외	좋은책 신사고	2010
	고등학교 수학 익힘	황선욱 외	좋은책 신사고	2009
	고등학교 수학 익힘	신항균 외	지학사	2009
기타	2016학년도 대학수학능력시험 수학영역 (A, B형)			

3) 문제 3
- 수학 Ⅱ, 계승혁 외, 성지출판(p.87, p.89, p.140)
- 적분과 통계, 계승혁 외, 성지출판(p.19, p.28, p.65)
- 고등학교 수학, 황선욱 외, 좋은책 신사고(p.284)

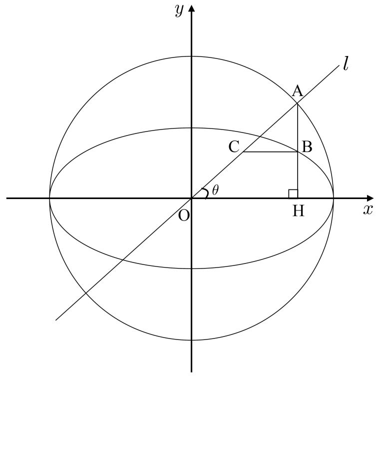
적용 교육과정	2007 개정 고등학교 교육과정 수학(교육인적자원부 제2007-79호)

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도
고등학교 교과서	수학 Ⅱ	계승혁 외	성지출판	2010
	적분과 통계	계승혁 외	성지출판	2010
	고등학교 수학	황선욱 외	좋은책 신사고	2009

2. 문항

문항 1 – 문항

1. 그림과 같이 $a > b > 0$일 때 좌표평면에 원 $x^2 + y^2 = a^2$과 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$이 있다. 원점 O를 지나는 직선 l이 원 $x^2 + y^2 = a^2$과 제1사분면에서 만나는 점을 A라 하고, 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자. 선분 AH가 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$과 만나는 점을 B라 하고, 점 B를 지나고 x축에 평행한 직선이 직선 l과 만나는 점을 C라 하자. $\angle \mathrm{AOH} = \theta$라 할 때, 다음 물음에 답하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) [30점]



(1) 점 A, B, C의 좌표를 a, b, θ의 식으로 나타내시오.

(2) 삼각형 ABC의 넓이 $S(\theta)$를 구하고, $S(\theta)$의 최댓값을 구하시오.

(3) $\lim_{\theta \to 0} \frac{S(\theta)}{\theta} = \frac{1}{4}(a^2+b^2)$일 때, $\frac{a}{b}$의 값을 구하시오.

문항 1 – 출제의도 및 해설

도형의 방정식, 이차곡선 단원에서 다루는 직선, 원, 타원을 소재로 문항을 구성하였다. 주어진 관계를 만족하는 도형 사이의 만나는 점들로 구성된 직각삼각형의 면적을 파악할 수 있는지를 묻고자 하였다. 특히, 직각삼각형의 면적을 삼각함수와 관련지어 구성하도록 하였으며 면적의 최댓값문제를 삼각함수를 활용하여 해결할 수 있는지를 묻는 문제이다. 면적과 관련된 극한의 질문에서는 삼각함수의 극한에 대한 이해를 묻고 근의 공식을 통해 조건에 맞는 결과를 이끌어 낼 수 있는지를 평가고자 하였다.

문항 1 – 채점기준

	문항	배점
1-1	점 A, B, C의 좌표를 a, b, θ의 식으로 나타내시오.	6
1-2	삼각형 ABC의 넓이 $S(\theta)$를 구하고, $S(\theta)$의 최댓값을 구하시오.	12
1-3	$\lim_{\theta \to 0} \frac{S(\theta)}{\theta} = \frac{1}{4}(a^2+b^2)$일 때, $\frac{a}{b}$의 값을 구하시오.	12

문항 1 – 예시답안 및 풀이

1) 점 A, B, C의 좌표를 a, b, θ의 식으로 나타내시오.

(예시답안) $A=(x,y)$라 하면, A는 반지름이 a인 원 위의 점이므로 $cos\,\theta = \frac{x}{a}$, $sin\,\theta = \frac{y}{a}$를 만족한다. 따라서 $A = (x,y) = (a\,cos\,\theta, a\,sin\,\theta)$이다.

$B=(w,z)$라 하면, B는 A에서 x축에 내린 수선 위의 점이므로 $w = a\,cos\,\theta$이다. 한편, B는 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점이므로 $1 = \frac{w^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2} = cos^2\theta + \frac{z^2}{b^2}$을 만족한다. 따라서 $z = \pm b\,sin\theta$가 된다. $z > 0$이므로 $z = b\,sin\theta$가 된다. 따라서 $B = (a\,cos\,\theta, b\,sin\,\theta)$이다.

$C=(u,v)$라 하면, 선분 BC가 x축에 평행이므로 $v=b\sin\theta$이다. 한편, A, C는 직선 l 위의 점이므로 $\dfrac{u}{b\sin\theta}=\dfrac{u}{v}=\dfrac{x}{y}=\dfrac{a\cos\theta}{b\sin\theta}$를 만족한다.
$u=b\cos\theta$가 되어 $C=(b\cos\theta, b\sin\theta)$이다.

2) 삼각형 ABC의 넓이 $S(\theta)$를 구하고, $S(\theta)$의 최댓값을 구하시오.

(예시답안) 삼각형 ABC는 직각삼각형이고, 선분 AB, BC의 길이는 각각 $(a-b)\sin\theta$, $(a-b)\cos\theta$이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$$S(\theta)=\frac{1}{2}(a-b)\sin\theta\times(a-b)\cos\theta=\frac{1}{4}(a-b)^2\sin2\theta$$가 된다.

구간 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$에서 삼각함수 $\sin2\theta$는 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$일 때, 최댓값 1을 가지므로 삼각형 ABC의 넓이의 최댓값은 $\dfrac{1}{4}(a-b)^2$이 된다.

3) $\displaystyle\lim_{\theta\to0}\frac{S(\theta)}{\theta}=\frac{1}{4}(a^2+b^2)$일 때, $\dfrac{a}{b}$의 값을 구하시오.

(예시답안) $\displaystyle\lim_{\theta\to0}\frac{S(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to0}\frac{(a-b)^2\sin2\theta}{4\theta}=\frac{1}{2}(a-b)^2$ 이므로,

조건으로부터 $\dfrac{1}{2}(a-b)^2=\dfrac{1}{4}(a^2+b^2)$이 성립한다. 따라서 $a^2-4ab+b^2=0$이 성립한다.

즉, $(\dfrac{a}{b})^2-4(\dfrac{a}{b})+1=0$이므로 근의 공식으로부터 $\dfrac{a}{b}=2\pm\sqrt{3}$이다.

$a>b$을 가정하였으므로 $\dfrac{a}{b}=2+\sqrt{3}$이다.

문항 2 – 문항

2. 모든 실수 x에 대하여 함수 $f(x)=|x-1|$라 할 때, 다음 물음에 답하시오. [30점]

(1) 합성함수 $(f\circ f)(|2x|)$의 그래프와 x축이 만나는 점들의 좌표를 모두 구하시오.

(2) n이 자연수일 때 합성함수 $(\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{n})(|nx|)$의 그래프와 x축이 만나는 점들의 좌표를 모두 구하시오.

(3) 문제 (2)의 합성함수 $(\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{n})(|nx|)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 둘레의 길이를 l_n이라 하고 도형의 넓이를 S_n이라 할 때, 극한값 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{nS_n}{l_n}$을 구하시오.

문항 2 – 출제의도 및 해설

이 문제는 합성함수의 성질에 대한 이해를 바탕으로 합성함수의 그래프와 축으로 둘러싸인 도형의 둘레의 길이와 넓이를 구하고 극한값을 구하는 문제이다. 이 과정에서 합성함수의 성질, 그래프와 축이 만나는 점을 구하기, 극한값 구하기, 이등변 삼각형의 이해, 식의 구성 등 중등교육 전반에서 다루는 다양한 수학적 개념과 원리의 종합적인 활용 능력과 계산 능력을 평가하고자 한다.

문항 2 – 채점기준

문항		배점
2-1	합성함수 $(f \circ f)(\lvert 2x \rvert)$의 그래프와 x축이 만나는 점들의 좌표를 모두 구하시오	5
2-2	n이 자연수일 때 합성함수 $(\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n})(\lvert nx \rvert)$의 그래프와 x축이 만나는 점들의 좌표를 모두 구하시오	12
2-3	문제 (2)의 합성함수 $(\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n})(\lvert nx \rvert)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 둘레의 길이를 l_n이라 하고 도형의 넓이를 S_n이라 할 때, 극한값 $\lim_{n\to\infty} \frac{nS_n}{l_n}$을 구하시오	13

문항 2 – 예시답안 및 풀이

1) 합성함수 $(f \circ f)(\lvert 2x \rvert)$의 그래프와 x축이 만나는 점들의 좌표를 모두 구하시오.

(예시답안) $(f \circ f)(\lvert 2x \rvert) = \lvert \lvert \lvert 2x \rvert - 1 \rvert - 1 \rvert = 0$ 로 두면 $2x = 0, \pm 2$ 이므로 구하는 점들의 좌표는 $(-1,0), (0,0), (1,0)$ 이다.

2) n이 자연수일 때 합성함수 $(\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n})(\lvert nx \rvert)$의 그래프와 x축이 만나는 점들의 좌표를 모두 구하시오.

(예시답안) 함수 $g(x) = \lvert nx \rvert$의 그래프를 y축을 따라 -1만큼 평형이동하고 x축 아래의 그래프를 x축에 대칭이도록 x축 위로 옮기면 함수 $f(\lvert nx \rvert) = \lvert \lvert nx \rvert - 1 \rvert$의 그래프를 얻는다. 같은 방법으로 $f(\lvert nx \rvert) = \lvert \lvert nx \rvert - 1 \rvert$의 그래프를 y축을 따라 -1 만큼 평형이동하고 x축 아

래의 그래프를 x축에 대칭이도록 x축 위로 옮기면 함수 $(f \circ f)(|nx|) = ||\,|nx|-1| - 1|$의 그래프를 얻는다. 합성함수 $(\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n})(|nx|)$의 그래프는 이러한 과정을 함수 $g(x) = |nx|$의 그래프에 n번 시행하여 얻어진다.
합성함수 $(\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n})(|nx|)$의 그래프가 x축과 만나는 점들 중 x좌표가 가장 작은 값은 -1이고 가장 큰 값은 1이다. 그러므로 합성함수의 그래프와 x축이 만나는 점들은 x축 위의 구간 $[-1,1]$을 n개의 같은 길이의 선분으로 나누는 점들이다. 따라서 합성함수 $(\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n})(|nx|)$와 x축이 만나는 점들의 x좌표들은 $-1+\left(\frac{2}{n}\right)k$ $(k=0,1,\cdots n)$로 구해진다. 그러므로 주어진 합성함수와 x축과 만나는 점들의 좌표는 $\left(-1+\frac{2k}{n}, 0\right)$ $(k=0,1,\cdots n)$이다.

3) 문제 (2)의 합성함수 $(\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n})(|nx|)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 둘레의 길이를 l_n이라 하고 도형의 넓이를 S_n이라 할 때, 극한값 $\lim_{n\to\infty}\frac{nS_n}{l_n}$을 구하시오.

(예시답안) 문제 (2)에서 주어진 합성함수의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형은 밑변의 길이가 $\frac{2}{n}$이고 높이가 1인 n개의 이등변 삼각형임을 알 수 있다.

이 이등변 삼각형의 둘레의 길이는 $\frac{2}{n}+2\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}$이므로 구하는 전체 둘레의 길이 $l_n = n\left(\frac{2}{n}+2\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right) = 2\left(1+\sqrt{n^2+1}\right)$이고, 구하는 넓이는 $S_n = n\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{n}\cdot 1\right) = 1$이다.

따라서 극한값 $\lim_{n\to\infty}\frac{nS_n}{l_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot 1}{2\left(1+\sqrt{1+n^2}\right)} = \frac{1}{2}$ 이다.

문항 3 – 문항

3. 중간값의 정리, 평균값의 정리, 미적분의 기본 정리는 다음과 같다. [40점]

중간값의 정리: 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$일 때, k가 $f(a)$와 $f(b)$사이의 값이면 $f(c)=k$를 만족하는 실수 c가 열린 구간 (a,b)에 적어도 하나 존재한다.

평균값의 정리: 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속이고 열린 구간 (a,b)에서 미분가능하면 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ 를 만족하는 c가 열린 구간 (a,b)에 적어도 하나 존재한다.

미적분의 기본 정리: 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad (\text{단, } a \le x \le b)$$

로 정의하면 함수 $F(x)$는 미분가능하고 $F'(x) = f(x)$이다.

위 정리를 이용하여 다음 물음에 답하시오.

(1) 미적분의 기본 정리와 평균값의 정리를 이용하여

$$\int_0^\pi e^x \sin x\,dx = \pi e^c \sin c$$

를 만족하는 실수 c가 구간 $(0,\pi)$에 존재함을 보이시오.

(2) 중간값의 정리를 이용하여

$$\int_0^\pi e^x \sin x\,dx = \sin c \int_0^\pi e^x\,dx$$

를 만족하는 실수 c가 구간 $(0,\pi)$에 존재함을 보이시오.

(3) 문제 (2)의 식을 만족하고 구간 $(0,\pi)$에 존재하는 모든 실수 c의 합을 구하시오.

문항 3 – 출제의도 및 해설

고등학교 수학의 가장 중요한 부분 중의 하나인 미분과 적분에서 배우는 여러 가지 성질들을 이해하고 있고 이들을 활용할 수 있는지를 묻는 문제이다. 이를 위하여 중간값의 정리, 최대・최소의 정리, 평균값의 정리, 미적분의 기본 정리를 주고 삼각함수와 지수함수의 곱으로 나타내어진 함수에 대하여 학생 스스로 상황을 분석하여 논리적인 사고로 적절한 문제해결 방법을 찾아낼 수 있는지를 평가하고자 한다.

문항 3 – 채점기준

	문항	배점
3-1	미적분의 기본 정리와 평균값의 정리를 이용하여 $\int_0^\pi e^x \sin x\,dx = \pi e^c \sin c$ 를 만족하는 실수 c가 구간 $(0,\pi)$에 존재함을 보이시오	15
3-2	중간값의 정리를 이용하여 $\int_0^\pi e^x \sin x\,dx = \sin c \int_0^\pi e^x\,dx$ 를 만족하는 실수 c가 구간 $(0,\pi)$에 존재함을 보이시오	15

	문항	배점
3-3	문제 (2)의 식을 만족하고 구간 $(0,\pi)$에 존재하는 모든 실수 c의 합을 구하시오	10

문항 3 – 예시답안 및 풀이

1) 미적분의 기본 정리와 평균값의 정리를 이용하여

$$\int_0^\pi e^x \sin x\, dx = \pi e^c \sin c$$

를 만족하는 실수 c가 구간 $(0,\pi)$에 존재함을 보이시오.

(예시답안) 미적분의 기본 정리에 의해 $x \in [0,\pi]$에 대하여 $F(x) = \int_0^x e^x \sin x\, dt$ 는 미분가능하고 $F'(x) = e^x \sin x$ 로 주어진다.

따라서 $\int_0^\pi e^x \sin x\, dx = F(\pi) - F(0)$ 이고 $F(0)=0$이므로 평균값의 정리에 의하여

$$\frac{F(\pi)}{\pi} = \frac{F(\pi)-F(0)}{\pi - 0} = F'(c) = e^c \sin c$$

가 성립하는 c가 $(0,\pi)$에 적어도 하나 존재한다.

2) 중간값의 정리를 이용하여

$$\int_0^\pi e^x \sin x\, dx = \sin c \int_0^\pi e^x\, dx$$

를 만족하는 실수 c가 구간 $(0,\pi)$에 존재함을 보이시오.

(예시답안) 부분적분에 의하여 $\int e^x \sin x\, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$ 이므로

$$\int_0^\pi e^x \sin x\, dx = \left[\frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x)\right]_0^\pi = \frac{e^\pi + 1}{2} \quad \text{이고}$$

$\dfrac{\int_0^\pi e^x \sin x\, dx}{\int_0^\pi e^x\, dx} = \dfrac{1}{2}\dfrac{e^\pi+1}{e^\pi-1}$ 이다. $3 < e^\pi$가 성립하므로 $e^\pi + 1 < 2e^\pi - 2$ 이 되어서

$$0 < \frac{\int_0^\pi e^x \sin x\, dx}{\int_0^\pi e^x\, dx} = \frac{1}{2}\frac{e^\pi+1}{e^\pi-1} < 1 \text{ 이 성립한다.}$$

따라서 중간값의 정리에 의해 적당한 $c \in (0, \pi)$가 존재해서

$$\frac{\int_0^\pi e^x \sin x\, dx}{\int_0^\pi e^x\, dx} = \frac{1}{2}\frac{e^\pi + 1}{e^\pi - 1} = \sin c$$ 를 만족한다.

3) 문제 (2)의 식을 만족하고 구간 $(0, \pi)$에 존재하는 모든 실수 c의 합을 구하시오.

(예시답안) $y = \sin x$는 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 에서 증가 함수이고 $[\frac{\pi}{2,}\pi]$ 에서 감소 함수이므로 $\frac{1}{2}\frac{e^\pi + 1}{e^\pi - 1} = \sin c < 1$ 를 만족하면서 $[0, \frac{\pi}{2})$에 포함되어 있는 c와 $(\frac{\pi}{2,}\pi]$에 포함되어 있는 c는 하나씩밖에 없다. 이 두 개의 c를 각각 $c_{1,} c_2$라 하면 $\sin c_1 = \frac{1}{2}\frac{e^\pi + 1}{e^\pi - 1} = \sin c_2$이다. 그러므로 $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$에 의해 적당한 각도 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$에 대하여 $c_1 = \theta$ 와 $c_2 = \pi - \theta$로 주어진다. 따라서 $c_1 + c_2 = \pi$ 이다.