2016학년도 수시모집 논술전형

논술고사 문제지 (자연계열 I)

모집단위	학부/학과	수험번호		성　명	

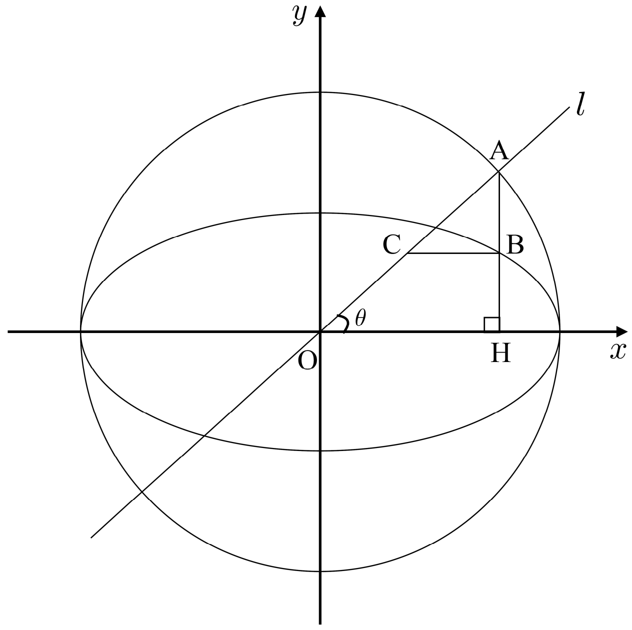
◆ 유 의 사 항 ◆

1. 시험시간은 100분임.
2. 답안은 검은색 펜이나 연필로 작성할 것.
3. 학교명, 성명 등 자신의 신상에 관련된 사항을 답안에는 드러내지 말 것.
4. 연습은 문제지 여백을 이용할 것.
5. 답안지 분량은 문항별 답안 길이에 맞추어져 있으므로 반드시 해당 문항 답안지에만 답안을 작성할 것.

감독확인

이 화 여 자 대 학 교

1 그림과 같이 $a > b > 0$일 때 좌표평면에 원 $x^2 + y^2 = a^2$과 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$이 있다. 원점 O를 지나는 직선 l이 원 $x^2 + y^2 = a^2$과 제1사분면에서 만나는 점을 A라 하고, 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자. 선분 AH가 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$과 만나는 점을 B라 하고, 점 B를 지나고 x축에 평행한 직선이 직선 l과 만나는 점을 C라 하자. $\angle \mathrm{AOH} = \theta$라 할 때, 다음 물음에 답하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) [30점]



(1) 점 A, B, C의 좌표를 a, b, θ의 식으로 나타내시오.

(2) 삼각형 ABC의 넓이 $S(\theta)$를 구하고, $S(\theta)$의 최댓값을 구하시오.

(3) $\lim_{\theta \to 0} \frac{S(\theta)}{\theta} = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$일 때, $\frac{a}{b}$의 값을 구하시오.

2 모든 실수 x에 대하여 함수 $f(x)=|x-1|$라 할 때, 다음 물음에 답하시오. [30점]

(1) 합성함수 $(f\circ f)(|2x|)$의 그래프와 x축이 만나는 점들의 좌표를 모두 구하시오.

(2) n이 자연수일 때 합성함수 $(\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{n})(|nx|)$의 그래프와 x축이 만나는 점들의 좌표를 모두 구하시오.

(3) 문제 (2)의 합성함수 $(\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{n})(|nx|)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 둘레의 길이를 l_n이라 하고 도형의 넓이를 S_n이라 할 때, 극한값 $\lim_{n\to\infty}\frac{nS_n}{l_n}$을 구하시오.

3 중간값의 정리, 평균값의 정리, 미적분의 기본 정리는 다음과 같다. [40점]

중간값의 정리: 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$일 때, k가 $f(a)$와 $f(b)$사이의 값이면 $f(c)=k$를 만족하는 실수 c가 열린 구간 (a,b)에 적어도 하나 존재한다.

평균값의 정리: 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속이고 열린 구간 (a,b)에서 미분가능하면 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$를 만족하는 실수 c가 열린 구간 (a,b)에 적어도 하나 존재한다.

미적분의 기본 정리: 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt \quad (\text{단, } a \le x \le b)$$

로 정의하면 함수 $F(x)$는 미분가능하고 $F'(x)=f(x)$이다.

위 정리를 이용하여 다음 물음에 답하시오.

(1) 미적분의 기본 정리와 평균값의 정리를 이용하여

$$\int_0^{\pi} e^x \sin x\,dx = \pi e^c \sin c$$

를 만족하는 실수 c가 구간 $(0,\pi)$에 존재함을 보이시오.

(2) 중간값의 정리를 이용하여

$$\int_0^{\pi} e^x \sin x\,dx = \sin c \int_0^{\pi} e^x\,dx$$

를 만족하는 실수 c가 구간 $(0,\pi)$에 존재함을 보이시오.

(3) 문제 (2)의 식을 만족하고 구간 $(0,\pi)$에 존재하는 모든 실수 c의 합을 구하시오.