4. 자연계열 II

■ 출제의도

자연계열의 경우는 직선 및 타원, 수열, 점화식, 항등식, 함수의 극한 및 초월함수, 최댓값, 최솟값 등 고등학교 교육과정에서 다루는 개념에 대한 이해와 이를 적용하여 해결할 수 있는 문제들로 구성되어 있다. 산술평균과 기하평균과의 관계를 통하여 서로 다른 수열의 대소 관계를 증명하고, 이를 바탕으로 수열의 수렴성과 극한값을 찾는 문제로 구성되었다. 또한 직선과 타원의 관계를 이용하여 주어진 조건에 맞는 범위 및 최댓값과 최솟값을 구하는 문제로 구성되었으며 지수함수, 로그함수, 삼각함수 등 초월함수를 바탕으로 정의된 수열에 대하여 수렴성 및 극한값을 알아보는 문제를 제시하였다.

문제 1. 두 수열 $\{x_n\}$과 $\{y_n\}$이 다음의 부등식과 점화식으로 정의되어 있다.

$$0 < x_1 < y_1, \quad x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

(1) 모든 자연수 n에 대하여 $x_n < x_{n+1}$ 과 $y_{n+1} < y_n$ 이 성립함을 보이시오. [10점]

(2) 모든 자연수 n에 대하여 $0 < y_{n+1} - x_{n+1} < \frac{1}{2^n}(y_1 - x_1)$ 이 성립함을 보이시오. [10점]

(3) 두 수열 중 하나가 수렴하면 다른 하나도 수렴하는 것을 보이고, 이 경우에 두 수열의 극한값이 같음을 보이시오. [15점]

■ 모범답안

(1) 산술평균과 기하평균의 관계에서 $x_n \le y_n$ 이 성립함을 알고 있고, 첫 번째 조건 $0 < x_1 < y_1$에 의해 등호가 성립하지 않음을 알 수 있어서 모든 자연수 n에 대하여 $x_n < y_n$ 이 참이다. 그러므로

$$x_n = \sqrt{x_n x_n} < \sqrt{x_n y_n} = x_{n+1}$$
$$y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} < \frac{y_n + y_n}{2} = y_n$$

이 성립한다.

(2) 산술평균과 기하평균의 관계와 $0 < x_1 < y_1$ 에서

$$0 < y_{n+1} - x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} - \sqrt{x_n y_n} < \frac{x_n + y_n}{2} - \sqrt{x_n x_n} = \frac{x_n + y_n}{2} - x_n = \frac{y_n - x_n}{2}$$

을 얻을 수 있고, 수학적 귀납법을 적용하면 모든 자연수 n에 대하여 $0 < y_{n+1} - x_{n+1} < \frac{1}{2^n}(y_1 - x_1)$ 이 성립한다.

(3) x_1과 y_1이 상수이므로 n값이 커짐에 따라 $\frac{1}{2^n}(y_1-x_1) \to 0$ 이다.

만약에 $\{x_n\}$이 극한값 x에 수렴하면, $\frac{1}{2^n}(y_1-x_1)+x_{n+1}$도 n이 커짐에 따라 x에 수렴하고, (2)의 부등식을 $x_{n+1} < y_{n+1} < \frac{1}{2^n}(y_1-x_1)+x_{n+1}$ 으로 변형하면, 스퀴즈 정리에 의해 $\{y_n\}$도 수렴하는 수열이고 그 극한값이 x이다.

$\{y_n\}$이 극한값 y에 수렴하는 경우, (2)의 부등식을 $y_{n+1}-\frac{1}{2^n}(y_1-x_1) < x_{n+1} < y_{n+1}$ 으로 변형하여 스퀴즈 정리를 적용하면 $\{x_n\}$이 y로 수렴하는 수열임을 보일 수 있다.

문제 2. 좌표평면 위의 점 (x,y)가 부등식 $\frac{x^2}{4}+y^2 \le 1$을 만족할 때 다음 물음에 답하시오.

(1) 주어진 부등식을 만족하는 모든 점 (x,y)가 $x+y=3$을 만족하지 않음을 보이시오. [7점]

(2) 점 $(4,-1)$을 지나는 기울기 m인 직선의 모든 점이 주어진 부등식을 만족하지 않도록 하는 실수 m의 범위를 정하시오. [10점]

(3) 주어진 부등식을 만족하는 점 (x,y)에 대하여 $\frac{x-y-5}{x+y-3}$의 최댓값과 최솟값을 구하시오. [13점]

■ 모범답안

(1) 직선 $x+y-3=0$이 타원 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$과 만나지 않음을 보이는 것과 같은 문제이다.

기울기가 -1인 직선이 타원 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 접하는 것은 $y=-x\pm\sqrt{4(-1)^2+1}=-x\pm\sqrt{5}$ 이며 $3>\sqrt{5}$ 이므로 직선 $x+y-3=0$은 타원 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$과 만나지 않는다.

(별해) 절대부등식을 활용하면

$$5 \ge \left(\frac{x^2}{4}+y^2\right)(2^2+1^2) \ge (x+y)^2$$

이므로 $|x+y| \le \sqrt{5}$ 를 만족하여야 한다. 따라서 부등식을 만족하는 점 중 $x+y=3$를 만족하는 점은 없다.

(2) 타원 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 밖의 점 $(4,-1)$을 지나는 기울기 m인 직선 $y=m(x-4)-1$이 타원을 지나지 않으려면 $|-4m-1| > \sqrt{4m^2+1}$ 을 만족하여야 하므로, 구하는 범위는 $m>0$ 또는 $m < -\frac{2}{3}$ 이다.

(3) 주어진 식의 값을 a이라고 두면 $\dfrac{x-y-5}{x+y-3}=a$이므로, 직선 $(x-y-5)-a(x+y-3)=0$이 타원 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$을 지나도록 하는 실수 a의 범위를 구하는 문제와 같다. 실수 a에 대하여 $(x-y-5)-a(x+y-3)=0$을 만족하는 점들은 점 $(4,-1)$을 지나고 기울기 $\dfrac{1-a}{a+1}$인 직선을 나타내며, 문제 (2)에서 기울기 $\dfrac{1-a}{a+1}$인 직선이 타원을 지나려면 $-\dfrac{2}{3}\le\dfrac{1-a}{a+1}\le 0$을 만족한다. 따라서 $1\le a\le 5$으로 구해지며 실수 a의 최댓값은 5이며 최솟값은 1이다.

문제 3. 미분가능한 함수 $f(x)$가 있다. 수열 $\{x_n\}$에 대하여 $0<x_1<1$ 이고 x_{n+1}은 점 $(x_n, f(x_n))$에서 그은 $f(x)$의 접선의 x-축 절편으로 주어진다. 함수 $f(x)$가 (1), (2)와 같이 주어진 경우, 다음의 [명제]를 근거로 수열 $\{x_n\}$이 수렴하는지 판단하고 수렴하는 경우 그 극한값을 구하시오.

[명제] 어떤 실수 M에 대하여 수열 $\{x_n\}$이 아래 조건 (a), (b) 중 하나를 만족하면 수열 $\{x_n\}$은 수렴한다.

(a) 모든 자연수 n에 대하여 $x_n \le x_{n+1} \le M$ 이다.

(b) 모든 자연수 n에 대하여 $x_n \ge x_{n+1} \ge M$ 이다.

(1) $f(x)=\ln x\,(=\log_e x)$ [15점]

(2) $f(x)=e^x$ [10점]

(3) $f(x)=\tan x$ [15점]

■ 모범답안

(1) x_{n+1}은 점 $(x_n, f(x_n))$에서 그은 $f(x)$의 접선의 x-축 절편이므로

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=x_n-\frac{\ln x_n}{(1/x_n)}=x_n(1-\ln x_n) \text{ 을 만족한다.}$$

이 점화식을 활용하여 모든 자연수 n에 대하여 $x_n \le x_{n+1} < 1$ 이 성립함을 보이도록 하자.

i. 먼저 수열의 조건으로부터 $0<x_1<1$이 성립한다.

ii. 자연수 n에 대하여 $0<x_n<1$이 성립한다고 가정하자.

이 경우 $0<-\ln x_n<1$이 되므로 $0<x_n<x_n(1-\ln x_n)=x_{n+1}$이 성립한다.

한편, 함수 $f(x)=x-x\ln x$ 는 $0<x<1$에서 $f'(x)=-\ln x>0$이고 $f(1)=1$이므로 $f(x)<1$ 이 된다. 즉, $x_{n+1}=x_n(1-\ln x_n)<1$이 성립한다. 따라서 $x_n<x_{n+1}<1$이 성립한다.

결론적으로 모든 자연수 n에 대하여 $x_n \le x_{n+1} < 1$이 성립한다.

[명제]에 의하여 수열 $\{x_n\}$은 수렴한다. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$라 하면, 점화식으로부터

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n(1-\ln x_n) = \alpha(1-\ln \alpha)$$

을 만족한다. 따라서 $\alpha=0$이거나 $\alpha=1$이 된다. $0<x_1<x_n$이므로 $\alpha=1$이 된다.

(2) x_{n+1}은 점 $(x_n, f(x_n))$에서 그은 $f(x)$의 접선의 x-축 절편이므로

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{e^{x_n}}{e^{x_n}} = x_n - 1$$

을 만족한다. 이 점화식으로부터 모든 자연수 n에 대하여 $x_{n+1}=x_1-n$ 이 성립한다. 따라서 수열 $\{x_n\}$은 $-\infty$로 발산한다.

(3) $f(x)=\tan x$

x_{n+1}은 점 $(x_n, f(x_n))$에서 그은 $f(x)$의 접선의 x-축 절편이므로

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\tan x_n}{\sec^2 x_n} = x_n - \frac{1}{2}\sin 2x_n$$ 을 만족한다.

이 점화식을 활용하여 모든 자연수 n에 대하여 $x_n \ge x_{n+1} > 0$ 이 성립함을 보이도록 하자.

i. 먼저 수열의 조건으로부터 $0<x_1<1$이 성립한다.

ii. 자연수 n에 대하여 $0<x_n<1$이 성립한다고 가정하자.

함수 $f(x) = x - \frac{1}{2}\sin 2x$ 는 $0<x<1$에서 $f'(x) = 1-\cos 2x > 0$이고 $f(0)=0$이므로 $f(x)>0$

이 된다. 즉, $0<x_n<1$에 대하여 $0<\frac{1}{2}\sin 2x_n < x_n$이 되어 $0<x_n - \frac{1}{2}\sin 2x_n < x_n < 1$이 성립한다.

따라서 $0<x_{n+1}<x_n<1$이 성립한다.

결론적으로 모든 자연수 n에 대하여 $0<x_{n+1}<x_n<1$이 성립한다.

[명제]에 의하여 수열 $\{x_n\}$은 수렴한다. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$라 하면, 점화식으로부터

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(x_n - \frac{1}{2}\sin 2x_n\right) = \alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha$$

을 만족한다. 따라서 $\alpha=0$이 된다.