

3. 자연계열 I

■ 출제의도

자연계열의 경우는 직선 및 타원, 수열, 점화식, 항등식, 함수의 극한 및 초월함수, 최댓값, 최솟값 등 고등학교 교육과정에서 다루는 개념에 대한 이해와 이를 적용하여 해결할 수 있는 문제들로 구성되어 있다. 산술평균과 기하평균과의 관계를 통하여 서로 다른 수열의 대소 관계를 증명하고, 이를 바탕으로 수열의 수렴성과 극한값을 찾는 문제로 구성되었다. 또한 직선과 타원의 관계를 이용하여 주어진 조건에 맞는 범위 및 최댓값과 최솟값을 구하는 문제로 구성되었으며 지수함수, 로그함수, 삼각함수 등 초월함수를 바탕으로 정의된 수열에 대하여 수렴성 및 극한값을 알아보는 문제를 제시하였다.

문제 1. 두 수열 $\{x_n\}$ 과 $\{y_n\}$ 이 다음의 부등식과 점화식으로 정의되어 있다.

$$0 < x_1 < y_1, \quad x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

- (1) 모든 자연수 n 에 대하여 $x_n < x_{n+1}$ 과 $y_{n+1} < y_n$ 이 성립함을 보이시오. [10점]
- (2) 모든 자연수 n 에 대하여 $0 < y_{n+1} - x_{n+1} < \frac{1}{2^n}(y_1 - x_1)$ 이 성립함을 보이시오. [10점]
- (3) 두 수열 중 하나가 수렴하면 다른 하나도 수렴하는 것을 보이고, 이 경우에 두 수열의 극한값이 같음을 보이시오. [15점]

■ 모범답안

(1) 산술평균과 기하평균의 관계에서 $x_n \leq y_n$ 이 성립함을 알고 있고, 첫 번째 조건 $0 < x_1 < y_1$ 에 의해 등호가 성립하지 않음을 알 수 있어서 모든 자연수 n 에 대하여 $x_n < y_n$ 이 참이다. 그러므로

$$\begin{aligned} x_n &= \sqrt{x_n x_n} < \sqrt{x_n y_n} = x_{n+1} \\ y_{n+1} &= \frac{x_n + y_n}{2} < \frac{y_n + y_n}{2} = y_n \end{aligned}$$

이 성립한다.

(2) 산술평균과 기하평균의 관계와 $0 < x_1 < y_1$ 에서

$$0 < y_{n+1} - x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} - \sqrt{x_n y_n} < \frac{x_n + y_n}{2} - \sqrt{x_n x_n} = \frac{x_n + y_n}{2} - x_n = \frac{y_n - x_n}{2}$$

을 얻을 수 있고, 수학적 귀납법을 적용하면 모든 자연수 n 에 대하여 $0 < y_{n+1} - x_{n+1} < \frac{1}{2^n}(y_1 - x_1)$

이 성립한다.

(3) x_1 과 y_1 이 상수이므로 n 값이 커짐에 따라 $\frac{1}{2^n}(y_1 - x_1) \rightarrow 0$ 이다.

만약에 $\{x_n\}$ 이 극한값 x 에 수렴하면, $\frac{1}{2^n}(y_1 - x_1) + x_{n+1}$ 도 n 이 커짐에 따라 x 에 수렴하고, (2)의 부등식을 $x_{n+1} < y_{n+1} < \frac{1}{2^n}(y_1 - x_1) + x_{n+1}$ 으로 변형하면, 스퀴즈 정리에 의해 $\{y_n\}$ 도 수렴하는 수열이고 그 극한값이 x 이다.

$\{y_n\}$ 이 극한값 y 에 수렴하는 경우, (2)의 부등식을 $y_{n+1} - \frac{1}{2^n}(y_1 - x_1) < x_{n+1} < y_{n+1}$ 으로 변형하여 스퀴즈 정리를 적용하면 $\{x_n\}$ 이 y 로 수렴하는 수열임을 보일 수 있다.

문제 2. 좌표평면 위의 점 (x, y) 가 부등식 $\frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1$ 을 만족할 때 다음 물음에 답하시오.

(1) 주어진 부등식을 만족하는 모든 점 (x, y) 가 $x + y = 3$ 을 만족하지 않음을 보이시오. [7점]

(2) 주어진 부등식을 만족하는 점 (x, y) 중 $(x - y - 5) + m(x + y - 3) = 0$ 을 만족하는 점이 존재하도록 실수 m 의 범위를 정하시오. [13점]

(3) 주어진 부등식을 만족하는 점 (x, y) 에 대하여 $\frac{x - y - 5}{x + y - 3}$ 의 최댓값과 최솟값을 구하시오. [10점]

■ 모범답안

(1) 직선 $x + y - 3 = 0$ 이 타원 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 과 만나지 않음을 보이는 것과 같은 문제이다.

기울기가 -1 인 직선이 타원 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 접하는 것은 $y = -x \pm \sqrt{4(-1)^2 + 1} = -x \pm \sqrt{5}$ 이며

$3 > \sqrt{5}$ 이므로 직선 $x + y - 3 = 0$ 은 타원 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 과 만나지 않는다.

(별해) 절대부등식을 활용하면

$$5 \geq \left(\frac{x^2}{4} + y^2 \right) (2^2 + 1^2) \geq (x + y)^2$$

이므로 $|x + y| \leq \sqrt{5}$ 를 만족하여야 한다. 따라서 부등식을 만족하는 점 중 $x + y = 3$ 를 만족하는 점은 없다.

(2) 실수 m 에 대하여 $(x - y - 5) + m(x + y - 3) = 0$ 을 만족하는 점들은 점 $(4, -1)$ 을 지나고 기울기 $-\frac{m+1}{m-1}$ 인 직선을 나타낸다. 타원 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 밖의 점 $(4, -1)$ 을 지나고 기울기 a 인 직선

$y = a(x - 4) - 1$ 이 타원을 지나려면 $|-4a - 1| \leq \sqrt{4a^2 + 1}$ 을 만족하여야 하므로, $-\frac{2}{3} \leq a \leq 0$ 이다. 따

라서 구하려는 실수 m 은 $-\frac{2}{3} \leq -\frac{m+1}{m-1} \leq 0$ 를 만족하고 $-5 \leq m \leq -1$ 이다.

(3) 주어진 식의 값을 a 이라고 두면 $\frac{x-y-5}{x+y-3} = a$ 이므로 실수 a 의 범위는 문제 (2)를 만족하는 $-m$ 의 범위와 같다. 따라서 최댓값은 5이며 최솟값은 1이다.

문제 3. 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 있다. 수열 $\{x_n\}$ 에 대하여 $0 < x_1 < 1$ 이고 x_{n+1} 은 점 $(x_n, f(x_n))$ 에서 그은 $f(x)$ 의 접선의 x -축 절편으로 주어진다. 함수 $f(x)$ 가 (1), (2)와 같이 주어진 경우, 다음의 [명제]를 근거로 수열 $\{x_n\}$ 이 수렴하는지 판단하고 수렴하는 경우 그 극한값을 구하시오.

[명제] 어떤 실수 M 에 대하여 수열 $\{x_n\}$ 이 아래 조건 (a), (b) 중 하나를 만족하면 수열 $\{x_n\}$ 은 수렴한다.

(a) 모든 자연수 n 에 대하여 $x_n \leq x_{n+1} \leq M$ 이다.

(b) 모든 자연수 n 에 대하여 $x_n \geq x_{n+1} \geq M$ 이다.

(1) $f(x) = \ln x (= \log_e x)$ [20점]

(2) $f(x) = e^x$ [15점]

■ 모범답안

(1) x_{n+1} 은 점 $(x_n, f(x_n))$ 에서 그은 $f(x)$ 의 접선의 x -축 절편이므로

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\ln x_n}{(1/x_n)} = x_n(1 - \ln x_n) \text{ 을 만족한다.}$$

이 점화식을 활용하여 모든 자연수 n 에 대하여 $x_n \leq x_{n+1} < 1$ 이 성립함을 보이도록 하자.

i. 먼저 수열의 조건으로부터 $0 < x_1 < 1$ 이 성립한다.

ii. 자연수 n 에 대하여 $0 < x_n < 1$ 이 성립한다고 가정하자.

이 경우 $0 < -\ln x_n < 1$ 이 되므로 $0 < x_n < x_n(1 - \ln x_n) = x_{n+1}$ 이 성립한다.

한편, 함수 $f(x) = x - x \ln x$ 는 $0 < x < 1$ 에서 $f'(x) = -\ln x > 0$ 이고 $f(1) = 1$ 이므로 $f(x) < 1$ 이 된다. 즉, $x_{n+1} = x_n(1 - \ln x_n) < 1$ 이 성립한다. 따라서 $x_n < x_{n+1} < 1$ 이 성립한다.

결론적으로 모든 자연수 n 에 대하여 $x_n \leq x_{n+1} < 1$ 이 성립한다.

[명제]에 의하여 수열 $\{x_n\}$ 은 수렴한다. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$ 라 하면, 점화식으로부터

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(1 - \ln x_n) = \alpha(1 - \ln \alpha)$$

을 만족한다. 따라서 $\alpha = 0$ 이거나 $\alpha = 1$ 이 된다. $0 < x_1 < x_n$ 이므로 $\alpha = 1$ 이 된다.

(2) x_{n+1} 은 점 $(x_n, f(x_n))$ 에서 그은 $f(x)$ 의 접선의 x -축 절편이므로

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{e^{x_n}}{e^{x_n}} = x_n - 1$$

을 만족한다. 이 점화식으로부터 모든 자연수 n 에 대하여 $x_{n+1} = x_n - 1$ 이 성립한다. 따라서 수열 $\{x_n\}$ 은 $-\infty$ 로 발산한다.