2015학년도 수시모집 논술고사 해설 및 예시답안

◆ 전형명칭: 2015학년도 수시모집 일반전형

◆ 모집계열: 자연계열 Ⅱ

◆ 출제유형: 통합교과형 중 자료제시 논술형

◆ 출제방향(취지) 및 교과서 관련여부 및 근거

본교의 논술고사는 고등학생들이 정규 교육과정을 통해 학습한 다양한 지적 능력을 체계적이며 종합적으로 측정할 수 있는 문제들을 출제하여 입학 전형 요소로 활용함과 동시에 논술고사 양식의 다변화와 다양화를 추구하였다. 자연계 논술은 수리논술 3문항으로 구성되었다. 수리영역 문항들은 고교 과정에서 다루고 있는 원과 타원의 정의 및 성질에 대한 이해, 삼각함수의 연속성 및 주기성, 수열의 수렴성, 점대칭의 성질, 변곡점의 개념, 다항식 표현, 다항함수 그래프의 이해, 미분과 적분의 활용 등 기본 개념에 대한 이해 및 활용도를 물었다.

◆ 출제문제 해설

(1) 문제 1 [30점]

① 출제의도

이 문제는 기하적인 조건을 만족하는 자취를 유추하고 자취와 관련된 면적을 주어진 조건에 관한 함수로 구성하여 그 최댓값을 구하는 문제이다. 이 과정에서 이차곡선 중 원과 타원의 정의 및 성질에 대한 이해와 도형의 면적 구하기, 주어진 조건하의 최댓값 구하기 등 중등 교육과정에서 다루는 수학적 개념과 원리에 대한 종합적 활용 능력을 평가하고자 한다.

② 예시답안

1) 점 P가 원 C의 내부의 점이므로 $\overline{OP} = \overline{OQ} - \overline{PQ} = 1 - \overline{PQ}$이다. 점 P는 $\overline{AP} - \overline{PQ} = b$를 만족하므로 $\overline{AP} + \overline{OP} = b+1$이 된다. 따라서 점 P의 자취는 점 A와 점 O를 초점으로 하고 장축의 길이가 $b+1$인 타원 중 원 C의 내부에 포함되는 부분이다.

2) 점 A와 점 O를 초점으로 하고 장축의 길이가 $b+1$인 타원상의 점 중 점 O에서 가장 멀리 떨어진 점 P_0은 타원의 중심으로부터 장축의 길이의 절반만큼 떨어진 점이다. 따라서 점 O에서 P_0까지의 거리는 $\overline{AO}$의 거리의 절반과 장축의 길이의 절반의 합이다. $b \le 1-a$이므로

$$\overline{OP_0} = \frac{a}{2} + \frac{b+1}{2} \le \frac{a}{2} + \frac{2-a}{2} = 1$$

이 되어 타원 전체가 원 C의 내부에 포함되는 것을 알 수 있다.

<뒷면에 계속>

단축의 길이가 $2\sqrt{\left(\frac{b+1}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{(b+1)^2-a^2}$ 이므로 자취(타원)로 둘러싸인 면적은 $\frac{\pi}{4}(b+1)\sqrt{(b+1)^2-a^2}$ 이다.

면적이 b에 대해 증가함수이므로 주어진 구간 $0<b\le 1-a$에서 $b=1-a$일 때 최대이다. 따라서 면적의 최댓값은 $\frac{\pi}{2}(2-a)\sqrt{1-a}$ 이다.

(2) 문제 2 [35점]

① 출제의도

이 문제는 삼차함수의 변곡점의 성질에 대한 이해를 바탕으로 극대점, 극소점의 함수값에 대한 조건을 활용하여 삼차함수를 구하는 문제이다. 이 과정에서 점대칭의 성질, 변곡점의 개념, 다항함수의 그래프의 이해, 미분과 적분의 활용, 다항식 표현 구성 능력 등 중등교육 전반에서 다루는 다양한 수학적 개념과 원리의 종합적인 활용능력과 계산능력을 평가하고자 한다.

② 예시답안

1) 함수 $f(x)-(x+2)$을 $(x-\alpha)(x-\beta)(x+\alpha)$라고 두고

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}(x-\alpha)(x-\beta)(x+\alpha)dx=0$$

을 계산하면 $\beta=0$을 얻는다. 함수 $f(x)-(x+2)=(x-\alpha)x(x+\alpha)$을 두 번 미분하여 변곡점$(0,0)$을 가짐을 알 수 있다.

(별해) 함수 $f(x)-(x+2)$을 $(x-\alpha)(x-\beta)(x+\alpha)$라고 두면 $x=\frac{\beta}{3}$에서 변곡점을 가짐을 알 수 있다. 조건 $\int_{-\alpha}^{\alpha}(x-\alpha)(x-\beta)(x+\alpha)dx=0$을 계산하면 $\beta=0$을 얻는다. 따라서 함수 $f(x)-(x+2)$은 변곡점 $(0,0)$을 가진다.

2) 점대칭과 변곡점의 성질이 평행이동에 대하여 보존되므로 (p,q)를 원점 $(0,0)$로 생각할 수 있다. 임의의 삼차함수 $g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$가 원점 $(0,0)$에 변곡점을 가지면 $b=0=d$이므로 함수 $g(x)$은 $g(-x)=-g(x)$을 만족한다. 함수 $g(x)$의 그래프 $(x,g(x))$은 원점 대칭 변환에 대하여 $(-x,g(-x))=(-x,-g(x))$를 만족하므로 원점 대칭이다.

(별해) 그래프 $(x,g(x))$가 점(p,q)에 대칭임을 보이기 위하여 $g(2p-x)=2q-g(x)$을 보인다. 삼차함수 $g(x)$가 (p,q)에 변곡점을 가지므로 $g''(x)=c_1(x-p)$라고 두고 $(x-p)$에 대하여 두 번 적분하면 $g(x)=\frac{c_1}{6}(x-p)^3+c_2(x-p)+q$ 을 얻는다. 이제

$$g(2p-x)=\frac{c_1}{6}(p-x)^3+c_2(p-x)+q=-g(x)+2q$$

이므로 그래프 $(x,g(x))$가 점(p,q)에 대칭이다.

<뒷면에 계속>

3) $(f(x)-(x+2))''=f''(x)$이므로 $f(x)-(x+2)$와 $f(x)$가 모두 $x=\beta=0$에서 변곡점을 가진다. 물음(2)에 따라 삼차함수 $f(x)$가 변곡점에 대칭이므로 함수 $f(x)$의 변곡점은 $\frac{3+1}{2}=2$을 함숫값으로 하므로 $f(0)=2$이다. 삼차함수 $f(x)$가 변곡점 $(0,2)$에 대하여 대칭이므로 $x=a$와 $x=-a$에서 극솟값과 극댓값을 갖는다고 할 때 $f(-a)=3, f(a)=1$이다. $f''(x)=6x$이므로 적분하면 $f'(x)=3(x^2-a^2)$이고 $f(x)=x^3-3a^2x+2$이다. $f(a)=1$을 풀면 $a=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$을 얻는다. 따라서 $f(x)=x^3-\frac{3}{\sqrt[3]{4}}x+2$ 이다.

(3) 문제 3 [40점]

① 출제의도

삼각함수를 활용하여 주어진 유리수열 $\{a_n\}$의 몇 가지 기본적인 성질을 수학적 귀납법과 삼각함수의 합과 차의 공식으로 유도하도록 하였다. 이 과정에서 학생들이 삼각함수의 차의 공식으로 수열의 일반항을 구할 수 있고, 삼각함수의 개념, 수학적 귀납법, 수 체계, 방정식의 성질을 종합적으로 활용하여 흥미로운 성질들을 발견할 수 있는 지를 평가한다.

② 예시답안

1) 수학적 귀납법을 이용하여 $a_n=\tan n\theta$임을 보인다.

$n=1$일 때 위의 관계는 참이다.

$n=k$일 때 $a_k=\tan k\theta$이면, 삼각함수의 덧셈정리에 의해

$$a_{k+1}=\frac{2a_k+3}{2-3a_k}=\frac{\frac{2a_k+3}{2}}{\frac{2-3a_k}{2}}=\frac{a_k+\frac{3}{2}}{1-\frac{3}{2}a_k}=\frac{\tan k\theta+\tan\theta}{1-\tan k\theta\cdot\tan\theta}=\tan(k+1)\theta$$

이다. 그러므로 임의의 자연수 n에 대하여 $a_n=\tan n\theta$이다.

2)

가) $a_1=\frac{3}{2}$은 유리수이다. a_n이 유리수라면 $2a_n+3$ 와 $2-3a_n$도 유리수이고 $a_{n+1}=\frac{2a_n+3}{2-3a_n}$ 도 유리수이다 그러므로 수학적 귀납법에 의해 모든 a_n은 유리수이다.

나) 먼저 n이 홀수일 때 $a_n=\tan n\theta\neq 0$을 보이자.

$a_1=\frac{3}{2}\neq 0$은 자명하다.

1보다 큰 홀수 $n=2k+1$에 대하여 $a_n=a_{2k+1}=\frac{2a_{2k}+3}{2-3a_{2k}}=\frac{2\tan 2k\theta+3}{2-3\tan 2k\theta}$이다. 따라서 $a_{2k+1}\neq 0$이기 위한 필요충분조건은 $\tan 2k\theta\neq-\frac{3}{2}$ 이다. $\tan$함수의 배각공식에 의해 $\tan 2k\theta=\frac{2\tan k\theta}{1-\tan^2 k\theta}=\frac{2a_k}{1-a_k^2}$이므로 $\tan 2k\theta\neq-\frac{3}{2}$이기 위한 필요충분조건은 $3a_k^2-4a_k-3\neq 0$이다.

<뒷면에 계속>

한편 방정식 $3x^2-4x-3=0$의 두 근은 $x=\frac{4\pm\sqrt{16+36}}{6}=\frac{2\pm\sqrt{13}}{3}$로 무리수이다. 하지만 처음 가)에서 $a_k=\tan k\theta$가 유리수임을 보였으므로 $3a_k^2-4a_k-3\neq 0$이 성립한다. 그러므로 $a_{2k+1}\neq 0$이다.

다) n이 짝수일 때, $a_n=\tan n\theta\neq 0$을 보이자.
자연수 n을 소인수분해하면 자연수 k와 l이 존재하여 $n=2^k(2l-1)$으로 쓸 수 있다.
짝수 $n=2^k(2l-1)$에 대하여 tan배각공식을 활용하면

$$a_n=a_{2^k(2l-1)}=\tan 2^k(2l-1)\theta=\tan 2\cdot 2^{k-1}(2l-1)\theta=\frac{2\tan 2^{k-1}(2l-1)\theta}{1-\tan^2 2^{k-1}(2l-1)\theta}=\frac{2a_{\frac{n}{2}}}{1-a_{\frac{n}{2}}^2}$$

이다. 따라서 $a_n\neq 0$이기 위한 필요충분조건은 $a_{\frac{n}{2}}\neq 0$이다. 그러므로 위의 과정을 $n=2^k(2l-1)$에서 $\frac{n}{2^k}=2l-1$이 될 때까지 k번 반복하면

$$a_n\neq 0\Leftrightarrow a_{2^{k-1}(2l-1)}\neq 0\Leftrightarrow\cdots\Leftrightarrow a_{2(2l-1)}\neq 0\Leftrightarrow a_{2l-1}\neq 0$$

을 얻는다. 그러면 $2l-1$은 홀수이고 $a_{2l-1}\neq 0$임을 나)에서 증명하였으므로 모든 짝수 $n=2^k(2l-1)$에 대해서도 $a_n\neq 0$이다.
그러므로 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\neq 0$이 성립한다.

(n이 홀수일 때 $a_n=\tan n\theta\neq 0$의 별해)
1보다 큰 홀수 $n=2k+1$에 대하여 $a_n=a_{2k+1}=\frac{2a_{2k}+3}{2-3a_{2k}}=\frac{2\tan 2k\theta+3}{2-3\tan 2k\theta}=0$이 성립한다고 가정하자. 그러면 $2\tan 2k\theta+3=0$이고 $\tan 2k\theta=-\frac{3}{2}$이다. 따라서 tan함수의 배각공식에 의해

$$-\frac{3}{2}=\tan 2k\theta=\frac{2\tan k\theta}{1-\tan^2 k\theta}=\frac{2a_k}{1-a_k^2}$$

가 성립하여 이 분수식을 단순화하면 $3a_k^2-4a_k-3=0$이고 $a_k=\frac{4\pm\sqrt{16+36}}{6}=\frac{2\pm\sqrt{13}}{3}$이다. 하지만 가)에 의하여 모든 a_k는 유리수여야만 하므로 홀수 $n=2k+1$에 대하여 $a_n\neq 0$이다.

(n이 짝수일 때 $a_n=\tan n\theta\neq 0$의 별해)
만약 짝수 $n=2^k(2l-1)$에 대하여 $a_n=0$가 성립한다면,

$$0=a_n=a_{2^k(2l-1)}=\tan 2^k(2l-1)\theta=\tan 2\cdot 2^{k-1}(2l-1)\theta=\frac{2\tan 2^{k-1}(2l-1)\theta}{1-\tan^2 2^{k-1}(2l-1)\theta}=\frac{2a_{n/2}}{1-a_{n/2}^2}$$

이고 $\tan 2^{k-1}(2l-1)\theta=a_{2^{k-1}(2l-1)}=a_{n/2}=0$이다. 이 과정을 k번 반복하면

$$0=a_n=a_{2^k(2l-1)}=a_{2^{k-1}(2l-1)}=a_{2^{k-2}(2l-1)}=\cdots=a_{2^{k-k}(2l-1)}=a_{2l-1}$$

을 얻는다. 그러나 $2l-1$은 홀수이고 $a_{2l-1}\neq 0$ 임을 나)에서 보였으므로 짝수 $n=2^k(2l-1)$에 대하여 $a_n=0$이 성립한다는 가정은 잘못되었다. 따라서 n이 짝수인 경우에도 $a_n\neq 0$이다.

<뒷면에 계속>

3) 자연수 n과 m이 다르다고 하였으므로, $n < m$이라 할 때 적당한 자연수 k에 대하여 $m = n + k$이다.
그러면 $\tan$함수의 합과 차의 공식에 의해

$$\begin{aligned} a_m - a_n = \tan m\theta - \tan n\theta &= \tan(n+k)\theta - \tan n\theta \\ &= \frac{\tan n\theta + \tan k\theta}{1 - \tan n\theta \tan k\theta} - \tan n\theta \\ &= \frac{\tan n\theta + \tan k\theta - \tan n\theta + \tan^2 n\theta \tan k\theta}{1 - \tan n\theta \tan k\theta} \\ &= \frac{\tan k\theta + \tan^2 n\theta \tan k\theta}{1 - \tan n\theta \tan k\theta} \\ &= \frac{\tan k\theta\,(1 + \tan^2 n\theta)}{1 - \tan n\theta \tan k\theta} \end{aligned}$$

이다. (2)에서 $\tan k\theta \neq 0$라고 하였고 $1 + \tan^2 n\theta > 1$이 성립하므로 $a_m - a_n = \dfrac{\tan k\theta\,(1 + \tan^2 n\theta)}{1 - \tan n\theta \tan k\theta} \neq 0$ 이다.