2015학년도 수시모집 논술고사 해설 및 예시답안

◆ 전형명칭: 2015학년도 수시모집 일반전형

◆ 모집계열: 자연계열 I

◆ 출제유형: 통합교과형 중 자료제시 논술형

◆ 출제방향(취지) 및 교과서 관련여부 및 근거

본교의 논술고사는 고등학생들이 정규 교육과정을 통해 학습한 다양한 지적 능력을 체계적이며 종합적으로 측정할 수 있는 문제들을 출제하여 입학 전형 요소로 활용함과 동시에 논술고사 양식의 다변화와 다양화를 추구하였다. 자연계 논술은 수리논술 3문항으로 구성되었다. 수리영역 문항들은 고교 과정에서 다루고 있는 원과 타원의 정의 및 성질에 대한 이해, 삼각함수의 연속성 및 주기성, 수열의 수렴성, 점대칭의 성질, 변곡점의 개념, 다항식 표현, 다항함수 그래프의 이해, 미분과 적분의 활용 등 기본 개념에 대한 이해 및 활용도를 물었다.

◆ 출제문제 해설

(1) 문제 1 [30점]

① 출제의도

이 문제는 기하적인 조건을 만족하는 자취를 유추하고 자취와 관련된 면적을 주어진 조건에 관한 함수로 구성하여 그 최댓값을 구하는 문제이다. 이 과정에서 이차곡선 중 원과 타원의 정의 및 성질에 대한 이해와 도형의 면적 구하기, 주어진 조건하의 최댓값 구하기 등 중등 교육과정에서 다루는 수학적 개념과 원리에 대한 종합적 활용 능력을 평가하고자 한다.

② 예시답안

1) 점 P가 원 C의 내부의 점이므로 $\overline{OP} = \overline{OQ} - \overline{PQ} = 1 - \overline{PQ}$이다. 점 P는 $\overline{AP} - \overline{PQ} = b$를 만족하므로 $\overline{AP} + \overline{OP} = b+1$이 된다. 따라서 점 P의 자취는 점 A와 점 O를 초점으로 하고 장축의 길이가 $b+1$인 타원 중 원 C의 내부에 포함되는 부분이다.

2) 점 A와 점 O를 초점으로 하고 장축의 길이가 $b+1$인 타원상의 점 중 점 O에서 가장 멀리 떨어진 점 P_0은 타원의 중심으로부터 장축의 길이의 절반만큼 떨어진 점이다. 따라서 점 O에서 P_0까지의 거리는 $\overline{AO}$의 거리의 절반과 장축의 길이의 절반의 합이다. $b \le 1-a$이므로

$$\overline{OP_0} = \frac{a}{2} + \frac{b+1}{2} \le \frac{a}{2} + \frac{2-a}{2} = 1$$

이 되어 타원 전체가 원 C의 내부에 포함되는 것을 알 수 있다.

<뒷면에 계속>

단축의 길이가 $2\sqrt{\left(\frac{b+1}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{(b+1)^2-a^2}$ 이므로 자취(타원)로 둘러싸인 면적은 $\frac{\pi}{4}(b+1)\sqrt{(b+1)^2-a^2}$ 이다.

면적이 b에 대해 증가함수이므로 주어진 구간 $0 < b \leq 1-a$에서 $b=1-a$일 때 최대이다. 따라서 면적의 최댓값은 $\frac{\pi}{2}(2-a)\sqrt{1-a}$ 이다.

(2) 문제 2 [30점]

① 출제의도

삼각함수를 활용하여 주어진 수열 $\{a_n\}$의 몇 가지 기본적인 성질을 수학적 귀납법과 삼각함수의 합과 차의 공식으로 유도하도록 하였다. 이 과정에서 학생들이 반각공식으로 만들어지는 새로운 수열 $\left\{\frac{\theta}{2^n}\right\}$을 이용하여 주어진 수열의 일반항을 구할 수 있고, 삼각함수의 연속성, 주기성과 수열의 수렴성을 활용하여 흥미로운 성질들을 발견할 수 있는 지를 평가한다.

② 예시답안

1) 수학적 귀납법을 이용한다. $0 \leq a_1 < 1$으로 주어졌고, $0 \leq a_n < 1$을 만족한다고 하자. 그러면 $1+a_n < 1+1=2$이고 $\frac{1+a_n}{2}=a_{n+1}^2 < 1$이 성립하므로 $a_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}^2} < 1$이다. 그러므로 수학적 귀납법에 의해 모든 자연수 n에 대하여 $a_n < 1$이 성립한다.

(별해) 만약 어떤 자연수 n에 대하여 $a_n = \sqrt{\frac{1+a_{n-1}}{2}} \geq 1$이 성립한다고 가정하면 $\frac{1+a_{n-1}}{2} \geq 1$이므로 $a_{n-1} \geq 1$도 성립하여, 이 과정을 반복하면 a_1도 1보다 같거나 크게 된다. 하지만 조건에 $a_1 < 1$으로 주어졌으므로 위의 가정은 모순이다. 따라서 $a_n > 1$인 자연수 n은 존재할 수 없다.

2) (1)에 의해 $a_n < 1$이므로 $2a_n < a_n+1 < 2$이고 $a_n < \frac{a_n+1}{2}=a_{n+1}^2 < 1$이다. $0 < a_{n+1} < 1$이기 때문에 $a_{n+1}^2 < a_{n+1}$이 참이어서 $a_n < \frac{a_n+1}{2}=a_{n+1}^2 < a_{n+1}$이 성립한다.

3) 초항 a_1이 $\cos\theta$로 주어지면 삼각함수의 반각공식에 의해 $a_2^2 = \frac{1+a_1}{2}=\frac{1+\cos\theta}{2}=\cos^2\frac{\theta}{2}$이고 $a_2 = \pm\cos\frac{\theta}{2}$이다. 한편 $a_n \geq 0$이고 $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$이므로 $\cos\frac{\theta}{2} \geq 0$이고 $a_2 = \cos\frac{\theta}{2}$이다. 그러므로 수학적 귀납법에 의해 $a_n = \cos\frac{\theta}{2^{n-1}}$ 이다.

4) θ에 상관없이 n이 커지면 $\frac{\theta}{2^{n-1}}$은 0으로 수렴하고 $a_n = \cos\frac{\theta}{2^{n-1}}$은 $\cos 0 = 1$로 수렴한다.

<뒷면에 계속>

(3) 문제 3 [40점]

① 출제의도

이 문제는 삼차함수의 변곡점의 성질에 대한 이해를 바탕으로 극대점, 극소점의 함수값에 대한 조건을 활용하여 삼차함수를 구하는 문제이다. 이 과정에서 점대칭의 성질, 변곡점의 개념, 다항함수의 그래프의 이해, 미분과 적분의 활용, 다항식 표현 구성 능력 등 중등교육 전반에서 다루는 다양한 수학적 개념과 원리의 종합적인 활용능력과 계산능력을 평가하고자 한다.

② 예시답안

1) 함수 $f(x)-(x+2)$을 $(x-\alpha)(x-\beta)(x+\alpha)$라고 두고

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}(x-\alpha)(x-\beta)(x+\alpha)dx=0$$

을 계산하면 $\beta=0$을 얻는다. 함수 $f(x)-(x+2)=(x-\alpha)x(x+\alpha)$을 두 번 미분하여 변곡점$(0,0)$을 가짐을 알 수 있다.

(별해) 함수 $f(x)-(x+2)$을 $(x-\alpha)(x-\beta)(x+\alpha)$라고 두면 $x=\dfrac{\beta}{3}$에서 변곡점을 가짐을 알 수 있다. 조건 $\displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha}(x-\alpha)(x-\beta)(x+\alpha)dx=0$을 계산하면 $\beta=0$을 얻는다. 따라서 함수 $f(x)-(x+2)$은 변곡점 $(0,0)$을 가진다.

2) 임의의 삼차함수 $g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$가 원점 $(0,0)$에 변곡점을 가지면 $b=0=d$이므로 함수 $g(x)$은 $g(-x)=-g(x)$을 만족한다. 함수 $g(x)$의 그래프 $(x,g(x))$은 원점 대칭 변환에 대하여 $(-x,g(-x))=(-x,-g(x))$을 만족하므로 원점 대칭이다.

3) $(f(x)-(x+2))''=f''(x)$이므로 $f(x)-(x+2)$와 $f(x)$가 모두 $x=\beta=0$에서 변곡점을 가진다. 변곡점과 점대칭의 성질이 평행 이동에 따라 변하지 않으므로 물음(2)에 따라 삼차함수 $f(x)$가 변곡점에 대칭임을 유추하면 함수 $f(x)$의 변곡점은 $\dfrac{3+1}{2}=2$을 함숫값으로 하므로 $f(0)=2$이다. 물음(2)에 따라 삼차함수 $f(x)$가 변곡점 $(0,2)$에 대하여 대칭이므로 $x=a$와 $x=-a$에서 극솟값과 극댓값을 갖는다고 할 때 $f(-a)=3, f(a)=1$이다. $f''(x)=6x$이므로 적분하면 $f'(x)=3(x^2-a^2)$이고 $f(x)=x^3-3a^2x+2$이다. $f(a)=1$을 풀면 $a=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$을 얻는다. 따라서 $f(x)=x^3-\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}x+2$이다.