4. 자연계열II

[문제1] 다음 주어진 각각의 도형 S에 대해 도형 S 밖의 점 P에서 그은 두 접선이 서로 수직할 때, 점 P의 자취를 나타내는 방정식을 구하시오.

(1) S: $y=ax^2$ $(a \neq 0)$ [8점]

(2) S: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a, b>0)$ [10점]

(3) S: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a, b>0)$ [12점]

■ 모범답안:

(1) 포물선 밖의 점 P를 (X, Y)라고 할 때, 점 P를 지나는 기울기 m인 직선의 방정식은 $y=m(x-X)+Y$로 쓸 수 있다. 이때 기울기 m으로 주어진 포물선의 접선의 방정식은 $y=mx-\dfrac{m^2}{4a}$으로 구해지므로 $Y=mX-\dfrac{m^2}{4a}$이다. 이제 m에 관하여 정리하면 $\dfrac{1}{4a}m^2-Xm+Y=0$ 로 주어지며, 두 접선이 수직하므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 $4aY=-1$ $(a \neq 0)$이다. 수직한 두 접선을 가지는 포물선 밖의 점들의 자취는 직선의 방정식 $Y=-\dfrac{1}{4a}$ $(a \neq 0)$을 만족한다.

(2) 타원 밖의 점 P를 (X, Y)라고 할 때, 점 P를 지나는 기울기 m인 직선의 방정식은 $y=m(x-X)+Y$로 쓸 수 있다. 이때 기울기 m으로 주어진 타원의 접선의 방정식은 $y=mx \pm \sqrt{a^2m^2+b^2}$ 으로 구해지므로 $-mX+Y=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$ 이다. 양변을 제곱하여 m에 관하여 정리하면 $(X^2-a^2)m^2-2XYm+(Y^2-b^2)=0$ 으로 주어지며, 두 접선이 수직하므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 $\dfrac{Y^2-b^2}{X^2-a^2}=-1$ $(X \neq \pm a)$이다. 따라서 네 점 $(\pm a, \pm b)$을 제외한 원 $X^2+Y^2=a^2+b^2$위의 점 P에서 서로 수직한 두 접선을 그을 수 있다. 이때 네 점 $(\pm a, \pm b)$에서도 수직한 두 접선을 그을 수 있으므로, 수직한 두 접선을 가지는 타원 밖의 점들의 자취는 원의 방정식 $X^2+Y^2=a^2+b^2$을 만족한다.

(3) 쌍곡선 밖의 점 P를 (X, Y)라고 할 때, 점 P를 지나는 기울기 m인 직선의 방정식은 $y=m(x-X)+Y$로 쓸 수 있다. 이때 기울기 m으로 주어진 쌍곡선의 접선의 방정식은 $y=mx \pm \sqrt{a^2m^2-b^2}$ 으로 구해지므로 $-mX+Y=\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$ 이다. 양변을 제곱하여 m에 관하여 정리하면 $(X^2-a^2)m^2-2XYm+(Y^2+b^2)=0$ 으로 주어지며, 두 접선이 수직하므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 $\dfrac{Y^2+b^2}{X^2-a^2}=-1(X \neq \pm a) \cdots$ (식1) 이다. 따라서 수직한 두 접선을 그을 수 있는 쌍곡선 밖의 점 P는 $X^2+Y^2=a^2-b^2$ 를 만족한다. 이때 두 직선 $X=\pm a$과 (식1)은 공통의 해를 갖지 않는다.

(i) $a > b > 0$인 경우, 쌍곡선의 두 점근선과 원 $X^2 + Y^2 = a^2 - b^2$의 교점인 네 점 $\left(\pm \frac{a\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}, \pm \frac{b\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$에서는 수직한 두 접선을 그을 수 없으므로 이들 네 점 을 제외한 원 $X^2 + Y^2 = a^2 - b^2$ 위의 점 P에서 서로 수직한 두 접선을 그을 수 있다. 따라서 수직한 두 접선을 가지는 쌍곡선 밖의 점들의 자취는 원의 방정식 $X^2 + Y^2 = a^2 - b^2$ $(a > b > 0)$을 만족하는 점 중 네 점 $\left(\pm \frac{a\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}, \pm \frac{b\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$을 제외한 점들이다.

(ii) $0 < a \le b$ 인 경우, (식1)을 만족하는 경우는 $a = b$이고 $(X, Y) = (0, 0)$일 때뿐이다. 하지만 원점 $(0, 0)$에서는 쌍곡선에 접선을 그을 수 없다. 따라서 이 경우 수직한 두 접선을 가지는 쌍곡선 밖의 점들의 자취는 공집합이다.

[문제2] 2015년 1월 1일 현재 김이화 과장의 나이는 30세이다. 이화은행에서는 김이화 과장에게 퇴직금으로 65세부터 매해 1회 연말에 1000만원씩 지급하려고 한다. 이때 연이율은 5%의 복리로 고정되어 있다고 가정한다.

(1) 김이화 과장이 100세까지 퇴직금으로 매해 1000만원씩을 총 36번을 수령했다고 할 때, 이 퇴직금 수령액 합계의 2015년 1월 1일 현재 가치를 구하시오. [7점]

(2) 김이화 과장은 2015년부터 64세가 되는 2049년까지 이화은행에 매해 연말에 300만원씩 총 35번을 적립한다고 한다. 이 적금(적립금 총액)으로 (1)번에 제시된 김이화 과장의 퇴직금을 충당하기에 충분한지 논하시오. [8점]

(3) 김이화 과장이 매해 연말까지 생존할 확률이 $\frac{95}{100}$라고 하자. (예를 들어 현재 2015년 1월 1일 나이가 30세인 김이화 과장이 2015년 12월 31일까지 살아있을 확률은 $\frac{95}{100}$, 그리고 2016년 12월 31일까지 살아 있을 확률은 $\left(\frac{95}{100}\right)^2$이다.) 김이화 과장은 30세부터 매해 연말 생존하였을 경우 일정한 금액 K를 매해 1회 연말에 이화은행에 납입하며, 납입금은 김이화 과장이 64세가 되는 2049년 연말까지만 최대 35번까지 납입될 수 있다. 그리고 퇴직금으로 김이화 과장이 65세가 되는 해부터 최대 100세가 되는 해까지 김이화 과장이 생존하였을 경우 매해 연말 1회 1000만원씩이 지급되고, 최대 총 36번까지 지급될 수 있다. 김이화 과장의 생존여부에 따른 적립예상금액의 현재 가치를 **적립금 현재가치**라고 하고, 수령예상 퇴직금의 현재가치를 **퇴직금 현재가치**라고 하자. 이화은행은 김이화 과장의 **퇴직금 현재가치**의 기댓값과 김이화 과장의 **적립금 현재가치**의 기댓값이 같도록 납입금액 K를 책정하려고 한다. 이때 적절한 K를 구하시오. [15점]

(힌트: 위 문제에서 필요한 경우 다음의 계산을 사용할 수 있다.)

$1.05^{-1} \approx 0.95$	$1.05^{-35} \approx 0.18$	$1.05^{-36} \approx 0.17$	$\frac{1}{1-1.05^{-1}} = 21$
$\frac{95}{105} \approx 0.90$	$\left(\frac{95}{105}\right)^{35} \approx 0.030$	$\left(\frac{95}{105}\right)^{36} \approx 0.027$	$\frac{1}{1-\frac{95}{105}} = 10.5$

■ 모범답안:

(1) 김이화 과장이 첫 번째(65세때) 받는 1000만원의 현재가치 (2015년 1월 1일)를 a_1이라고 할 때 $a_1 = 1000(1.05)^{-36}$로 나타낼 수 있다. 김이화 과장은 100세 까지 총 36번의 1000만원을 수령하였는데, 일반적으로 김이화 과장이 n번째 받는 1000만원의 현재가치는 $a_n = 1000(1.05)^{-(35+n)}, n = 1, \cdots, 36$로 나타낼 수 있다. 이는 첫째항이 a_1 그리고 공비가 $(1.05)^{-1}$인 등비수열이고, 총 36번 받은 1000만원의 현재가치의 합은 이 등비급수의 1항부터 36항까지의 합이므로 다음과 같이 계산된다.

$$S_a = a_1 \frac{1-1.05^{-36}}{1-1.05^{-1}} = 1000\,(1.05)^{-36} \frac{1-1.05^{-36}}{1-1.05^{-1}}$$
$$\approx 1000 \cdot 0.17 \cdot (1-0.17) \cdot 21 = 2963.1$$

(2) 김이화 과장이 첫 번째(30세때) 적립하는 적금액 (300만원) 의 현재가치 (2015년 1월1일) 를 b_1이라고 할 때 $b_1 = 300\,(1.05)^{-1}$로 나타낼 수 있다. 김이화 과장은 64세 까지 총 35번 매회 300만원씩을 적립하였는데, 일반적으로 김이화 과장이 n번째 적립한 금액의 현재가치는 $b_n = 300\,(1.05)^{-n}$, $n = 1, \cdots, 35$로 나타낼 수 있다. 이는 첫째항이 b_1 그리고 공비가 $(1.05)^{-1}$인 등비수열이고, 총 35번 적금의 현재가치의 합은 이 등비급수의 1항부터 35항까지 합이므로 $S_b = b_1 \frac{1-1.05^{-35}}{1-1.05^{-1}} = 300(1.05)^{-1} \frac{1-1.05^{-35}}{1-1.05^{-1}}$ 로 구할 수 있다. (1)에서 구한

$$\approx 300 \cdot 0.95 \cdot (1-0.18) \cdot 21 = 4907.7$$

퇴직금의 현재가치는 $S_a = 2963.1$이고 $S_a < S_b$이므로 김이화 과장의 적금은 퇴직금을 충당하기에 충분함을 알 수 있다.

(3) 확률변수 X_1을 김이화 과장이 첫 번째 해에 적립할 금액의 현재가치라고 하면 X_1의 확률분포는

X_1	0	$K(1.05)^{-1}$
$P(X_1 = x)$	$1-\frac{95}{100}$	$\frac{95}{100}$

이므로 X_1의 기댓값은 $E[X_1] = K(1.05)^{-1}\frac{95}{100} + 0 \cdot \left(1-\frac{95}{100}\right) = K\frac{95}{105}$ 이다.

일반적으로 확률변수 X_n를 김이화 과장이 n번째 해에 적립할 금액의 현재가치라고 하면 X_n의 확률분포는

X_n	0	$K(1.05)^{-n}$
$P(X_n = x)$	$1-\left(\frac{95}{100}\right)^n$	$\left(\frac{95}{100}\right)^n$

이므로 X_n의 기댓값은 $E[X_n] = K(1.05)^{-n}\left(\frac{95}{100}\right)^n + 0 \cdot \left(1-\left(\frac{95}{100}\right)^n\right) = K\left(\frac{95}{105}\right)^n$ 이다. 김이화 과장은 최대 35번째 해까지 적립을 하는데 이때 적금액의 현재가치 S_1은 $S_1 = E[X_1] + \cdots + E[X_{35}]$로 나타낼 수 있고, 위 수열은 첫째항이 $K\frac{95}{105}$ 이고 공비가 $\frac{95}{105}$ 인 등비수열의 1항부터 35항까지 합이므로

$$S_1 = E[X_1] + \cdots + E[X_{35}] = K\frac{95}{105}\frac{1-\left(\frac{95}{105}\right)^{35}}{1-\frac{95}{105}}$$
$$\approx K \cdot 0.90 \cdot (1-0.030) \cdot 10.5 = K \cdot 9.1665$$

이다.

이제 확률변수 Y_1을 김이화 과장이 첫 번째(65세때) 받을 퇴직금 수령액의 현재가치라고 하면 Y_1의 확률분포는

Y_1	0	$1000(1.05)^{-36}$
$P(Y_1 = x)$	$1-\left(\frac{95}{100}\right)^{36}$	$\left(\frac{95}{100}\right)^{36}$

이므로 Y_1의 기댓값은$E[Y_1] = 1000(1.05)^{-36}\left(\frac{95}{100}\right)^{36} = 1000\left(\frac{95}{105}\right)^{36}$이다. 일반적으로 확률변수 Y_n를 김이화

과장이 n번째 받을 퇴직금 수령액의 현재가치라고 하면 Y_1의 확률분포는

Y_n	0	$1000(1.05)^{-(35+n)}$
$P(Y_n = x)$	$1-\left(\frac{95}{100}\right)^{35+n}$	$\left(\frac{95}{100}\right)^{35+n}$

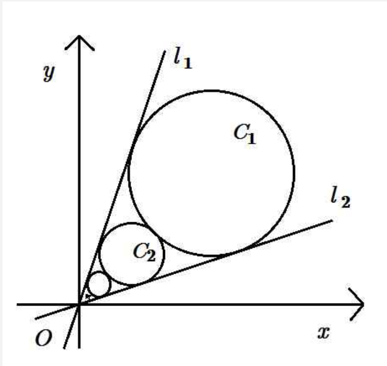
이므로 Y_n의 기댓값은 $E[Y_n] = 1000(1.05)^{-(35+n)}\left(\frac{95}{100}\right)^{35+n} = 1000\left(\frac{95}{105}\right)^{35+n}$이다. 김이화 과장은 최대 36번까지 퇴직금 수령액 1000만원씩을 수령할 수 있는 데, 이때 퇴직금액의 현재가치는 $S_2 = E[Y_1] + \cdots + E[Y_{36}]$로 나타낼 수 있고, 위 수열은 첫째항이 $1000\left(\frac{95}{105}\right)^{36}$이고 공비가 $\frac{95}{105}$인 등비수열의 1항부터 36항까지 합이므로

$$S_2 = E[Y_1] + \cdots + E[Y_{36}] = 1000\left(\frac{95}{105}\right)^{36} \frac{1-\left(\frac{95}{105}\right)^{36}}{1-\frac{95}{105}}$$
$$\approx 1000 \cdot 0.027 \cdot (1-0.027) \cdot 10.5 = 275.8455$$

이다.

퇴직금의 현재가치와 적립금의 현재가치가 같도록 납입금액 K를 책정한다고 하였으므로 $S_1 = S_2$가 되도록 K의 값을 정하면 대략 $\frac{275.8455}{9.1665} \approx 30.01$만원이 된다.

[문제3] 다음 그림과 같이 두 직선 $l_1 : y = \dfrac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}x$ 와 $l_2 : y = \dfrac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}x$ 에 동시에 접하는 원 C_1이 있다. 두 직선 l_1, l_2와 원 C_1에 접하는 더 작은 원을 C_2라고 하고, 같은 방법으로 n번째 원 C_n과 두 직선 l_1, l_2에 접하는 C_n보다 작은 원을 C_{n+1}이라고 할 때 다음 물음에 답하시오. (단, $0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$)



(1) 원 C_n의 반지름을 r_n이라 할 때, 원의 중심의 좌표 (x_n, y_n)을 반지름 r_n으로 나타내시오. [10점]

(2) 서로 이웃하는 두 원 C_n, C_{n+1}에 대하여 반지름의 비율 $\dfrac{r_{n+1}}{r_n}$을 상수 θ의 관계식으로 나타내시오. [10점]

(3) 원 C_1의 반지름의 길이가 2015라고 할 때 원 C_n들의 둘레의 길이의 합을 구하시오. [7점]

(4) 원 C_1의 반지름의 길이가 1일 때, 다음의 값을 구하시오. [13점]

$$\lim_{\theta \to +0} \theta \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{r_n r_{n+1}}}{\sqrt{r_n} + \sqrt{r_{n+1}}} \right)$$

■ 모범답안:

(1) 주어진 두 직선 l_1, l_2이 $y = x$ 대칭이므로 원의 중심 (x_n, y_n)은 $y = x$ 위의 점 (x_n, x_n)으로 주어진다. 구하는 원 C_n의 반지름 r_n은 직선 $y = \dfrac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}x$ 와 (x_n, x_n)의 거리이므로

$$r_n = \frac{\left| \dfrac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta} x_n - x_n \right|}{\sqrt{\left(\dfrac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta} \right)^2 + 1}} = \left(\frac{2\tan\theta}{\sqrt{2}\sec\theta} \right) x_n = \sqrt{2}\sin\theta\, x_n \text{이다.}$$

따라서 중심의 좌표는 $(x_n, y_n) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}\sin\theta} r_n, \dfrac{1}{\sqrt{2}\sin\theta} r_n \right)$이다.

별해: 위 풀이에서 원의 중심 (x_n, y_n)이 점 (x_n, x_n)임은 다음 두 가지 다른 방법으로도 알 수 있다.

방법1: 원의 중심 (x_n, y_n)은 두 직선으로부터 같은 거리에 있는 점들 위에 있으므로,

$$\frac{\left|\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}x_n - y_n\right|}{\sqrt{\left(\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}\right)^2+1}} = \frac{\left|\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}x_n - y_n\right|}{\sqrt{\left(\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}\right)^2+1}}$$

을 만족한다. 등식을 정리하면 $x_n = y_n$ 을 얻는다.

방법2: 두 직선의 기울기가 $\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta} = \tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)$, $\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta} = \tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$ 이므로 원의 중심은 기울기 $\tan\frac{\pi}{4} = 1$인 직선 $y = x$위에 있다.

(2) 두 원 C_n, C_{n+1}의 중심점 사이의 거리는 두 원의 반지름의 합과 같으므로 다음 식을 얻는다.

$$r_n + r_{n+1} = \sqrt{2}\,(x_n - x_{n+1}) = \frac{1}{\sin\theta}(r_n - r_{n+1})$$

따라서 구하는 반지름의 비율 $\frac{r_{n+1}}{r_n} = \frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}$ 이다.

별해: 두 직선 l_1, l_2의 사이각 α라 할 때, 두 원 C_n, C_{n+1}의 반지름 r_n, r_{n+1}은 $\sin\frac{\alpha}{2}(r_n + r_{n+1}) = (r_n - r_{n+1})$을 만족한다. 두 직선 l_1, l_2의 사이각 α을 구하면

$$\tan\alpha = \frac{\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta} - \frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}}{1+\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}} = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \tan 2\theta$$

이므로 α와 θ는 $\alpha = 2\theta$를 만족한다. 따라서 $\sin\theta(r_n + r_{n+1}) = (r_n - r_{n+1})$이며 구하는 반지름의 비율 $\frac{r_{n+1}}{r_n} = \frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}$이다.

(3) 원 C_n의 둘레는 $2\pi r_n$ 이므로 주어진 문제는 공비가 $\frac{r_{n+1}}{r_n} = \frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}$(=상수) 로 주어진 무한등비급수이다. 이때, 주어진 $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ 에 대하여 반지름의 비율 $\frac{r_{n+1}}{r_n} = \frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}$이 구간 $\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}, 1\right)$에 속하므로 무한등비급수는 수렴하며 값은

$$\frac{2\pi r_1}{1-\frac{r_{n+1}}{r_n}} = \frac{2\pi r_1}{1-\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = 2015\pi\left(\frac{1+\sin\theta}{\sin\theta}\right) \text{ 이다.}$$

(4) 공비 $\frac{r_{n+1}}{r_n} = \frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}$을 r이라 하면 원 C_n의 반지름 r_n은 $r_n = 1 \cdot r^{n-1}$으로 표시되며 수열 $a_n = \frac{2\sqrt{r_n r_{n+1}}}{\sqrt{r_n} + \sqrt{r_{n+1}}}$ 은 다음과 같이 변형된다.

$$a_n = \frac{2\sqrt{r_n r_{n+1}}}{\sqrt{r_n}+\sqrt{r_{n+1}}} = \frac{2r^{\frac{2n-1}{2}}}{r^{\frac{n-1}{2}}+r^{\frac{n}{2}}} = \frac{2\sqrt{r}}{\sqrt{r}+1}(\sqrt{r})^{n-1}$$

따라서 수열 a_n은 첫째 항이 $\frac{2\sqrt{r}}{\sqrt{r}+1}$이고 공비가 $\sqrt{r}$인 등비수열이다. 공비 $\sqrt{r}$이 1보다 작은 양수이므로 주어진 무한급수의 합은

$$\frac{\left(\frac{2\sqrt{r}}{\sqrt{r}+1}\right)}{1-\sqrt{r}} = \frac{2\sqrt{r}}{1-r} = \frac{2\left(\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}\right)}{1-\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta \text{ 으로 구해진다.}$$

$$\left(\text{여기서 } \sqrt{r} = \sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = \sqrt{\frac{(1-\sin\theta)^2}{(1-\sin^2\theta)}} = \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta} \text{ 이다.}\right)$$

따라서 주어진 문제는

$$\lim_{\theta\to+0}\theta\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sqrt{r_n r_{n+1}}}{\sqrt{r_n}+\sqrt{r_{n+1}}}\right) = \lim_{\theta\to+0}\theta(\cot\theta) = 1 \text{ 로 구해진다.}$$