2014학년도 수시모집 논술고사 출제의도 및 우수답안

◆ 대학명: 이화여자대학교
◆ 모집시기: 수시모집
◆ 전형명칭: 2014학년도 수시모집 일반전형
◆ 모집계열: 자연계열
◆ 출제유형: 통합교과형 중 자료제시 논술형
◆ 개요
- 시험시간: 100분
- 출제문항수: 3문항
- 답안지 양식, 작성 분량: A3용지 2페이지
- 지정된 필기구 : 검은색 펜이나 연필
- 수험생 유의사항:
  1. 시험 시간은 100분임
  2. 답안은 답안지의 해당 문항 번호에 검은색 펜이나 연필로 작성할 것
  3. 학교명, 성명 등 자신의 신상에 관련된 사항을 답안에는 드러내지 말 것
  4. 연습은 문제지 여백을 이용할 것
  5. 답안지 분량은 문항별 답안 길이에 맞추어져 있음

◆ 출제방향(취지) 및 교과서 관련여부 및 근거:

본교의 논술고사는 고등학생들이 정규 교육과정을 통해 학습한 다양한 지적 능력을 체계적이며 종합적으로 측정할 수 있는 문제들을 출제하여 입학 전형 요소로 활용함과 동시에 논술고사 양식의 다변화와 다양화를 추구하였다. 자연계 논술은 수리논술 3문항으로 구성되었다. 수리영역 문항들은 고교 과정에서 다루고 있는 지수로그함수, 미분, 적분, 2차 곡선, 도형의 면적, 함수의 극값 등 기본 개념에 대한 이해 및 활용도를 물었다.

◆ 예시답안:

1 우수답안

(1) 변화비율에 대한 관계식 $\frac{1}{P(h)}\frac{dP}{dh}=f(h)$의 양변을 0부터 h까지 정적분하면

$\int_0^h \frac{1}{P(h)}\frac{dp}{dh}dh=\ln P(h)-\ln P(0)=\int_0^h f(h)dh$와 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$\ln P(h)=\ln P_0+\int_0^h f(h)dh$이므로, $P(h)=P_0\, e^{\int_0^h f(h)dh}$.

(2) $P(h)=P_0\, e^{\int_0^h kdh}=P_0\, e^{kh}$이다. $P(5680)=P_0\, e^{k\cdot 5680}=\frac{1}{2}P_0$이므로, $k=\frac{1}{5680}\ln\frac{1}{2}=-\frac{\ln 2}{5680}$이다.

따라서 $P(h)=P_0 e^{\frac{h}{5680}\ln\frac{1}{2}}=P_0\left(\frac{1}{2}\right)^{h/5680}$이고, $P(8520)=P_0\left(\frac{1}{2}\right)^{8520/5680}=P_0\left(\frac{1}{2}\right)^{3/2}=P_0\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

(3) $T(\frac{1}{2})=\frac{373}{1-a\log 0.5}=\frac{373}{1.05}$이므로, $a=\frac{0.05}{\log 2}$ $(=\frac{0.05}{0.3}=\frac{1}{6})$이다.

$T(P_H)=\frac{373}{1.0125}=\frac{373}{1-a\log P_H}$이므로, $\log P_H=-\frac{0.0125}{a}=-\frac{0.0125}{0.05}\log 2\,(=-\frac{0.3}{4})$이고, $P_H=\left(\frac{1}{2}\right)^{1/4}$이

다.
$P(H)=\left(\frac{1}{2}\right)^{H/5680}=\left(\frac{1}{2}\right)^{1/4}$ 이므로 $H=\frac{5680}{4}=1420(m)$.

(3: **별해**) (2)의 결과로부터 함성합수를 구하면, $T(h)=\frac{373}{1-a\log(1/2)^{h/5680}}=\frac{373}{1+a\cdot\log 2\cdot h/5680}$ 와 같다.

2 우수답안

(1) 주어진 실수 m을 기울기로 가지는 두 접선의 방정식은 $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$ 으로 주어지며, 평행한 두 직선의 거리는 공식에 의하여

$$l(m)=\frac{\left|\sqrt{a^2m^2+b^2}-\left(-\sqrt{a^2m^2+b^2}\right)\right|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{2\sqrt{a^2m^2+b^2}}{\sqrt{m^2+1}}$$

으로 주어진다.

(1: **별해**) 주어진 실수 m을 기울기로 가지는 두 접선의 방정식은 $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$ 으로 주어지며, 두 평행한 직선이 원점에서 같은 거리에 있으므로 직선과 한 점의 거리 공식($\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$)에 의하여

$$l(m)=2\frac{\left|0-m\cdot 0+\sqrt{a^2m^2+b^2}\right|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{2\sqrt{a^2m^2+b^2}}{\sqrt{m^2+1}}$$

로 구해진다.

(2) 타원 밖의 점 P를 (X,Y)라고 할 때, 점 P를 지나는 기울기 m인 직선의 방정식은 $y=m(x-X)+Y$로 쓸 수 있다. 이때 기울기 m으로 주어진 타원의 접선의 방정식은 $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$ 으로 구해지므로 $-mX+Y=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$ 이다. 양변을 제곱하며 좌변에 모아 m에 관하여 정리하면

$$(X^2-a^2)m^2-2XYm+(Y^2-b^2)=0$$

로 주어지며, 두 접선이 수직하므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$$\frac{Y^2-b^2}{X^2-a^2}=-1 \quad (X\neq\pm a)$$

이다. 따라서 네 점 $(\pm a,\pm b)$을 제외한 원 $X^2+Y^2=a^2+b^2$위의 점 P에서 서로 수직한 두 접선을 그을 수 있다. 이때 외부의 네 점 $(\pm a,\pm b)$에서도 수직한 두 접선 $x=\pm a$, $y=\pm b$을 그을 수 있으므로, 수직한 두 접선을 가지는 타원 밖은 점들의 자취는 원의 방정식 $X^2+Y^2=a^2+b^2$을 만족한다.

(3) 주어진 타원에 외접하는 직사각형은 서로 수직한 기울기를 가지는 평행한 두 쌍의 접선으로 결정됨을 알 수 있다. 따라서 기울기 m, $-\frac{1}{m}$ $(m\neq 0)$에 대하여 외접하는 직사각형의 면적은 기울기 m을 가지는 두 평행한 접선의 거리와 기울기 $-\frac{1}{m}$을 가지는 두 평행한 접선의 거리의 곱으로 주어지므로, 위의 (1)을 활용하여 직사각형의 면적을 구하면

$$l(m)\,l\left(\frac{1}{m}\right)=\frac{2\sqrt{a^2m^2+b^2}}{\sqrt{m^2+1}}\;\frac{2\sqrt{a^2\frac{1}{m^2}+b^2}}{\sqrt{\frac{1}{m^2}+1}}=4\sqrt{\frac{a^2b^2\left(m^2+\frac{1}{m^2}\right)+a^4+b^4}{m^2+\frac{1}{m^2}+2}}$$

$$=4\sqrt{a^2b^2+\frac{a^4-2a^2b^2+b^4}{m^2+\frac{1}{m^2}+2}}=4\sqrt{a^2b^2+\frac{(a^2-b^2)^2}{m^2+\frac{1}{m^2}+2}}$$

으로 주어지며, $m^2+\frac{1}{m^2}\geq 2$이므로 위의 식은 $m^2+\frac{1}{m^2}=2$일 때 최댓값을 갖는다. 따라서 최댓값은 $2(a^2+b^2)$이다. 단, 기울기가 $m=0$으로 주어진 경우 외접 직사각형은 외부의 네 점 $(\pm a,\pm b)$으로 구성되므로 면적은 $4ab$이며 절대 부등식에 의하여

$$2(a^2+b^2)\geq 4\sqrt{a^2b^2}=4ab$$

이므로 모든 기울기에 대하여 최댓값은 $2(a^2+b^2)$이다.

(3: **별해**) 타원에 외접하는 직사각형은 (2)에 구해진 원에 내접함을 알 수 있다. 원에 내접하는 직사각형 중 그 면적이 최대인 것이 정사각형이다(아래 설명 예시). 반지름의 길이가 $\sqrt{a^2+b^2}$인 원에 내접하는 정사각형의 면적이 $2(a^2+b^2)$이므로 구하는 직사각형의 면적의 최댓값은 $2(a^2+b^2)$이다.
(설명 예시)
반지름 $\sqrt{a^2+b^2}$을 가지는 원에 내접하는 직사각형의 두 대각선은 원의 지름과 같다. 따라서 직사각형의 두변의 길이를 A, B라고 할 때 두변의 길이는 $A^2+B^2=4(a^2+b^2)$를 만족한다. 이제 직사각형의 면적 AB 는

$$AB\leq\frac{A^2+B^2}{2}=\frac{4(a^2+b^2)}{2}$$

을 만족하므로 두변의 길이가 같을 때 면적의 최댓값 $2(a^2+b^2)$을 얻는다.

3 우수답안

(1) 미적분학의 기본정리에 의해 함수 $y=g(x)$는 임의의 실수에 대하여 연속이고 미분가능하며 $g'(x)=f(x)$로 주어진다. 그러면 조건 1에 의해 $g'(x)$는 미분가능하고 $y=g(x)$의 2계 도함수는 $g''(x)=f'(x)$로 주어진다. 그리고 조건 2에 의해 $f(x)$가 증가함수이므로 $g''(x)=f'(x)\geq 0$이다.

(2) $g''(x)\geq 0$에 의하여 구간 $[0,a]$에서의 함수 $y=g(x)$의 그래프는 아래로 볼록이다. 그러므로 두 점 $(0,0)=(0,g(0))$과 $(a,g(a))$을 잇는 직선 $y=\frac{g(a)}{a}\cdot x$의 그래프는 $y=g(x)$의 그래프 위쪽에 위치한다. 위의 대소관계를 식으로 나타내면 $x\in[0,a]$에 대하여 $g(x)\leq\frac{g(a)}{a}\cdot x$이다.

(2: **별해**) 미분을 이용하여 부등식을 보일 수도 있다. 먼저 $x=0$일 때 $g(0)=0$이고 $\frac{g(a)}{a}\cdot 0=0$이므로 주어진 부등식은 참이다. $x\in(0,a]$일 때, $h(x)=\frac{g(x)}{x}$라 하고 $h(x)$가 $(0,a]$에서 증가함수임을 보이면 모든 $x\in(0,a]$에 대하여 $\frac{g(x)}{x}\leq\frac{g(a)}{a}$가 성립하고 x가 양수이므로 양변에 x를 곱하면

$g(x) \le \dfrac{g(a)}{a} \cdot x$이다.

$h(x) = \dfrac{g(x)}{x}$가 $(0,a]$에서 증가함수임을 보이기 위하여 미분하면 $h'(x) = \dfrac{g'(x)x - g(x)}{x^2} = \dfrac{f(x)x - g(x)}{x^2}$ 이므로, $(0,a]$에서 $f(x)x - g(x) \ge 0$ 임을 보이면 된다.

$f(x)x - g(x)$를 미분하면 $(f(x)x - g(x))' = f'(x)x + f(x) - g'(x) = f'(x)x + f(x) - f(x) = f'(x)x$이고, 조건 2에 의해 $f'(x) \ge 0$이고 $x \in (0,a]$이므로 $(0,a]$에서 $f'(x)x \ge 0$이다. 따라서 $y = f(x)x - g(x)$는 구간 $(0,a]$에서 증가하는 함수이고 그 최소값은 $f(x)x - g(x)|_0 = f(0) \cdot 0 - g(0) = 0$이다. 따라서 $(0,a]$에서 $f(x)x - g(x) \ge 0$가 성립하고 $h'(x) \ge 0$가 참이다. 그러므로 $h(x) = \dfrac{g(x)}{x}$가 $(0,a]$에서 증가함수이고, $x \in (0,a]$에 대하여 $\dfrac{g(x)}{x} \le \dfrac{g(a)}{a}$가 성립한다.

(2: **별해2**) 구간 $[0,a]$에서 $k(x) = \dfrac{g(a)}{a}x - g(x)$라고 하면, $[0,a]$에서 $k(x) \ge 0$를 보이면 된다.

$k(0) = k(a) = 0$이므로 Rolle's Theorem에 의하여 $k'(x) = \dfrac{g(a)}{a} - g'(x) = \dfrac{g(a)}{a} - f(x) = 0$가 되는 점이 적어도 하나 $(0,a)$에 존재한다. 그리고 조건 2에 의해 f가 증가함수이기 때문에 $k'(x) = \dfrac{g(a)}{a} - f(x) = 0$를 만족하는 점은 단 하나(단조증가인 경우)이거나 구간(locally constant인 경우)으로 주어진다. 그런 점을 b라고 하면 $f(b) = \dfrac{g(a)}{a}$를 만족하고 $k(b) = \dfrac{g(a)}{a}b - g(b) = b\left(\dfrac{g(a)}{a} - \dfrac{g(b)}{b}\right) = b\left(f(b) - \dfrac{g(b)}{b}\right)$가 된다. 한편 평균치 정리에 의해, 적당한 $c \in (0,b)$에 대하여, $\dfrac{g(b)}{b} = \dfrac{g(b) - g(0)}{b - 0} = g'(c) = f(c)$가 성립한다. 그러므로 $k(b) = b\left(f(b) - \dfrac{g(b)}{b}\right) = b(f(b) - f(c))$가 되고, 조건 2에 의해 $f(x)$가 증가함수이고 $c \le b$이므로 $f(c) \le f(b)$가 성립하여 $k(b) = b(f(b) - f(c)) \ge 0$가 나온다. 한편 함수 $k(x)$는 폐구간 $[0,a]$에서 연속이고 미분가능하므로, 극값 정리에 의하여 최소값을 구간의 경계와 $k'(x) = 0$가 되는 점에서 가진다. 이미 위에서 $k(0) = k(a) = 0$을 확인했고 $k'(x) = 0$가 성립하는 점 b에서 $k(b) \ge 0$임을 보였으므로, 극값 정리에 의해 구간 $[0,a]$에서 $k(x) = \dfrac{g(a)}{a}x - g(x)$의 최소값은 0이다. 따라서 $[0,a]$에서 $k(x) \ge 0$이 성립한다.

(3) 부등식 $g(x) \le \dfrac{g(a)}{a} \cdot x$에 $[0,a]$에서의 정적분을 적용하면

$$\int_0^a g(x)\,dx \le \int_0^a \frac{g(a)}{a}x\,dx = \frac{g(a)}{a}\int_0^a x\,dx = \frac{g(a)}{a}\frac{1}{2}a^2 = \frac{a}{2}g(a)$$

을 얻고, $g(a) = \int_0^a f(x)\,dx$이므로 $\int_0^a g(x)\,dx \le \dfrac{a}{2}\int_0^a f(x)\,dx$이다.

(4) $f(c) \ge 0$이면 조건 2에 의해 폐구간 $[c,d]$에서 $f(x) \ge 0$이므로, $f(x) = g'(x) \ge 0$이고 함수 $g(x)$는 $[c,d]$에서 증가함수이다. 그러므로 $x \in [c,d]$에 대하여 $g(c) \le g(x)$가 성립하고

$$\int_c^d g(c)\,dx = (d-c)g(c) = (d-c)\int_0^c f(x)\,dx \le \int_c^d g(x)\,dx$$

이다. 그리고 (1)에 의하여 $g(x)$의 그래프는 폐구간 $[c,d]$위에서 $(c,g(c))$와 $(d,g(d))$를 연결하는 직선 아래에 있다. 그러므로 $x \in [c,d]$에 대하여 $g(x) \le \dfrac{g(d) - g(c)}{d - c}(x - c) + g(c)$이고 정적분을 적용하면

$$\int_c^d g(x)\,dx \le \int_c^d \frac{g(d)-g(c)}{d-c}(x-c)+g(c)\,dx = \left[\frac{g(d)-g(c)}{d-c}\left(\frac{1}{2}x^2-cx\right)+g(c)x\right]_c^d$$

$$= \frac{g(d)-g(c)}{d-c}\left(\frac{1}{2}d^2-cd+\frac{1}{2}c^2\right)+g(c)(d-c) = \frac{d-c}{2}(g(d)-g(c))+\frac{d-c}{2}2g(c) = \frac{d-c}{2}(g(c)+g$$

이다. 위의 관계식에 $g(c)=\int_0^c f(x)\,dx$와 $g(d)=\int_0^d f(x)\,dx$을 대입하면 보이고자 하는 부등식의 오른쪽 부분을 얻는다.

(4: **별해**) $\int_c^d \frac{g(d)-g(c)}{d-c}(x-c)+g(c)\,dx$는 폐구간 $[c,d]$위에서 직선 $y=\frac{g(d)-g(c)}{d-c}(x-c)+g(c)$과 두 수직선 $x=c$, $x=d$에 둘러싸인 '사다리꼴'의 '면적'이다. 그러므로 정적분을 계산하지 않고도 사다리꼴의 면적공식에 의해 $\int_c^d \frac{g(d)-g(c)}{d-c}(x-c)+g(c)\,dx = \frac{d-c}{2}(g(c)+g(d))$을 얻을 수 있다.