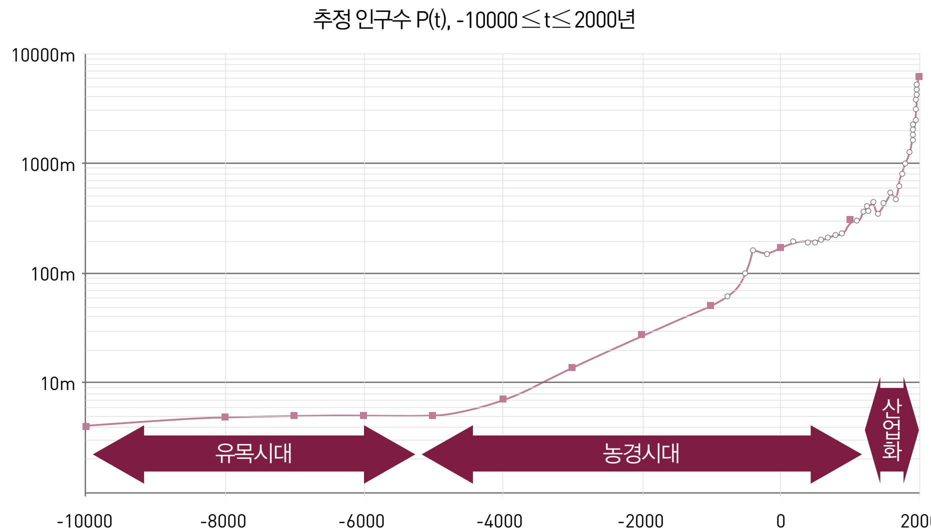
3. 자연계열

문제 01 다음은 기원전 10000년부터 서기 2000년까지 인류의 추정 인구수를 시간 t의 함수 P(t)로 표시한 그래프이다. 그림에서 세로축은 같은 간격마다 일정한 비율로 값이 커지는 로그 척도로 표시되어 있고, 큰 눈금은 각각 1M(백만), 10M(천만), 100M(일억), 1000M(십억), 10000M(백억) 명을 나타낸다. 그래프를 보면 인구수가 유목시대에는 4~5백만 명으로 매우 완만하게 증가하다, 그래프를 직선으로 근사할 수 있는 기원전 5000년부터 서기 1600년까지 농경시대 동안은 인구가 거의 일정한 비율로 증가하였고, 1600년 이후 산업화시대에는 매우 높은 비율로 증가하고 있는 것을 알 수 있다.



(1) 기원전 5000년 5백만이었던 인구수가 일정한 비율로 증가하여 서기 1600년 5억이 되었다고 할 때, 이 시대 인구가 2배 증가하는데 소요된 평균기간을 구하시오(단, 상용로그 log 2의 근사 값은 0.3임). [10점]

(2) 1927년 20억 명이었던 인구수는 거의 일정한 증가율을 보이며 증가하여 1970년대 40억 명에 도달하였고, 2027년 80억 명에 도달할 것으로 예측되고 있다. 이 100년 동안의 연평균 인구 증가율(%)을 아래 70-배증법칙을 이용하여 근사하여 보시오. [10점]

> **70-배증법칙** : 매년 일정한 비율(%)로 증가하는 수열 $\left(1+\frac{\text{비율}}{100}\right)^{\text{연수}}$의 값이 2가 되려면 연수×비율의 값은 근사적으로 70과 같다(참고로 이 근사식은 연수가 비율(%) 보다 큰 경우 유용한 근사값을 제공한다).

(3) 산업화시대를 전기와 후기로 구분할 때, 전기 350년(16C 후반~20C 초반) 동안 인구수는 일정 비율로 증가하여 4배, 후기 100년(20C 초반~21C 초반) 동안 또 다른 일정 비율로 증가하여 다시 4배로 증가하였다고 하자. 만약 산업화시대 전기 350년 동안 연평균 인구 증가율이 과거 전기 추정 값의 1/2이었고, 후기 100년 동안 연평균 인구 증가율이 과거 후기 추정 값의 1/4이라고 가정하면, 이 450년 동안(16C 후반~21C 초반) 인구는 몇 배로 증가되었을지 구하시오. [10점]

모범답안

(1) $\log P(t) = a + bt$ 또는 $P(t) = A\,10bt$ 이므로

$P(1600)/P(-5000) = 10b*(1600-(-5000)) =$ 5억 /5백만$= 100$이다.

양변에 상용 log를 취하면 $b*6600 = 2$이므로, $b = 1/3300$.

인구가 2배가 되는 기간 T는 $10bT = 2$를 만족하므로

$bT = \log 2,\ T = \log 2/\,b = 990$년(약 1천년마다 2배)

(2) 100년 동안 일정한 비율로 증가하여 4배가 되었으므로 2배가 되는데 50년 소요. 70-배증 법칙에 의하면 연수*비율=70이므로, 연평균 증가율은 70/50 = 1.4(%)

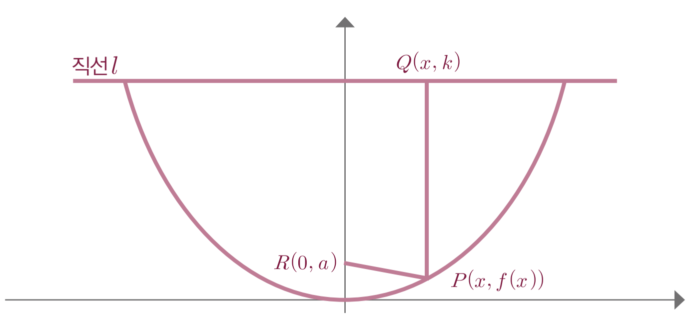
(3) 전기 350년 동안 4배가 되었으므로 2배 되는데 175년, 후기는 100년 동안 4배가 되었으므로 2배가 되는데 50년이 소요된다.

2배가 되기 위한 소요 연수와 연평균 인구증가율은 반비례 관계에 있으므로, 인구증가율이 각각 ½, ¼이면,

2배 되는데 전기 350년, 후기 200년이 소요된다.

따라서 전기에 $2^{350/350}$ = 2배, 후기에 $2^{100/200} = \sqrt{2}$배. 즉 $2\sqrt{2}$배가 된다.

문제 02 **함수 $y = f(x)$의 그래프가 아래 그림과 같이 원점을 지나고, x축과 직선 $l\ :\ y = k,\ (k > 0)$ 사이에 존재한다. 함수 $y = f(x)$ 위의 임의의 한 점 $P(x, f(x))$에서 직선 l에 내린 수선의 발을 $Q(x, k)$라 하자. 고정점 $R(0, a),\ (0 < a < k)$에 대하여 선분 $\overline{PQ}$의 길이와 선분 $\overline{PR}$의 길이의 합이 항상 일정하다고 할 때, 다음 물음에 답하시오.**



(1) 함수 $y = f(x)$를 구하시오. [15점]

(2) 선분 $\overline{PQ}$의 길이와 선분 $\overline{PR}$의 길이의 곱의 최댓값을 구하시오. [15점]

(3) 삼각형 $\triangle PQR$ 면적의 최댓값을 구하시오. [10점]

모범답안

(1) 주어진 조건으로부터 적당한 상수 c가 존재해서 다음을 만족한다.

$$\overline{PR} + \overline{PQ} = c$$

점 P, Q, R의 좌표를 적용하면

$c = \overline{PR} + \overline{PQ} = \sqrt{x^2 + (f(x) - a)^2} + (k - f(x))$이 성립한다.

따라서 $x^2 + (f(x) - a)^2 = (c - k + f(x))^2$이 성립하므로 양변을 전개하면

$f(x) = \dfrac{x^2 + a^2 - (c-k)^2}{2(c-k+a)}$ 을 얻는다.

또한, 함수 $y = f(x)$의 그래프가 원점을 지나므로 상수 c는 다음을 만족한다.

$$c = \overline{PR} + \overline{PQ} = a + k$$

따라서 함수 $y = f(x) = \dfrac{x^2}{4a}$이 된다.

한편, 함수 $y = f(x)$는 x축과 직선 $y = k$ 사이에 존재하므로 $\dfrac{x^2}{4a} \leq k$를 만족해야 한다.

따라서 함수 $y = f(x)$의 정의구역은 $-2\sqrt{ak} \leq x \leq 2\sqrt{ak}$가 된다.

(2) 점 P의 좌표가 $(x, \dfrac{x^2}{4a})$, $(-2\sqrt{ak} \leq x \leq 2\sqrt{ak})$이므로 $\overline{PQ} = k - \dfrac{x^2}{4a}$이 된다.

한편, $\overline{PQ} + \overline{PR} = a + k$로 일정하므로 $\overline{PR} = a + \dfrac{x^2}{4a}$이 된다.

따라서 $L = \overline{PQ} \cdot \overline{PR} = (a + \dfrac{x^2}{4a})(k - \dfrac{x^2}{4a})$이라 하면,

$0 = L' = \dfrac{x}{2a}(k - \dfrac{x^2}{4a}) - \dfrac{x}{2a}(a + \dfrac{x^2}{4a}) = \dfrac{x}{2a}(k - a - \dfrac{x^2}{2a})$이므로,

L은 $x = 0,\ \pm\sqrt{2a(k-a)}$에서 극값 $L = ak,\ (a+k)^2/4$를 갖는다.

한편, 양 끝점 $x = \pm 2\sqrt{ak}$에서 $L = 0$이므로 L의 최댓값은 $L = (a+k)^2/4$이다.

[별해]

$\overline{PQ}+\overline{PR}=c$는 일정하므로 $\overline{PQ}\cdot\overline{PR}\le\frac{(\overline{PQ}+\overline{PR})^2}{4}=\frac{c^2}{4}$이 항상 성립한다.

원점을 지나는 조건으로부터 $c=a+k$이므로 $\overline{PQ}\cdot\overline{PR}\le\frac{(a+k)^2}{4}$이 된다.

한편, $P=(0,0)$인 경우 $\overline{PQ}>\overline{PR}$이고, $P\in l$인 경우 $\overline{PQ}<\overline{PR}$이므로

$\overline{PQ}=\overline{PR}=\frac{1}{2}(a+k)$인 경우가 존재하게 된다.

따라서 $\overline{PQ}\cdot\overline{PR}$의 최댓값은 $(a+k)^2/4$이다.

(3) 선분 $\overline{PQ}$는 y축과 평행이고 점 P의 좌표가 $(x,\frac{x^2}{4a})$, $(-2\sqrt{ak}\le x\le 2\sqrt{ak})$이므로

삼각형 $\triangle PQR$의 면적은 $S=\frac{1}{2}|x|(k-y)=\frac{1}{2}|x|(k-\frac{x^2}{4a})$, $(-2\sqrt{ak}\le x\le 2\sqrt{ak})$로 주어진다.

여기서 식 S는 y축에 대해서 대칭이므로 $0\le x\le 2\sqrt{ak}$에서의 S의 최댓값을 구하면 충분하다.

$0=S'=\frac{1}{2}(k-\frac{x^2}{4a})-\frac{x^2}{4a}=\frac{k}{2}-\frac{3x^2}{8a}$, $x\ge 0$이므로,

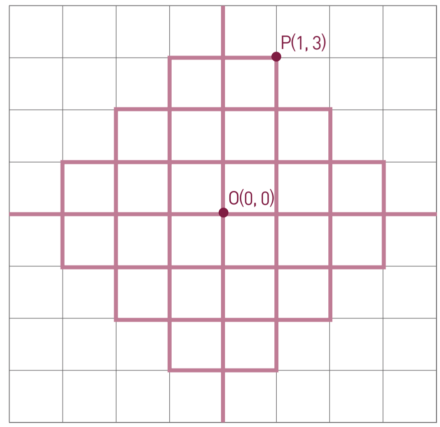
삼각형 $\triangle PQR$의 면적은 $x=2\sqrt{\frac{ak}{3}}$에서 극값 $S=\frac{2k}{3}\sqrt{\frac{ak}{3}}$를 갖고,

$x=0$일 때, $S=0$이다.

S는 y축에 대해서 대칭이므로 $x=-2\sqrt{\frac{ak}{3}}$에서 극값 $S=\frac{2k}{3}\sqrt{\frac{ak}{3}}$를 갖는다.

양 끝점 $x=\pm 2\sqrt{ak}$일 때, $S=0$이므로 삼각형 $\triangle PQR$ 면적의 최댓값은 $S=\frac{2k}{3}\sqrt{\frac{ak}{3}}$이다.

문제 03 아래 그림과 같은 평면 위의 정수 격자점에서 상하좌우 중 한 방향을 골라 한 칸씩 이동하는 것을 시행이라고 하고, 이때 상하좌우로 이동할 확률을 좌우 각각 p, p 상하 각각 q, q라 하자. 원점 $O(0,0)$으로부터 시작하여 n번 시행했을 때 도달한 격자점을 $P(k,l)$라 할 때, 다음 물음에 답하시오.



(1) 4번 시행했을 때 좌표 $P(1,3)$에 도달할 확률 $p=\dfrac{1}{3},\ q=\dfrac{1}{6}$에 대하여 구하시오. [10점]

(2) n번 시행했을 때 도달한 좌표 $P(k,l)$가 $k\ge 0,\ l\ge 0,\ k+l=n$을 만족할 확률 $p,\ q$에 대하여 구하시오. [10점]

(3) n번 시행했을 때 도달한 좌표 $P(k,l)$가 부등식 $|k|+|l|<n$을 만족할 확률 $p,\ q$에 대하여 구하시오. [10점]

모범답안

(1) 원점 $(0,0)$에서 4번 시행하여 $(1,3)$에 도달 하려면 우 1회, 상 3회 선택하여 시행한 경우뿐임을 알 수 있다.

중복을 허락하는 순열에 따라 우 1회, 상 3회로 $(1,3)$에 도달하는 경우의 수는 $\dfrac{4!}{1!\,3!}={}_4C_3=4$로 주어진다.

이때 각 시행이 독립이므로 각각의 경우의 확률은 $\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{1}{6}\right)^3$로 구해진다.

따라서 구하는 확률은 ${}_4C_3\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{1}{6}\right)^3$(또는$\dfrac{1}{162}$) 이다.

(2) 조건을 만족하는 점들은 $(k, n-k),\ k=0,1,\dots,n$으로 구해지며, 이들 점들이 $k+(n-k)=n$을 만족하므로,

이 점들에 n번 시행한 후 도달하기 위해서는 각각의 시행이 좌 또는 하를 제외한 우와 상 중 한 가지를 선택하여 시행하여야 한다.

이제 한 점 $(k, n-k)$를 생각하면, 우 k회, 상 $n-k$회 선택하여 시행하는 경우이며,

중복을 허락하는 순열에 따라 이점에 n번 시행 후 도달하는 경우의 수는 $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}={}_nC_k$이다.

그리고 각 시행이 독립이므로 이들 각각 경우의 확률은 $p^k q^{n-k}$로 주어진다.

따라서 $(k, n-k)$에 도달하는 확률은 ${}_nC_k p^k q^{n-k}$이다.

이들 점들에 주어진 확률을 모두 합하고 이항정리를 활용하면 $\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k p^k q^{n-k}=(p+q)^n$로 답을 얻는다.

(또는 $p+q=\dfrac{1}{2}$이므로 $(p+q)^n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$을 얻는다)

[별해]
조건을 만족하는 점들은 $(k, n-k),\ k=0,1,\dots,n$으로 구해지며, 이들 점들이 $k+(n-k)=n$을 만족하므로,
이 점들에 n번 시행한 후 도달하기 위해서는 각각의 시행이 좌 또는 하를 제외한 우와 상 중 한 가지를 선택하여 시행하여야 한다.
우와 상 중 한 가지를 선택할 확률을 $p+q$이고 각 시행은 독립 시행이므로, 구하는 확률은 $(p+q)^n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$이다.

(3) n번 시행하여 도달한 $P(k,l)$점들은 모두 부등식 $|k|+|l|\le n$을 만족하므로 부등식 $|k|+|l|<n$을 만족하는 점들은 등식 $|k|+|l|=n$을 만족하는 점들의 여집합이다. 등식 $|k|+|l|=n$을 만족할 확률을 먼저 구하기 위하여, 등식 $|k|+|l|=n$을 만족하는 (k,l)을 $(k\ge 0, l\ge 0), (k\le 0, l\ge 0),\ (k\ge 0, l\le 0),\ (k\le 0, l\le 0)$ 네 가지 경우로 구별한다. 이제 (2)와 같은 방법으로 우상변 $(k\ge 0, l\ge 0)$ 이외의 다른 3변의 확률도 각각 $(p+q)^n$ 이다.
여기서, 앞의 네 가지 경우로 구별할 때 네 점 $(n,0),\ (-n,0),\ (0,n),\ (0,-n)$이 두 번씩 나타남에 유의한다.
이들 중복되는 네 점 $(n,0),\ (-n,0),\ (0,n),\ (0,-n)$에 관한 확률은 각각 $q^n,\ q^n,\ p^n,\ p^n$ 이다.
이제, 등식 $|k|+|l|=n$을 만족하는 (k,l)에 도달할 확률은 위 네 가지 경우의 확률의 합에서 중복되는 네 점에 도달하는 확률을 뺀 값이므로, $4(p+q)^n-2(p^n+q^n)$이다. 따라서 구하는 확률은 등식 $|k|+|l|=n$을 만족하는 점들의 여집합의 확률이므로 $1-\left(4(p+q)^n-2(p^n+q^n)\right)$이다.