

2013학년도 수시 논술 모의고사

논술고사 문제지 (자연계열)

소속 학교	고등학교	수험 번호	성 명
-------	------	-------	-----

◆ 유의 사항 ◆

1. 시험 시간은 100분임
2. 답안은 답안지의 해당 문항 번호에 검은색 펜이나 연필로 작성할 것
3. 학교명, 성명 등 자신의 신상에 관련된 사항을 답안에는 드러내지 말 것
4. 연습은 문제지 여백을 이용할 것

감독확인



이화여자대학교

1

정의역과 공역이 모두 자연수인 함수 f 가 아래 두 조건을 만족한다고 할 때, 아래 물음에 답하시오.

$$(A) \quad f(n+1) > f(n)$$

$$(B) \quad f(n+f(m)) = f(n) + m + 1$$

- (1) 모든 n 에 대하여, $f(n) > n$ 이 성립함을 보이시오. [15점]
- (2) 위 두 조건을 만족하는 $f(n)$ 을 모두 찾아 n 에 대한 식으로 나타내고 그 근거를 제시하시오. [15점]

2 우리가 표본조사를 하는 이유는 모집단에 대해서 알고 싶지만 전수 조사는 너무 많은 비용과 시간이 들기 때문이다. 잘 설계된 표본추출 방법을 이용하게 되면 적절한 크기의 표본만으로도 모집단에 대한 정확한 추정이 가능하다. 하지만 적절하지 못한 방법으로 표본을 추출하게 되면 표본의 크기와 상관없이 의외의 결과가 나오기도 한다.

(1) 다음 경우는 1936년 미국 대선에서 표본조사와 실제 결과가 다르게 나온 예이다.

당시 공화당의 Landon 후보와 당시 대통령이었던 민주당의 Roosevelt 후보와의 대결이 뜨거웠다. 서로 자기의 우세를 장담하고 있었는데, American Literary Digest 잡지에서 2백만명 이상의 유권자들에게 우편 조사를 실시하였다. 조사 결과, 공화당의 Landon 후보가 큰 표 차이로 이기는 것으로 나왔는데 실제 결과는 정반대였다. 그 잡지에서 조사한 유권자들은 그 잡지의 독자들과 자동차 소유자들, 그리고 전화 소유자들로 이루어져 있었다. 참고로 1930년대에 미국에서는 100명에 20명 정도의 사람들이 자동차를 소유하고 있었고, 전체 가구의 35% 정도가 전화를 소유하고 있었다고 한다.

위 잡지사에서는 상당히 큰 표본을 사용하였는데도 반대의 선거결과가 나온 이유를 유추하여 설명해 보시오. [10점]

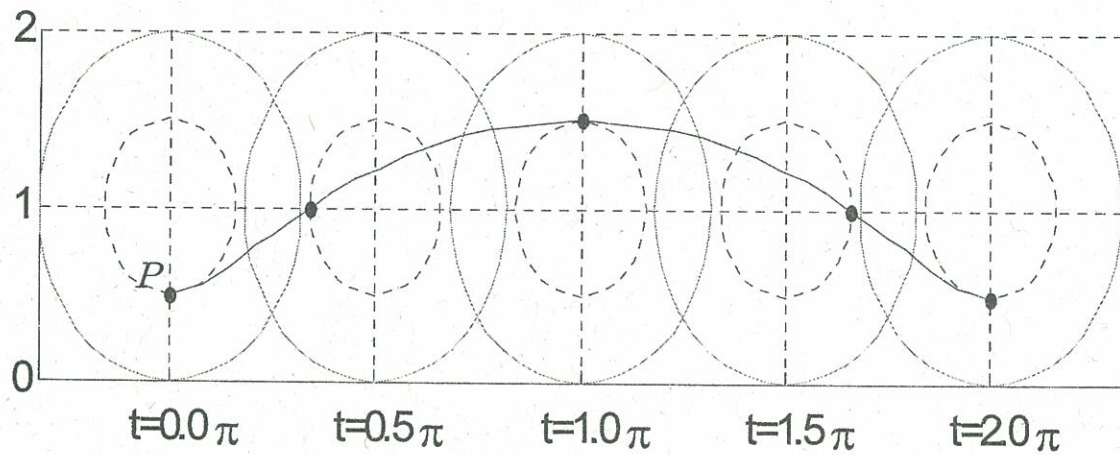
(2) 어떤 선거를 치르려고 할 때 유권자들의 투표율을 예측하기 위한 여론조사를 시행한다고 해보자. 모집단의 투표율에 대한 추정을 할 때에 추정오차의 한계는 $2\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ 으로 근사할 수 있다. 여기서 p 는 투표율 추정치이고, n 은 표본의 크기이다.

만약 투표율 추정치 p 가 0.3과 0.7사이에 있다는 것을 알고 있다고 할 때, 추정오차의 한계를 0.05 이하로 보장하기 위한 표본의 크기는 최소한 얼마가 되어야 하는지 구하시오. [10점]

(3) 각 TV 방송사에서는 투표일 이전에는 지지하는 후보를 묻는 ‘전화여론조사’를, 투표 당일에는 투표를 마치고 나온 사람들을 대상으로 몇 명에 한명씩 누구를 투표했는지를 묻는 ‘출구조사’를 시행한다. 실제로 출구조사가 전화여론조사보다 더 정확하게 투표 결과를 예측하는 것으로 알려져 있다.

어떤 선거에 대한 전화여론조사와 출구조사를 시행할 때, 두 조사의 표본 수가 같았고 참여한 사람들이 모두 솔직하게 응답했다고 가정하자. 또한 전화여론조사 당시 부동층(어떤 후보를 지지할지 아직 결정하지 않은 사람들)이 없었다고 가정하자. 위의 조건아래서도 출구조사가 전화여론조사보다 투표 결과를 더 정확하게 예측할 수 있는 이유가 무엇인지를 설명하시오. [10점]

3 시간 $t=0$ 에서 $t=2\pi$ 까지, 반지름 1인 바퀴가 아래 그림과 같이 x 축의 양의 방향으로 속도 1을 유지하며 이동하고 있다. 바퀴의 중심에서 $a(0 \leq a \leq 1)$ 만큼 떨어진 점 P 가 시간에 따라 움직이는 자취를 굴림쇠선(Cycloid) $\begin{cases} x=t-asint \\ y=1-acost \end{cases}$ 으로 표시가능하다고 할 때, 아래 물음에 답하시오.



(1) 0과 1사이의 임의의 a 에 대하여 $x=0$ 과 $x=2\pi$ 사이에서 굴림쇠선의 길이는 $L_a = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$ 로 표시가능

하다. 길이 L_0 와 길이 L_1 를 구하고, $L_a \leq \int_0^{2\pi} \left((1-a) + 2a \sin \frac{t}{2} \right) dt = 2\pi(1-a) + 8a$ 임을 보이시오. [20점]

(2) $x=0$ 와 $x=2\pi$ 사이에서 굴림쇠선과 x 축이 이루는 면적 S 를 구하고자 한다. 구간 $[0, 2\pi]$ 를 균일한 n 개의 구간으로 나누었을 때, 시간 $t_k = \frac{2k\pi}{n}$, $k=0, \dots, n$ 에서의 점의 위치를 $P_k = (x_k, y_k)$ 라 하자. 구분구적법에 따라 $\overline{x_k x_{k+1}}$ 를 밑변으로 하고 y_k 를 높이로 하는 직사각형의 면적 S_k 를 이용하여 면적 S 를 정적분으로 표시하고, 정적분의 값 S 를 계산하시오. [20점]