

3. 자연계열

문제1 어떤 공장에서 생산된 생산품 A의 불량품의 개수를 매년 조사한 결과, 그 해 발생한 불량품의 개수는 이전 두 해에 각각 발생한 개수들의 평균과 일치함을 알 수 있었다. 조사를 실시한 첫 번째 해에 발생한 불량품의 개수가 1,000이고 두 번째 해에 발생한 불량품의 개수가 1,500이라고 할 때, n 번째 해에 발생한 불량품의 개수를 결정하시오(단, n 은 2보다 큰 자연수이다). [15점]

출제의도 ●

이 문제에서는 주어진 상황에 해당하는 수열의 점화식을 찾고, 그 점화식의 적절한 변형을 통해 구하고자 하는 수열이 등비수열과 관련이 있음을 인식함으로써 문제를 해결할 수 있는 논리적 사고능력을 보고자 하였다.

모범답안 ●

n 번째 해에 발생하는 불량품의 개수를 a_n 이라 하면 주어진 조건에서 수열 a_n 은 $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2})$ 를 만족한다. 점화식 $a_n =$

$\frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2})$ 을 변형하면 $2a_n = a_{n-1} + a_{n-2} = 2a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-1}$ 에서 $2a_n + a_{n-1} = 2a_{n-1} + a_{n-2} = 2a_2 + a_1 = 4000$ 을 얻을 수 있다.

그런데 $a_n = -\frac{1}{2}a_{n-1} + 2000$ 로 바꿀 수 있으므로, 이 점화식을 $a_n - \alpha = p(a_{n-1} - \alpha)$ 의 형태로 변형시키면 $a_n - \frac{4000}{3} = \left(-\frac{1}{2}\right)(a_{n-1} - \frac{4000}{3})$ 가 된다. 새로 얻은 수열 $b_n = a_n - \frac{4000}{3}$ 은 첫째항이 $-\frac{1000}{3}$ 이고 공비가 $-\frac{1}{2}$ 인 등비수열이므로 그 일반항은 $b_n =$

$-\frac{1000}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{2000}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ 으로 주어진다. 따라서 $a_n = \frac{2000}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{4000}{3}$ 을 찾을 수 있다.

문제2 집합 S 는 $\frac{1}{a_n}$ 로 구성된 무한 집합으로서 a_n 은 0을 자리숫자로 가지지 않는 자연수이다. 예를 들면, $\frac{1}{271}$ 은 S 의 원소이나 $\frac{1}{305}$ 은 S 의 원소가 아니다. 아래 물음에 답하시오. [20점]

(1) 임의의 자연수 n 에 대하여 10^n 에서 10^{n+1} 사이에 있는 자연수 중에서 0을 자리숫자로 가지지 않는 자연수들의 개수를 구하시오.

(2) S 의 모든 원소의 합 $\sum_{\frac{1}{a_n} \in S} \frac{1}{a_n}$ 의 수렴성에 대하여 논하시오.

출제의도

이 문제에서는 주어진 급수의 수렴성을 보이기 위하여 적당한 범위 안에서 분모에 나타날 수 있는 모든 경우의 수를 구하고, 그 경우의 수를 적용하여 주어진 급수의 대소 관계를 추론함으로써 문제를 해결하는 논리적 사고 능력을 보고자 하였다.

모범답안

(1) 임의의 자연수 n 에 대하여 10^n 에서 10^{n+1} 사이에 있는 자연수들의 자리수는 (10^{n+1} 으로는 S 의 원소를 만들 수 없으므로 제외하면) $n+1$ 개다. 이들 중 0을 자리숫자로 가지지 않는 자연수의 자리수로 나타날 수 있는 자연수는 0을 제외한 1부터 9까지의 총 9개의 숫자만 가능하다. 그러므로 첫 번째 나타날 수 있는 모든 가능한 자리숫자들 9가지의 경우의 각각에 대하여 두 번째 나타날 수 있는 모든 가능한 자리숫자들 9가지의 경우가 있고, 이를 반복적으로 적용하면 총 $9 \cdot 9 \cdots 9 = 9^{n+1}$ 을 얻게 된다.

(2) $1 \leq a_n \leq 10$ 의 경우에 $\frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{10}$ 이고, $10 \leq a_n \leq 100$ 의 경우에 $\frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{100}$ 이고,

일반적으로, $10^n \leq a_k \leq 10^{n+1}$ 의 경우에 $\frac{1}{a_k} \leq \frac{1}{10^n}$ 이다.

위의 사실과 (1)의 결과를 이용하여

$$\sum_{\frac{1}{a_n} \in S, 1 \leq a_n \leq 10} \frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{10^0} \cdot 9, \quad \sum_{\frac{1}{a_n} \in S, 10 \leq a_n \leq 10^2} \frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{10} \cdot 9^2, \dots$$

등을 반복적으로 얻을 수 있다. 따라서,

$$\sum_{\frac{1}{a_n} \in S} \frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{10^0} \cdot 9 + \frac{1}{10^1} \cdot 9^2 + \dots + \frac{1}{10^{n-1}} \cdot 9^n + \dots = 10 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^n = 10 \cdot \frac{9/10}{1-9/10} = 90$$

이므로 주어진 급수는 수렴한다.

문제3

[가] (평균치 정리) 두 실수 a, b 가 $a < b$ 를 만족할 때, 함수 f 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 열린구간 (a, b) 에서 미분가능하면, $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ 를 만족하는 적당한 점 c 가 (a, b) 안에 존재한다.

[나] 함수 f 가 실수 전체에서 연속인 일대일 함수이면 다음 성질을 만족한다.

- ① 함수 f 의 치역을 정의역으로 갖는 역함수 f^{-1} 가 존재하고, f^{-1} 도 역시 연속함수이다.
- ② 임의의 점 α 에 대하여 $f(\alpha) = \beta$ 라고 하자. β 에 대하여 h 가 충분히 작은 실수이면, $\beta + h = f(\gamma)$ 를 만족하는 점 γ 를 유일하게 찾을 수 있다.

함수 f 가 임의의 실수 x 에 대하여 $f'(x) > 0$ 을 만족할 때, 위 제시문을 이용하여 다음 물음에 답하시오. [25점]

- (1) 함수 f 가 일대일 함수임을 보이시오.
- (2) α, β, h, γ 가 제시문 [나] ②에서 주어진 것과 같을 때, h 가 0으로 수렴하면 γ 가 α 로 수렴함을 설명하시오.
- (3) α, β 가 제시문 [나] ②에서 주어진 것과 같을 때, 함수 f 의 역함수 f^{-1} 가 β 에서 미분가능함을 보이고, 다음의 등식을 유도하시오.

$$(f^{-1})'(\beta) = \frac{1}{f'(\alpha)}$$

출제의도

주어진 명제들을 논거로 활용하여 요구되는 문제들을 해결하는 조건제시 논술형 문제이다. 주어진 함수가 적절한 조건을 만족할 때, 그 함수와 역함수의 관계를 알아보는 상황을 제시하고 있다. 함수의 연속과 미분가능의 정의를 파악하고, 주어진 명제들을 활용함으로써 역함수의 연속성과 함수의 미분계수와 그 역함수의 미분계수 사이의 관계를 추론할 수 있는지를 평가하고자 하였다.

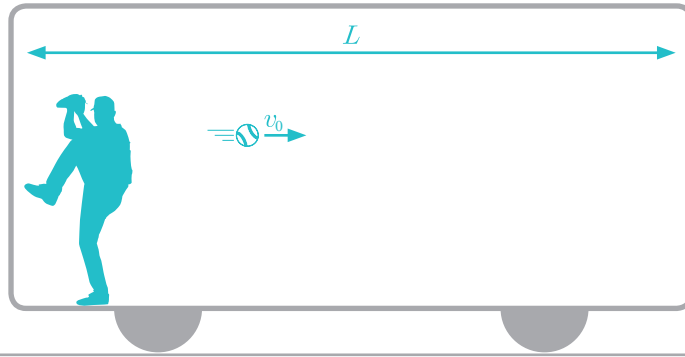
모범답안

- (1) 함수 f 가 일대일 함수임을 보이려면 서로 다른 두 실수 a, b 에 대하여 $f(a) \neq f(b)$ 를 보이면 된다.
만약에 a 와 b 가 서로 다른 실수라면 일반성을 잃지 않으면서 $a < b$ 라고 가정할 수 있다. 그러면 함수 f 는 주어진 조건에 의하여 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 열린구간 (a, b) 에서 미분가능이다. 따라서 제시문 [가]에 의하여 열린구간 (a, b) 에서 $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ 를 만족하는 적당한 실수 c 를 찾을 수 있다.
위 등식의 우변에서 a 와 b 가 서로 다른 실수이므로 $b - a \neq 0$ 가 나오고, 주어진 조건에 의하여 $f'(c) \neq 0$ 이다. 따라서 $f'(c)(b - a) \neq 0$ 이고 $f(b) - f(a) \neq 0$ 이다. 그러므로 함수 f 는 일대일 함수이다.
- (2) (1)의 결과와 제시문 [나] ①에 의하여 f 의 역함수 f^{-1} 도 연속함수이고 $\gamma = f^{-1}(\beta + h)$ 로 나타낼 수 있다. 그러므로 h 가 0으로 수렴하면 연속성에 의하여 $f^{-1}(\beta + h)$ 는 $f^{-1}(\beta) = \alpha$ 로 수렴한다.

$$(3) (f^{-1})'(\beta) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(\beta + h) - f^{-1}(\beta)}{h} = \lim_{\gamma \rightarrow \alpha} \frac{\gamma - \alpha}{f(\gamma) - f(\alpha)} = \lim_{\gamma \rightarrow \alpha} \frac{1}{\frac{f(\gamma) - f(\alpha)}{\gamma - \alpha}} = \frac{1}{\lim_{\gamma \rightarrow \alpha} \frac{f(\gamma) - f(\alpha)}{\gamma - \alpha}} = \frac{1}{f'(\alpha)}$$

이므로 역함수 f^{-1} 는 β 에서 미분가능이고 $(f^{-1})'(\beta) = \frac{1}{f'(\alpha)}$ 가 성립한다.

문제4 아래 그림과 같이 수평면 위에 정지해 있는 객차의 뒤쪽 벽에 한 사람이 서 있다. 이 사람과 객차의 질량의 합을 M 이라 하자. 이 사람이 질량 m 인 공을 객차의 앞쪽 벽을 향하여 v_0 의 속력으로 똑바로 던졌다. 이 공은 객차 앞쪽 벽과 완전탄성충돌을 하고, 뒤쪽 벽을 향해 객차의 길이(L)만큼 똑바로 날아온 후 벽과 완전비탄성충돌을 하여 멈췄다(객차는 수평면 위를 앞뒤로 자유롭게 움직일 수 있고 중력의 영향과 공기의 저항, 바퀴 축과 바퀴 사이의 마찰은 무시한다). [40점]



- (1) 공을 던진 후 첫 번째 충돌 직전의 객차와 사람(이 둘은 항상 같이 움직인다고 가정한다)의 속도를 \vec{V} 라 할 때, 속도의 크기 V 와 방향을 구하시오.
- (2) 첫 번째 충돌 직전까지 객차의 운동을 기술하고, 그 운동의 방향과 움직인 거리를 구하시오.
- (3) 첫 번째 충돌 후 두 번째 충돌 직전까지 객차의 운동을 기술하고, 그 운동의 방향과 움직인 거리를 구하시오.
- (4) 공과 앞쪽 벽 사이의 첫 번째 충돌이 완전탄성충돌이 아니라고 가정할 때, 두 번째 충돌 직전까지 객차의 운동을 기술하고, 그 운동의 방향과 움직인 거리를 구하시오.

출제의도 ●

외부 힘이 작용하지 않는 고립계에서 충돌이 일어날 때 충돌 전후에 총 운동량이 항상 보존된다는 사실을 정확히 이해하고 이를 적용하는 능력을 요구하는 문제이다. 아울러, 한 물체가 다른 물체에 대하여 상대적으로 운동하고 있을 때 운동하는 물체가 다른 물체에 대하여 가지는 상대속도의 개념과 완전탄성충돌, 완전비탄성충돌, 비탄성충돌의 차이를 이해하는지 여부를 보고자 하였다.

모범답안

- (1) 객차와 사람, 공으로 구성된 계에는 외부 힘이 작용하지 않으므로 총운동량이 보존되어야 한다. 한편, 처음 운동량은 0(모두 정지해 있으므로 모든 속도는 0임)이므로 이를 식으로 나타내면,

$$0 = M\vec{V} + m\vec{v}_0, \text{ 즉 } \vec{V} = -\frac{m}{M}\vec{v}_0$$

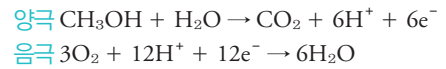
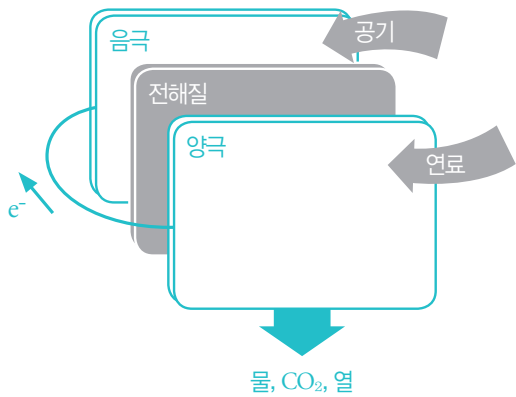
임을 알 수 있다. 정리하면 속도의 크기 $V = \frac{m}{M}v_0$ 이고 방향은 던져진 공과 반대방향이다.

- (2) (1)에서 구했듯이, 객차는 공과 반대방향의 속도를 가지게 된다. 즉 객차는 크기 $\frac{m}{M}v_0$ 의 속력으로 던져진 공과 반대방향, 즉 그림에서 왼쪽으로 움직인다. 움직인 거리를 구하려면 공이 첫 번째 충돌을 일으킬 때까지 날아간 시간을 구해야 한다. 실제로 공은 객차에 대하여 $v_0 + V$ 의 속력으로 날아가게 되므로 첫 번째 충돌이 일어나는 시간을 t 라 하면 $t = \frac{L}{v_0 + V} = \frac{L}{\left(1 + \frac{m}{M}\right)v_0}$ 가 된다. 따라서 공이 충돌하기 직전까지 객차가 움직인 거리는 $V \times t = \left(\frac{m}{M}v_0\right) \frac{L}{\left(1 + \frac{m}{M}\right)v_0} = \left(\frac{m}{M+m}\right)L$ 이 된다.

- (3) 첫 번째 충돌 후에는 모든 속도 벡터의 방향이 바뀌며 속도의 크기, 즉 속력은 충돌 전과 같다. 공이 날아가는 거리는 L , 시간은 $t = \frac{L}{v_0 + V}$ 로 앞의 경우와 같으므로 객차와 사람은 $\left(\frac{m}{M+m}\right)L$ 만큼 오른쪽으로 움직이게 되어 처음 정지해 있던 자리로 되돌아온다.

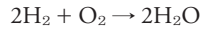
- (4) 첫 번째 충돌이 완전탄성충돌이 아니라면 충돌 후 공의 속력이 v_0 보다 작게 된다. 이를 v_0' 이라 하자. 한편 운동량은 여전히 보존되므로 객차와 사람의 속력을 V' 이라 하면 $M\vec{V}' + m\vec{v}_0' = 0$, 즉 $\vec{V}' = -\frac{m}{M}\vec{v}_0'$ 이 된다(이 속도의 크기는 탄성충돌시보다 작다). 공이 객차에 대하여 날아가는 속력은 $v_0' + V'$ 이고 공이 반대쪽 벽에 도달하기까지 걸리는 시간을 t' 이라 하면 $t' = \frac{L}{v_0' + V'} = \frac{L}{\left(1 + \frac{m}{M}\right)v_0'}$. 즉 객차가 움직인 거리는 $V' \times t' = \left(\frac{m}{m+M}\right)L$ 로 완전탄성충돌일 경우와 같다.

문제5 최근 다양한 유형의 친환경 신재생 에너지 자원을 개발하려는 연구가 큰 관심을 끌고 있다. 그 가운데 연료 전지는 산화/환원 반응이 동시에 일어나는 임의의 화학반응에 대하여 산화 반응과 환원 반응을 각각 양극과 음극에서 발생하도록 설계하여 양극에서 발생한 전자가 외부 회로를 경유하게 함으로써 전기에너지를 발생시키는 장치이다. 이와 같은 연료 전지는 양극에 연료를 공급하고 음극에 공기를 주입하여 각 반응을 유도하고, 부산물로서 물과 이산화탄소가 배출되는 공정으로 구성되므로 친환경적 에너지 생산 장치로 각광받고 있다. 메탄올을 연료로 채택한 연료 전지의 모식도와 각 전극에서 일어나는 반응을 아래에 나타내었다. 이를 참고하여 다음 물음에 답하시오. [40점]



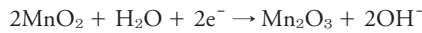
(1) 위의 전지에서 일어나는 화학반응에 대한 전체 균형 화학반응식을 기술하고, 메탄올 연료 160g을 사용하는 경우 발생하는 전자의 mol 수를 구하시오(단, C, H, O의 원자량은 각각 12g/mol, 1g/mol, 16g/mol이다).

(2) 수소(H₂)를 연료로 이용하는 수소 연료 전지의 전체 균형 화학반응식은 다음과 같다.



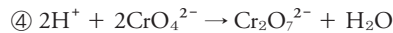
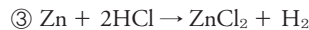
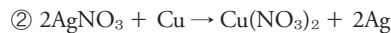
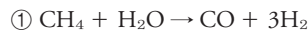
이 반응식을 양극 반응과 음극 반응으로 각각 나누어 기술하시오.

(3) 일상생활에서 접하는 알칼리형 건전지의 양쪽 화학반응은 다음과 같다.



위 반응에 대하여 양극 반응과 음극 반응을 명시하고, 산화/환원된 화학종을 구체적으로 각각 기술하시오.

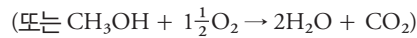
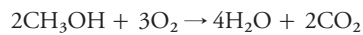
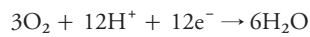
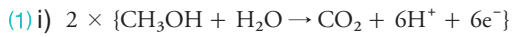
(4) 위에 제시한 사례들을 참고하여 다음 화학 반응식들에 대해 연료 전지로서의 적용 가능성 여부를 논하시오.



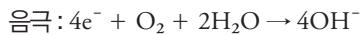
출제의도 ●

- 고교 교과과정의 '산화와 환원' 및 '신재생 에너지' 분야에 대한 이해도를 평가
- 전자를 잃거나 얻음에 의한 '산화-환원' 정의를 파악하고 있는가 여부
- 화학반응식의 '산화-환원 동시성' 및 '화학 양론'에 대한 이해도 평가
- 일상생활에서 접하는 연료 전지 및 배터리 작동 원리를 이해하는 기회를 제공함

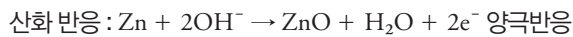
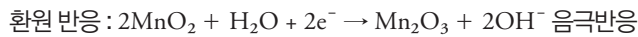
모범답안 ●



ii) 메탄올 1mol의 반응에 의하여 전자 6mol이 생성됨. 메탄올 160g은 5mol에 해당하므로 (1mol CH_3OH 의 분자량=32g/mol), 30mol의 전자가 생성됨



(3) Zn가 ZnO로 산화되었고($\text{Zn} \rightarrow \text{Zn}^{2+}$), MnO_2 가 Mn_2O_3 로 환원되었음($\text{Mn}^{4+} \rightarrow \text{Mn}^{3+}$). 따라서,



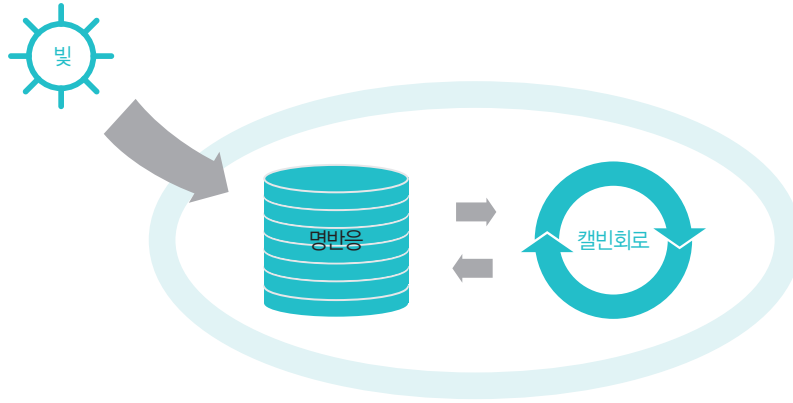
(4) ① 독성인 CO 화합물이 생성되어 비친환경적 문제가 있음

② 생성된 $\text{Cu}(\text{NO}_3)_2$ 침전물 회수 및 비경제적인 (Ag) 단점 등에 따른 실용성 문제가 있음

④ 산화 또는 환원 반응이 일어난 화학종이 없으므로 전자의 발생 및 전이가 가능하지 않음

따라서 연료 전지에 적용하기에 적절하지 않음

문제6 광합성은 녹색으로 보이는 잎의 엽육세포에 들어 있는 엽록체에서 수행되며, 아래 그림에 나타난 바와 같이 명반응과 캘빈회로의 두 과정으로 나뉜다.



실험실에서 시금치(*Spinacia oleracea*)를 가지고 아래와 같은 실험을 진행하였다. 이 실험과 관련하여 다음 물음에 답하시오. [40점]

[실험A] 아크릴로 만든 투명한 밀폐 용기 안에 시금치를 넣고, 물과 이산화탄소를 각각의 유입호스로 일정하게 공급하였다. 빛의 세기와 온도는 광합성에 적합하도록 유지시켰다.

[실험B] A와 같은 조건에서 실험하였으나, 용기 안의 시금치는 실험 전에 막자사발로 분쇄하고 초음파 처리를 하였다. 이 과정에서 세포와 세포내 소기관의 막이 손상되었으나 시금치의 질량은 유지되었다.

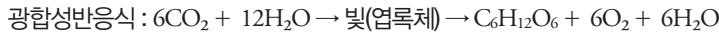
- (1) [실험A]의 결과 시금치의 질량이 90g 증가하였다. 시금치 질량의 변화와 이 반응에 사용된 이산화탄소의 질량의 변화에 대해 반응식을 이용하여 구체적으로 기술하시오. 또한 이 반응에 사용된 이산화탄소의 질량을 구하시오 (단, C, H, O의 원자량은 각각 12g/mol, 1g/mol, 16g/mol이다).
- (2) [실험B]에서는 시금치의 질량 변화가 없었다. 그런데 [실험B]의 시금치에 특정 화학물질들을 첨가하였더니 시금치의 질량이 증가하였다. 그 화학물질들이 무엇인지 밝히고, [실험A]의 경우와 동일한 질량의 증가를 위해 첨가해야 할 화학물질들의 양을 구하시오.
- (3) [실험B]에서 광합성이 일어나지 않았던 이유를 그림과 반응식을 이용하여 구체적으로 기술하시오.

출제의도

이 문제는 광합성이 일어나는 기작을 생물학적으로 정확하게 이해하고 있는지를 알아보기 위한 문제이다. 광합성은 빛에너지를 이용하여 물을 분해하고, 물에서 나온 전자를 엽록체의 생물구조를 사용하여 생물시스템에 필요한 화학에너지로 전환하는 명반응과, 명반응에서 만든 화학에너지를 사용하여 이산화탄소를 고정하여 포도당을 생성하는 캘빈회로(암반응)로 나뉜다. 이에 (1)에서는 광합성을 반응식으로 표현하고, 반응식을 이용하여 광합성에 사용된 물질의 양을 계산할 수 있는지를 알아보고자 한다. (2)에서는 명반응에서 합성한 화학에너지 ATP와 NADPH₂가 캘빈회로(암반응)을 위한 필수적 물질인 것을 알고 있는가를 묻는 문제이다. 또한 (3)은 이 화학에너지가 명반응에서 엽록체 구조를 이용하여 생성되는 기작을 정확히 알고 있는가를 묻는 문제이다.

모범답안

(1) i) 광합성에 의해 생성된 시금치 질량과 이 반응에 사용된 이산화탄소 질량의 변화는 다음과 같다.

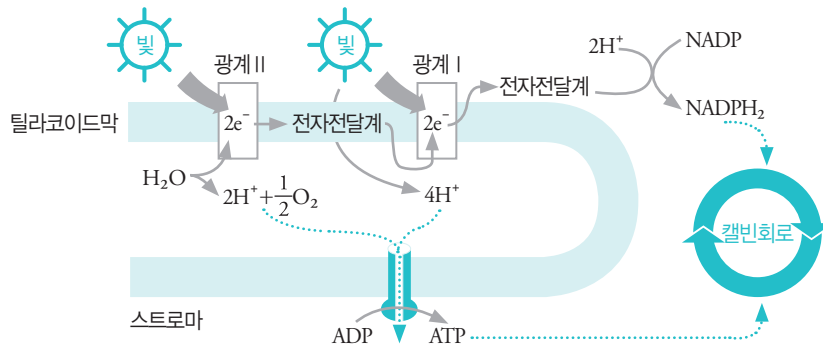


ii) 이 반응에 사용된 CO₂의 질량 : 위의 반응식에 의하여 생성된 포도당 90g은 0.5mol에 해당한다. 위 반응식에 의해 3mol의 이산화탄소가 사용되었으므로 이산화탄소 3mol의 질량 132g이 사용되었다.

(2) i) ATP와 NADPH₂를 첨가했어야 캘빈회로에서 포도당이 생성된다.

ii) 캘빈회로(암반응 : $6\text{CO}_2 + 12\text{NADPH}_2 + 18\text{ATP} \rightarrow \text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6 + 6\text{H}_2\text{O} + 12\text{NADP} + 18\text{ADP}$)에서 1mol의 포도당 합성을 위해서는 12mol의 NADPH₂와 18mol의 ATP가 필요하다. 그러므로 90g에 해당하는 0.5mol의 포도당합성을 위하여 6mol의 NADPH₂와 9mol의 ATP를 첨가해야 한다.

(3) i) 명반응은 아래의 그림에서와 같이 엽록체의 틸라코이드에서 일어나며, 틸라코이드막에 박혀 있는 엽록소에 의해 흡수된 빛에너지를 광합성에 필요한 화학에너지로 전환시키는 과정이다. 반응은 물의 광분해와 광인산화로 나누어진다. 광분해는 빛에너지에 의해 물이 분해되면서 전자가 방출되는 것을 말하며, 이때 방출된 전자는 틸라코이드막에 배열되어 있는 전자전달계를 통하여 전달되다가 궁극적으로 스트로마에서 NADPH₂를 생성한다. 또한 전자가 전자전달계로 전달되는 과정에서 양성자가 틸라코이드막 안으로 들어오게 되는데, 이에 의해 틸라코이드막 내외에 생성된 양성자의 농도구배에 의해 ATP합성효소가 스트로마에서 ATP를 생성한다. 이렇게 스트로마에 생성된 NADPH₂와 ATP는 캘빈회로에서 이산화탄소를 고정하는 데에 쓰인다.



ii) 광합성에 필요한 광계와 전자전달계는 틸라코이드막에 제대로 배열되어 있어야 전자가 전달되어 NADPH_2 를 생성할 수 있다. 또한 이 전자전달 과정에서 막 안쪽에 생긴 에너지(양성자농도구배)로 ATP를 생성한다. [실험B]에서는 광계의 색소와 전자전달계의 효소 등이 존재 하더라도 틸라코이드막이 손상되었으므로 광계와 전자전달계는 제대로 배열될 수 없어서 NADPH_2 를 합성할 수 없다. 또한 막 손상으로 막 안쪽에 에너지(양성자농도구배)를 형성할 수 없어 ATP도 합성할 수 없다. 따라서 틸라코이드막이 손상되면 캘빈회로에서 이산화탄소를 고정할 수 없다.