

논술고사 문제지 (자연계열)

모집단위	학부/학과	수험 번호	성 명
------	-------	-------	-----

◆ 유의 사항 ◆

1. 시험 시간은 120분임
2. 답안은 답안지의 해당 문항 번호에 검은색 펜이나 연필로 작성할 것
3. 학교명, 성명 등 자신의 신상에 관련된 사항을 답안 작성란에는 드러내지 말 것
4. 연습은 문제지 여백을 이용할 것
5. 문제 4-6번 물음에 대해 한 문제만 선택하여 답하시오.

감독확인



이화여자대학교

[1-3] 다음 물음에 답하시오.

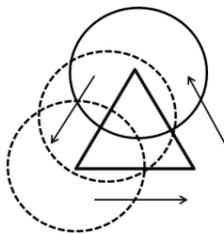
1 주어진 실수 $\alpha(0 < \alpha < \pi)$ 에 대하여, 함수 $F(\theta)$ 를 아래와 같이 정의하려고 한다. [18점]

$$F(\theta) = \frac{\sin(\theta + \alpha) - \sin \theta}{\cos(\theta + \alpha) + \cos \theta} \quad (\text{단, } \theta > 0)$$

- (1) 함수 $F(\theta)$ 가 개구간 $0 < \theta < M$ 에서 정의 된다고 할 때, M 이 취할 수 있는 최대값이 얼마인지 기술하시오. (단, M 은 α 로 표시된다.)
- (2) 문제 (1)에서 구한 정의역에서 $F(\theta)$ 는 상수함수가 됨을 보이시오.

2 반지름이 $r(r > 0)$ 인 원에 내접하는 정 n 각형들에 대하여 다음 문제들에 답하시오. [22점]

- (1) 정삼각형($n=3$) 세 변 위의 각 점을 중심으로 하는 반지름 r 인 원을 고려하자. 이 원들을 모두 모았을 때의 자취가 차지하는 면적을 구하시오(그림 참조).



- (2) 정 n 각형에서 변 위의 각 점을 중심으로 하는 반지름 r 인 원을 고려하자. 이 원들을 모두 모았을 때의 자취가 차지하는 면적을 A_n 이라고 할 때, 극한값 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ 을 구하는 과정을 기술하시오. (단, 정 n 각형의 내각의 합은 $(n-2)\pi$ 이다.)

3 실수 α 는 다음의 부등식을 만족한다.

$$\log_3((\log \alpha)^2 + 2\log \alpha) < \log_3(\log \alpha) + 1$$

이때 다음 극한값을 구하는 과정을 구체적으로 기술하시오. (여기에서 \log 는 상용로그를 의미한다.) [20점]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{10}\right) \left(1 + \left(\frac{\alpha}{10}\right)^2\right) \left(1 + \left(\frac{\alpha}{10}\right)^4\right) \cdots \left(1 + \left(\frac{\alpha}{10}\right)^{2^n}\right)$$

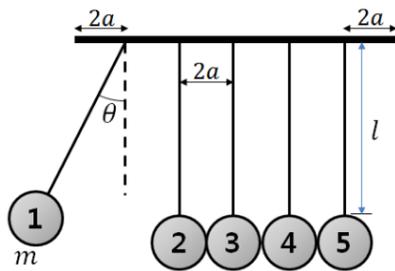
[4-6] 다음 4-6번 물음에 대해 한 문제만 선택하여 답하시오.

4 논리 전개에 필요한 근거나 수식을 명확히 제시하면서 다음 물음에 답하시오. [40점]

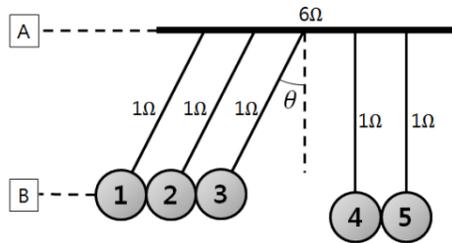
(1) 뉴턴의 운동 제2법칙과 제3법칙을 이용하여, 일직선상에서 두 물체가 충돌할 때 운동량 보존 법칙이 성립함을 보이시오.

(2) 쇠구슬 다섯 개가 그림처럼 쇠막대에 실을 통해 $2a$ 간격으로 매달려 있다. 쇠막대는 가늘고 균일하며 길이가 $12a$ 이고, 움직이지 않도록 고정되어 있다. 각 쇠구슬은 반지름이 a , 질량이 m 이고 실은 길이가 l , 질량은 무시할 수 있다. 평형 상태에서 구슬들은 옆 구슬과 한 점에서 접촉해있다. 구슬1을 각도 θ 만큼 들어 올렸다가 정지 상태에서 손을 놓으면 구슬2와 충돌할 것이다. 다음과 같은 가정 하에서 충돌 직후 구슬 다섯 개가 각각 어떻게 운동하는지 문제에서 주어진 값들을 이용해 명확히 설명하시오. (중력 가속도는 g 이다.)

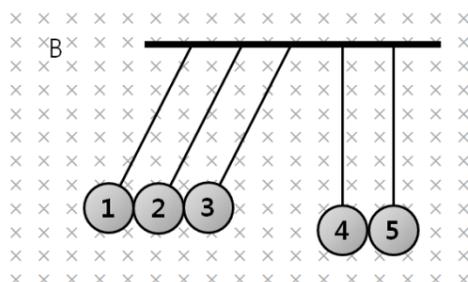
- ① 구슬은 모두 지면에 수직인 한 평면에서 움직이며 정면충돌 한다.
- ② 충돌 후후에 계의 운동에너지는 보존된다.
- ③ 구슬1이 구슬2와 충돌할 때 구슬3, 4, 5는 이 충돌에 영향을 미치지 않는다. 그리고 구슬1에 의해 움직인 구슬2는 곧바로 다시 순간적으로 구슬3과 충돌한다. 이것이 구슬4와 5의 충돌까지 이어진다. 이 전체 과정에서 걸리는 시간은 무시할 수 있을 정도로 짧아서 전체 충돌이 순간적으로 일어난다고 생각할 수 있다.



(3) 문제 (2)의 장치에서 구슬을 연결하는 실은 모두 전기 저항이 1Ω 이고 쇠막대 양 끝점 사이의 전체 전기 저항은 6Ω 이다. 쇠구슬은 전기 저항이 없으며, 두 쇠구슬이 한 점에서 접촉하고 있으면 한 쇠구슬에서 다른 쇠구슬로 전기 저항이 없이 전류가 흐를 수 있다고 하자. 아래 그림처럼 구슬1, 2, 3을 같이 들어 올렸다가 정지 상태에서 손을 놓았을 때 충돌 후의 모습을 개략적으로 그리고 이유를 설명하시오. 또한 쇠막대의 왼쪽 끝과 구슬1 사이의 전기 저항(즉, 아래 그림에서 A와 B 사이의 전기 저항)이 충돌 전과 충돌 후에 어떻게 변하는지 설명하시오.

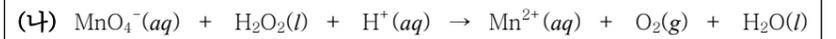
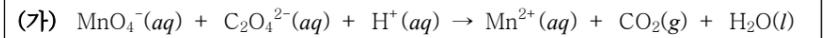


(4) 문제 (3)의 상황에서 아래 그림처럼 진동면에 수직으로 균일한 자기장이 걸려있다면, 구슬의 운동이 시간이 지남에 따라 어떻게 달라지는지 기술하고 근거를 설명하시오. 그리고 이 과정에서 에너지가 어떻게 전환되는지 논하시오.



5 산화-환원 반응은 산-염기의 중화 반응과 마찬가지로 우리 주변에서 많이 일어나고 있는 매우 중요한 반응이며 정량적으로 일어나기 때문에 시료의 농도를 알아내는 부피 분석법으로 활용될 수 있다. 특히 산화-환원 적정법을 이용하면, 농도를 정확하게 알고 있는 산화제 또는 환원제의 표준용액으로 시료를 완전히 산화 또는 환원시키는데 필요한 양을 측정함으로써 시료에 들어있는 미지의 물질의 농도를 정확하게 알아낼 수 있다. 다음은 이와 같은 산화-환원 적정법을 이용하여 수용액에 존재하는 과산화수소(H_2O_2)의 농도를 결정하는 실험에 관한 내용이다.

250 mL 삼각플라스크를 저울에 올린 후 과산화수소(H_2O_2) 수용액의 질량이 정확히 5.00 g이 되도록 측정된 다음, 황산(H_2SO_4)으로 만든 산성 수용액을 넣어준다. 온도가 $70^\circ C$ 정도인 물중탕에 이 삼각플라스크를 넣고, 아래 (가)의 산화-환원 반응을 통하여 농도를 정확히 알고 있는 과망간산칼륨($KMnO_4$) 용액을 뷰렛에 옮겨 적정을 시작하면 아래 화학 반응식 (나)에서와 같이 산화-환원 반응이 일어난다. 이 과정에서 적정 초기에 삼각플라스크 내에서 나타났던 과망간산이온(MnO_4^-)의 고유색이 사라지고 색깔을 띠지 않는 무색의 망간이온(Mn^{2+})이 생성된다. 당량점에 다다르면 용액 내에 존재하는 모든 과산화수소(H_2O_2)가 과망간산이온(MnO_4^-)과 반응하여 무색을 나타낸다. 이후 아주 소량의 과망간산칼륨($KMnO_4$) 용액 한 방울을 첨가하여 일정 시간이 경과한 후에도 삼각플라스크에서 옅은 자주색이 사라지지 않고 남아 있으면 산화-환원 반응의 종말점에 다다른 것으로 간주하고 반응을 종결한다.



이 실험과 관련하여 다음 물음에 답하시오. [40점]

(1) 전자의 이동과 산화수의 변화를 구체적으로 기술하여 산화-환원 반응식 (가)의 계수를 완결하시오.

(2) 위의 산화-환원 적정을 위해서는 우선 사용하는 과망간산칼륨($KMnO_4$) 용액의 정확한 농도를 알아야 한다. 이를 위하여 정확하게 무게를 측정할 수 있는 순수한 옥살산나트륨($Na_2C_2O_4$) 6.70 g(화학식량 = 134.0 g/mol)을 250 mL 부피 플라스크에 넣고 소량의 증류수로 완전히 녹인 후 눈금까지 증류수를 채우고 잘 섞는다. 이 수용액 20.0 mL를 피펫으로 정확히 취하여 삼각플라스크에 옮긴 후 산성 수용액을 첨가하여 위 실험에서 설명한 산화-환원 적정법과 동일한 방법으로 실험하였을 때, 당량점에 도달하는데 32.0 mL의 과망간산칼륨($KMnO_4$) 용액이 소비되었다. 이 결과로부터 과망간산칼륨($KMnO_4$) 용액의 몰 농도(M)를 결정하시오. (구체적인 계산 과정을 서술하고 소수점 이하 두 자리까지 나타내시오.)

(3) 문제 (2)의 실험 결과로부터 얻어진 정확한 농도의 과망간산칼륨($KMnO_4$) 용액을 가지고 과산화수소의 산성 용액과 산화-환원 적정을 하였을 때 당량점까지 12.0 mL의 과망간산칼륨($KMnO_4$) 용액이 소비되었다. 과산화수소 수용액 5.00 g에 들어있는 과산화수소(H_2O_2 , 화학식량 = 34.0 g/mol)의 퍼센트 농도를 구하시오. (구체적인 계산 과정을 서술하고 소수점 이하 두 자리까지 나타내시오.)

6 1961년 자코브와 모노는 대장균을 재료로 한 일련의 연구 결과를 토대로 락오페론설(젓당 오페론설)을 제시하였다. 그들은 조절유전자(I), 프로모터(P), 작동부위(혹은 작동유전자, O), 그리고 대사물활성단백질(CAP) 및 그 결합부위(C) 등의 기능적 상호조절 작용에 의해 젓당분해효소를 코딩하는 구조 유전자들이 세포 외부의 환경에 반응하여 효율적으로 발현된다는 사실을 실험적으로 증명하였다. 두 사람은 이 발견을 통하여 유전자의 발현 조절 기작을 분자 수준에서 설명한 것은 물론 하나의 유전자가 다른 유전자의 발현을 조절할 수 있다는 생물학적 개념을 수립하였다.

다음은 그들이 수행한 실험 및 결과 일부를 간략하게 소개한 것이다. 인위적으로 돌연변이를 유도하여 락오페론이 비정상적으로 조절되는 두 종류의 돌연변이형 대장균 a와 b를 얻었다. 야생형과 돌연변이형 대장균을 포도당과 젓당, 포도당만 혹은 젓당만이 에너지원으로 함유된 배지에 각각 배양한 뒤 이들이 생성하는 젓당분해효소 활성을 측정하였다. 더 나아가, 야생형 대장균으로부터 조절유전자와 락오페론이 모두 포함되어 있는 DNA 절편(F')을 분리하였다. 이를 야생형과 돌연변이형 대장균에 각각 주입하여 새로운 변종, 즉 야생형/F'과 돌연변이형/F' 대장균을 만들고 이 변종들을 대상으로 위에서 설명한 것과 같은 실험을 수행하였다. 돌연변이a 및 돌연변이b 대장균을 대상으로 한 실험결과를 각각 [표1] 및 [표2]로 정리하였다. [40점]

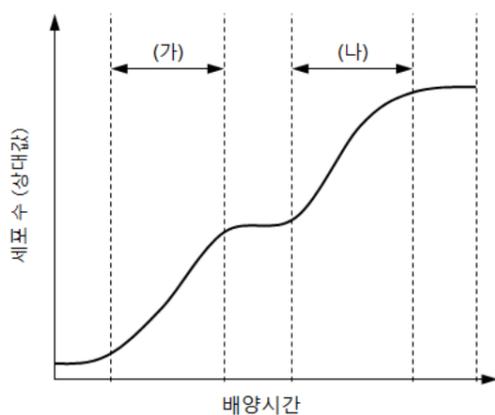
[표1]

	에너지원		젓당분해효소 활성 (상대값)			
	포도당	젓당	야생형	돌연변이a	야생형/F'	돌연변이a/F'
조건 1	+	+	10	10	20	20
조건 2	+	-	1	10	2	2
조건 3	-	+	1000	1000	2000	2000

[표2]

	에너지원		젓당분해효소 활성 (상대값)			
	포도당	젓당	야생형	돌연변이b	야생형/F'	돌연변이b/F'
조건 1	+	+	10	10	20	20
조건 2	+	-	1	1	2	2
조건 3	-	+	1000	10	2000	1010

(1) 야생형-조건1 실험에서 대장균을 배양하여 시간에 따른 세포 성장을 분석한 결과 아래와 같은 그래프를 얻었다. (가)와 (나) 구간에서의 락오페론 조절 기작을 각각 도식화하여 설명하시오 (힌트: C는 I와 P 사이에 위치한다. CAP는 포도당이 없을 때 활성화되며 C에 결합하여 RNA 중합효소가 프로모터에 효율적으로 결합하도록 도와준다).



(2) 돌연변이a 대장균은 I, P, O, C 및 'CAP을 코딩하는 유전자' 중 어느 부위에 돌연변이가 발생했을 것으로 추측하는지 답하고 그 이유를 설명하시오. 단, 돌연변이가 발생한 부위는 그 기능을 완전히 상실한다.

(3) 돌연변이a 대장균으로부터 조절유전자와 락오페론이 모두 포함되어 있는 DNA 절편(aF')을 분리한 후 돌연변이b 대장균에 주입하여 돌연변이b/aF' 대장균을 만들었다. 이 대장균을 위에서 설명한 세 가지 조건의 배지에 배양하였을 때 예측되는 각각의 젓당분해효소 활성의 상대값을 구하고 그 값을 도출한 근거를 제시하시오. 단, 이 경우도 야생형의 젓당분해효소 활성의 상대값은 [표1] 및 [표2]에 나타난 것과 동일하다.