

2015학년도 연세대학교 모의논술 문제(수학)

[문제 1] 다음 제시문을 읽고 아래 질문에 답하시오.

(가) 한국 팀이 A, B, C 팀과의 개별 경기에서 이길 확률은 각각 $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{10}$ 이다. 또한 A, B, C 팀과 비길 확률은 각각 $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{5}$ 이다.

(나) 한국 팀이 A, B, C 팀과 조별 경기를 한다고 하자. 한국 팀이 첫 경기에서 A, B, C 각 팀과의 이길 확률과 비길 확률은 개별 경기의 확률과 같다. 두 번째, 세 번째 경기에서 한국 팀이 이길 확률은 바로 앞서 벌어진 경기의 결과에 따라 다음과 같이 영향을 받는다.

- ▶ 직전 경기에서 이긴 경우, 다음 경기에서 이길 확률은 개별 경기에서 이길 확률의 1.3배이다.
- ▶ 직전 경기에서 비긴 경우, 다음 경기에서 이길 확률은 개별 경기에서 이길 확률의 1.1배이다.
- ▶ 직전 경기에서 진 경우, 다음 경기에서 이길 확률은 개별 경기에서 이길 확률의 0.9배이다.
- ▶ 비기는 확률은 직전 경기의 결과에 영향을 받지 않고 개별 경기에서 확률과 같다.

[1-1] 한국 팀의 조별 경기가 A팀, B팀, C팀의 순서로 정하여졌다. 한국 팀이 B팀과의 경기에서 질 확률을 구하시오. [8점]

[1-2] 한국 팀의 조별 경기가 A팀, B팀, C팀의 순서로 정하여졌다. 한국 팀이 B팀과의 경기에서 지지 않았을 때, 모든 경기에서 지지 않으면서 두 경기 이상 이길 확률을 구하시오. [8점]

[1-3] 조별 경기 순서를 추첨을 통하여서 결정하였을 때, 한국 팀이 첫 번째 경기를 지고, 두 번째 경기는 비기고, 마지막 경기는 이겼다고 한다. 이런 경우가 일어날 확률이 가장 높은 한국 팀의 경기 순서를 찾고 그 이유를 설명하시오. [8점]

[문제 2] 다음 제시문을 읽고 아래 질문에 답하십시오.

(가) 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합 R 을 정의역과 공역으로 갖는 연속 함수이다.

포물선 $y = x^2 + px$ 을 생각하자. 함수 $y = x^2 + px - f(x)$ 는 상수 p 의 값에 따라 최솟값을 가질 수도 가지지 않을 수도 있다. 집합 A 를 다음과 같이 정의한다.

$$A = \{p \in R \mid x^2 + px - f(x) \text{가 최솟값을 가진다.}\}$$

함수 $F(p)$ 는 $p \in A$ 에 대하여 $x^2 + px - f(x)$ 의 최솟값을 대응하는 함수이다. 집합 B 를 다음과 같이 정의한다.

$$B = \{t \in R \mid \text{어떤 } p \in A \text{에 대하여 } x^2 + px - f(x) \text{는 } x = t \text{에서 최솟값을 갖는다.}\}$$

(나) 연속 함수 $g(x)$ 에 대하여 부등식 $g(x) \geq f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 성립하고 등호는 단 한 점에서만 성립하면 곡선 $y = g(x)$ 가 곡선 $y = f(x)$ 의 위쪽에서 단 한 번 만난다고 한다.

(다) 두 실수 a, b 에 대하여 $\min(a, b)$ 는 다음과 같이 정의한다.

$$\min(a, b) = \begin{cases} a, & a \leq b \\ b, & a > b \end{cases}$$

[2-1] 함수 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 가 모든 실수에 대하여 존재하고 또한 연속이라고 가정하자.

집합 $A = \{1\}$ 이고 $B = (-\infty, \infty)$ 인 함수 $f(x)$ 를 모두 찾고 그 이유를 설명하십시오.

집합 $A = (0, \infty)$ 인 함수 $f(x)$ 가 존재하는지를 판단하고 그 이유를 설명하십시오. [8점]

[2-2] 포물선 $y = x^2$ 을 x 축과 y 축의 양의 방향으로 각각 a 와 b 만큼 평행이동 하면 곡선 $y = f(x)$ 의 위쪽에서 단 한 번 만난다고 하자. 이 정보만을 가지고 집합 A 의 원소 p 를 최소한 1개 찾아서 a, b 에 대한 식으로 표현하고 $F(p)$ 를 구하십시오. [8점]

[2-3] 함수 $f(x)$ 의 최댓값이 존재한다고 가정하자. 이 때 집합 A 를 구하고 그 이유를 설명하십시오. [8점]

[2-4] 함수 $f(x) = \min(ax + b, cx + d)$ 에 대하여 (단, $a < c$) 집합 A 와 B 를 찾고, $F(p)$ 를 a, b, c, d 와 p 에 대한 식으로 나타내시오. [10점]

1. 출제의도

- 고등학교 수학교과과정내의 기본적인 정의, 개념, 원리에 대한 정확한 이해력, 논리적인 분석력, 계산 능력 그리고 이를 토대로 추론능력을 평가한다.
- 제시된 조건을 정확히 이해하여 문제를 분석하여 적용하고 응용할 수 있는 문제해결능력을 평가한다.
- 고등학교 교과과정을 바탕으로 기본 개념을 정확하게 이해하고 분석하여 문제를 해결하는 논리적 사고력을 스스로 키워온 학생들이 수월하게 풀 수 있는 문제를 출제하였다.

2. 제시문 설명 및 문항 분석

가. 제시문1

확률의 개념과 확률이 직전 사건에 영향을 받는다는 조건을 정확히 이해하여 여사건, 조건부확률에 관한 문제를 해결하는 능력을 평가한다.

문제	문항분석
문제 1-1	제시문에서 확률이 직전사건에 영향을 받는다는 조건을 이해하고 여사건 개념을 이용하여 문제를 해결할 수 있는지 평가한다.
문제 1-2	문제 1-1과 연계하여 여사건과 조건부확률의 개념을 이해하는지 평가한다.
문제 1-3	제시문에서 주어진 조건이 일부 확률적으로 독립이란 사실을 활용할 수 있는지 평가한다.

나. 제시문2

이 문제는 집합의 개념 및 함수와의 관계를 이해하고 최대최소와 관련하여 미분을 활용할 수 있는지 평가하는 문제이다. 또한 추론을 통하여 함수에 대한 이해도를 측정하는 문제이다.

문제	문항분석
문제 2-1	제시문에서 주어진 집합을 정확하게 이해하는지 평가하는 문제이다. 미분가능한 함수가 최솟값을 가지는 점에서 미분계수가 0임을 활용할 수 있는지 평가한다. 고등학교과정에 등장하는 여러 함수의 성질을 이 문제에 적용할 수 있는지를 묻는다.
문제 2-2	제시문에서 정의한 집합을 평행이동과 연관하여 함수의 그래프 사이의 관계로 이해할 수 있는지 묻는다.
문제 2-3	포물선의 성질과 함수의 개형을 이해하여 최대최소에 활용할 수 있는지 묻는다.
문제 2-4	문자를 활용한 대수적인 계산능력 및 미분이 불가능한 점이 있는 경우 최대최소에 활용할 수 있는지 평가한다.

※ 아래의 예시답안은 핵심만을 간략히 기술한 것으로서 참고로만 활용하기 바랍니다. 예시답안과 다른 다양한 풀이 형태도 있을 수 있음을 알립니다.

문제 [1-1]

■ 1) 첫 번째 경기를 이기고 두 번째 경기를 지는 경우의 확률: $\frac{1}{5} \times (1 - \frac{3}{5} \times \frac{13}{10} - \frac{1}{5}) = \frac{1}{250}$

2) 첫 번째 경기를 비기고 두 번째 경기를 지는 경우의 확률: $\frac{2}{5} \times (1 - \frac{3}{5} \times \frac{11}{10} - \frac{1}{5}) = \frac{14}{250}$

3) 첫 번째 경기를 지고 두 번째 경기를 지는 경우의 확률: $\frac{2}{5} \times (1 - \frac{3}{5} \times \frac{9}{10} - \frac{1}{5}) = \frac{26}{250}$

따라서 두 번째 경기를 질 확률은 $\frac{1}{250} + \frac{14}{250} + \frac{26}{250} = \frac{41}{250}$.

문제 [1-2]

■ 문제 [1-1]에 의해 B팀과의 경기에서 지지 않을 확률은 $1 - \frac{41}{250} = \frac{209}{250}$ 이다.

한국 팀이 B팀과의 경기에서 지지 않았을 때, 모든 경기에서 지지 않으면서 두 경기 이상 이길 경우

첫 번째 경기	두 번째 경기	세 번째 경기	확률
승	승	승	$\frac{1}{5} \times (\frac{3}{5} \times \frac{13}{10}) \times (\frac{1}{10} \times \frac{13}{10}) = \frac{507}{25000}$
무	승	승	$\frac{2}{5} \times (\frac{3}{5} \times \frac{11}{10}) \times (\frac{1}{10} \times \frac{13}{10}) = \frac{858}{25000}$
승	무	승	$\frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times (\frac{1}{10} \times \frac{11}{10}) = \frac{11}{2500} = \frac{110}{25000}$
승	승	무	$\frac{1}{5} \times (\frac{3}{5} \times \frac{13}{10}) \times \frac{1}{5} = \frac{780}{25000}$
합			$\frac{507 + 858 + 110 + 780}{25000} = \frac{2255}{25000} = \frac{451}{5000}$

한국 팀이 B팀과의 경기에서 지지 않았을 때, 모든 경기에서 지지 않으면서 두 경기 이상 이길 확률은

$$\frac{\frac{451}{5000}}{\frac{209}{250}} = \frac{41}{380} \text{이다.}$$

문제 [1-3]

■ 두 번째 경기가 비겼으므로 앞 경기에 영향을 받지 않는 독립적인 사건이다. 그리고 마지막 경기에서 승리 할 확률은 공통적으로 1.1배가 곱해지므로 지고, 비기고, 이기는 각 경우가 가장 높은 상황을 택하면 되므로 C-A-B 경우이다.

[별해] 추첨을 통해 나올 수 있는 경기의 가지 수는 총 여섯 가지, 즉 A-B-C, A-C-B, B-A-C, B-C-A, C-A-B, C-B-A이다. 각 경우에서 첫 번째 경기를 지고, 두 번째 경기를 비기고 세 번째 경기를 이길 확률을 구하면 $\frac{22}{2500}, \frac{132}{2500}, \frac{22}{2500}, \frac{22}{2500}, \frac{462}{2500}, \frac{77}{2500}$ 이므로 정답은 C-A-B 경우이다.

문제 [2-1]

- $A = \{1\}$, $B = (-\infty, \infty)$ 라면 $x^2 + x - f(x)$ 가 상수여야 한다. 따라서 $f(x) = x^2 + x + C$.
- $g(x) = f'(x) - 2x$ 라고 하자. $p \in A$ 라면 $p = g(x)$ 인 x 가 존재하여야 한다.
따라서, $p \in A$ 인 필요조건은 p 가 $g(x)$ 의 치역에 들어가는 것이다.
예를 들어 $g(x) = e^{-x}$ 라 하면 $f(x) = x^2 - e^{-x}$ 이고, 이 때 $A = (0, \infty)$ 임을 확인할 수 있다.

문제 [2-2]

- $(x - a)^2 + b - f(x)$ 가 최솟값 0을 가짐을 유추할 수 있다.
따라서 $x^2 - 2ax - f(x) \geq -a^2 - b$ 이므로 $p = -2a$ 일 때 $F(p) = -a^2 - b$ 이다.

문제 [2-3]

- 상수 C 가 $f(x)$ 의 최댓값보다 크다면 모든 실수 p 에 대하여 부등식 $x^2 + px + \frac{p^2}{4} + C > f(x)$ 가 성립한다.
포물선 $y = x^2 + px + \frac{p^2}{4} + C$ 을 y 축의 아랫방향으로 평행이동하면 $y = f(x)$ 와 최초로 만날 것이다.
따라서 모든 실수 p 에 대하여 $F(p)$ 가 존재하고 $A = (-\infty, \infty)$ 이다.

문제 [2-4]

- 두 직선 $y = ax + b$ 와 $y = cx + d$ 의 교점을 $\alpha = \frac{b-d}{c-a}$ 라 하자.
 $x^2 + px - f(x)$ 의 최솟값은 $x = \alpha$ 또는 $2x + p - f'(x) = 0$ 인 점에서 발생한다.

$$2x + p - f'(x) = \begin{cases} 2x + p - c, & x < \alpha \\ 2x + p - a, & x > \alpha \end{cases}$$

이므로

- ▶ $x < \alpha$, $2x + p - c = 0$ 이면, $p > c - 2\alpha$ 이고, $x = \frac{c-p}{2}$ 에서 $x^2 + px - f(x) = -\frac{(p-c)^2}{4} - d$ 이다.
- ▶ $x > \alpha$, $2x + p - a = 0$ 이면, $p > a - 2\alpha$ 이고, $x = \frac{a-p}{2}$ 에서 $x^2 + px - f(x) = -\frac{(a-p)^2}{4} - b$ 이다.
- ▶ $x = \alpha$ 에서는 $x^2 + px - f(x)$ 의 값은 $\alpha^2 + p\alpha - \frac{bc-ad}{c-a}$ 이다.

그런데, $-\frac{(p-c)^2}{4} - d - \alpha p - \alpha^2 + \frac{bc-ad}{c-a} = -\frac{1}{4}(p+2\alpha-c)^2 \leq 0$ 이고 마찬가지로

$$-\frac{(p-a)^2}{4} - b - \alpha p - \alpha^2 + \frac{bc-ad}{c-a} = -\frac{1}{4}(p+2\alpha-a)^2 \leq 0 \text{ 이므로}$$

$$F(p) = \begin{cases} -\frac{1}{4}(p-a)^2 - b, & p < a - 2\frac{b-d}{c-a} \\ \frac{b-d}{c-a}p + \left(\frac{b-d}{c-a}\right)^2 - \frac{bc-ad}{c-a}, & a - 2\frac{b-d}{c-a} \leq p \leq c - 2\frac{b-d}{c-a} \\ -\frac{1}{4}(p-c)^2 - d, & p > c - 2\frac{b-d}{c-a} \end{cases}$$

따라서 $A = (-\infty, \infty)$ 이다. 또한 $B = (-\infty, \infty)$ 이다.