2014학년도 연세대학교 수시모집 논술시험 문제(수학, 물리)

모집단위		수험번호		성 명	

[문제1] 다음 제시문을 읽고 아래 질문에 답하시오.

17세기에 라이프니츠는 두 양 사이의 대응 관계를 명확히 하고자 함수의 개념을 처음 도입하였다. 그 이후 많은 변화를 거쳐 함수의 개념은 일반화 되었으며 다양한 대응관계를 표현하는 도구로 활용되고 있다. 현대에는 함수를 수가 아닌 대상에도 적용하여 사용하고 있다.

(가) 실수 전체의 집합을 R라 하고, 집합 $U=\{f\,|\,f:R\to R\}$라 하자. 즉, 집합 U는 집합 R에서 집합 R로 가는 모든 함수의 모임이다. 전체 집합 U의 두 부분집합 A, B를

$$A=\{f\mid f\in U,\ f(x)=ax+b,\ a,b\in R\},$$
$$B=\{f\,|\,f\in U,\ f(x)=ax^2+bx+c,\ a,b,c\in R,\ a>0\}$$

라 하자.

(나) 함수 $f\in U$ 대하여 $mx-f(x)$가 최댓값을 가지면 그 값을 $F(m)$이라 하자.

(다) 두 실수 a,b에 대하여 $\mathrm{Max}(a,b)=\begin{cases} a & (a \geq b) \\ b & (a<b) \end{cases}$ 이다.

※ 다음 모든 문제에서 사용되는 f와 F는 제시문 (나)에서 주어진 관계를 만족한다.

[1-1] 함수 $f(x)=x^2$에 대하여 곡선 $y=f(x)$에 접하고 기울기가 m인 접선을 l이라 할 때, 직선 l의 y절편이 $-F(m)$임을 설명하시오. [10점]

[1-2] (1) 함수 $f(x)=ax^2+bx+c$가 집합 B의 원소일 때, 모든 실수 m에 대하여 $F(m)=pm^2+qm+r$로 나타낼 수 있으므로 함수 $F(x)$도 집합 B의 원소임을 설명하시오. [10점]

(2) 문제 (1)의 두 함수 f와 F에 대하여 f에 F를 대응시키는 함수 $T:B\to B$를 생각할 수 있다. 함수 T에 대하여 $f_k=(\underbrace{T\circ T\circ\cdots\circ T}_{k\text{개}})(f)$ $(k=1,2,3,\cdots)$으로 정의하자. 집합 B의 원소 $f(x)=ax^2+bx+c$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{n}f_k\left(\frac{k}{2n}\right)$의 수렴 여부를 논하고, 수렴하면 그 극한값을 a,b,c에 대한 식으로 나타내시오. [10점]

[1-3] (1) 함수 $f(x)=\mathrm{Max}(ax+b,cx+d)$ (단, $a<c$)에 대하여 $F(m)$이 존재하는 m의 범위를 찾고, $F(m)$을 a,b,c,d와 m에 대한 식으로 나타내시오. [10점]

(2) 함수 $f(x)=\mathrm{Max}\left(\frac{a+b}{2}x-\frac{ab}{2},\frac{1}{2}x^2\right)$ (단, $a<b$)라 하자. 모든 실수 m에 대하여 $F(m)$이 존재함을 보이고, $F(m)$을 a,b와 m에 대한 식으로 나타내시오. [10점]

(3) 집합 U의 원소 f에 대응하는 F가 집합 U의 원소라면 $T(f)=F$라 하고, 이 과정을 k번 반복할 수 있는 경우 $f_k=(\underbrace{T\circ T\circ\cdots\circ T}_{k\text{개}})(f)$ $(k=1,2,3,\cdots)$으로 정의하자. 함수 $f(x)=\mathrm{Max}\left(6x-10,\frac{1}{2}x^2\right)$에 대하여 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^n}f_n(3^n)$의 수렴 여부를 논하고, 수렴하면 그 값을 구하시오. [10점]

[문제2] 다음 제시문을 읽고 아래 질문에 답하시오.

(가) 고대 그리스의 데모크리토스는 모든 물질이 매우 작은 입자로 구성되어 있다는 원자설을 제안하였고, 이 생각은 1808년 영국의 돌턴에 의해 부활되었다. 1911년, 영국의 러더퍼드는 수많은 헬륨 핵을 금박에 충돌시켜 본 결과, 대부분은 금박을 관통하지만 일부는 진행 방향이 큰 각도로 바뀌는 것을 관찰하였다.

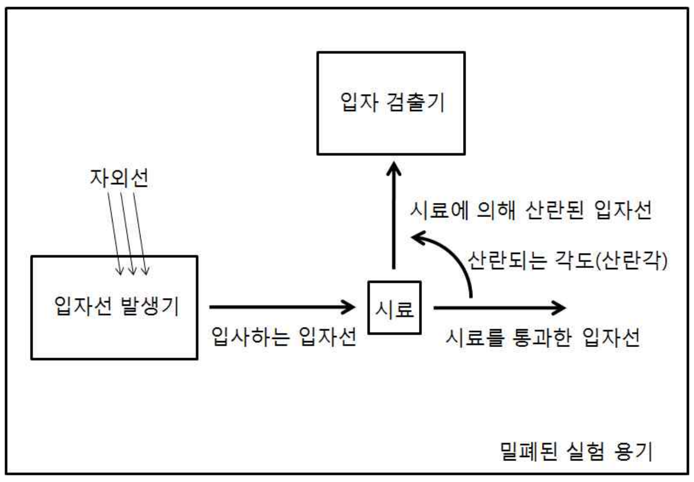
(나) [그림1]과 같이 질량과 운동 에너지를 알고 있는 입자를 충돌시켜 산란 후의 에너지를 조사하면 시료를 구성하는 원자의 질량수를 알아낼 수 있다.

(다) 입자선 발생기는 수소 원자를 양이온으로 이온화 시키는 장치와 이온화된 수소 원자를 가속시키는 장치로 구성된다. 수소 원자는 자외선을 쬐어 이온화 시킨다. 속박되지 않은 자유전자의 에너지는 수소 원자에 가장 강하게 속박된 전자의 에너지보다 13.6 eV 이상 높다.

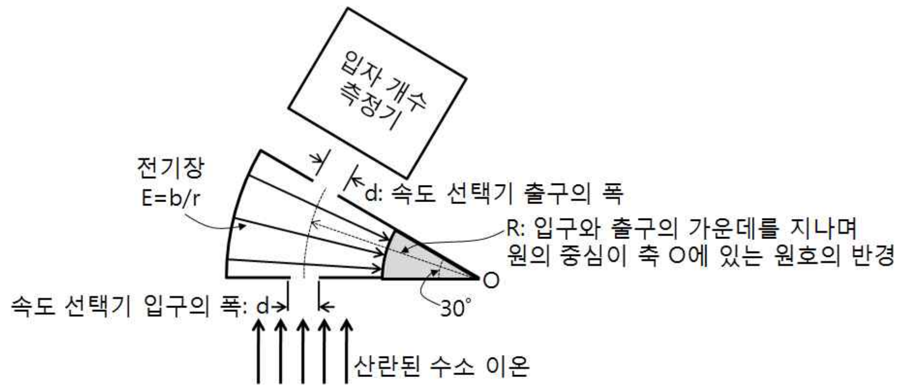
(라) 발생된 수소 이온은 가속 장치를 통과하면서 일정한 운동 에너지를 가지며, 시료 방향으로 조사하여 산란 실험을 하기 위해서는 진행을 방해하는 공기 분자와 충돌하지 않아야 한다. 가속된 수소 이온 1개가 단위길이당 공기 분자와 충돌하는 평균 횟수는 단위부피당 공기 분자의 개수와 공기 분자의 단면적의 곱과 같다. (단, 가속된 수소 이온의 속력은 빛의 속력에 비하여 매우 작다.)

(마) 시료에 입사한 수소 이온은 시료의 원자핵과 충돌하는 경우에는 큰 각도로 산란될 수 있고, 원자핵과 충돌하지 않는 경우에는 시료 내의 전자들과 상호작용하여 에너지를 잃을 수 있다.

(바) 입자 검출기는 속도 선택기와 입자 개수 측정기로 구성되어 있다. 속도 선택기는 [그림 2]와 같이 중심각이 30°인 부채꼴을 밑면으로 하는 기둥 모양이며, 수소 이온이 속도 선택기 안에 걸려있는 전기장을 지나도록 설계되어 있다. 속도 선택기의 각 단면에서 축 O로부터 거리가 r만큼 떨어진 위치에서의 전기장은 축 O를 향하며 그 크기는 $E = \frac{b}{r}$로 주어진다. (b는 상수이다.)



[그림 1] 이온 산란 실험 모식도



[그림 2] 입자 검출기의 단면 구조. 산란된 수소 이온은 속도 선택기 입구에 수직으로 입사하며, 입구를 통과하는 위치는 무작위로 달라질 수 있고, 출구를 통과한 입자는 모두 입자 개수 측정기에 들어간다. (단, d≪R 이다.)

<물리량 표>

상 수	값	상 수	값
볼츠만 상수(k_B)	1.4×10^{-23} J/K	수소 이온의 질량(m_p)	1.7×10^{-27} kg
기본 전하량(e)	1.6×10^{-19} C	전자의 질량(m_e)	9.1×10^{-31} kg
플랑크 상수(h)	6.6×10^{-34} J.s	정전기력(쿨롱) 상수(k)	9.0×10^{9} N.m^2/C^2

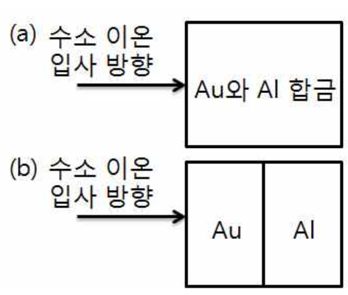
[2-1] 수소 원자에서 전자를 떼어 내어 수소 양이온을 만들기 위해 쬐어주어야 하는 자외선의 진동수에 대해서 논하고, 전기장을 사용하여 운동 에너지가 2×10^6 eV가 되도록 수소 이온을 가속하는 방법을 제안하시오. [8점]

[2-2] 이온화된 수소 원자가 공기 중(온도 300 K, 압력 10^5 N/m^2)에서 공기 분자와 부딪히지 않고 진행할 수 있는 평균 거리에 대하여 논하고, 산란 실험을 위한 실험 용기의 크기가 1 m × 1 m × 1 m 일 때 이온 산란 실험을 가능하게 하는 실험 용기 안의 공기 압력에 대하여 논하시오. 단, 공기 분자는 평균 반지름이 1×10^{-10} m 인 구형이고, 실험 용기 안의 공기 온도는 300 K으로 일정하다. [8점]

[2-3] [그림 1]의 입자 산란 실험에서 특정한 운동 에너지(E_0)로 시료의 원자핵에 입사하여 90°로 산란된 뒤에 시료 내 전자들과 상호작용 없이 검출기에 도착하는 수소 이온의 운동 에너지를 원자핵의 질량에 대한 함수로 논하시오. 단, 수소 이온은 시료의 원자핵과 한번만 충돌한다고 가정한다. [8점]

[2-4] [그림 2]와 같은 입자 검출기의 속도 선택기를 원호 또는 원호가 아닌 곡선의 경로로 통과할 수 있는 수소 이온의 속력 범위를 설명하시오. 설명한 속력 범위를 사용하여 시료 원자핵의 질량을 구별할 수 있는 분해능(입자 검출기로 구별할 수 있는 최소의 질량 차이)을 설명하시오. 단, 검출기는 산란각이 90°인 방향에 위치한다. [8점]

[2-5] 검출기를 산란각이 180°인 방향에 위치시키고, 오른쪽 [그림 3]과 같이 금(Au, 핵의 질량은 수소 이온의 197배로 함)과 알루미늄(Al, 핵의 질량은 수소 이온의 27배로 함)이 균일하게 섞인 시료(a)와, 금과 알루미늄의 두 층으로 이루어진 시료(b)를 각각 사용하여 수소 이온 산란 실험을 두 차례 진행하였다. 시료(b)에서 금 층과 알루미늄 층의 두께는 같다. 시료(a)를 사용한 실험과 시료(b)를 사용한 실험에서 시료의 원자핵과 한번만 충돌하고 검출기에 도달하는 수소 이온의 운동 에너지 범위를 비교하여 설명하시오. 단, 수소 이온이 원자핵과 충돌하지 않고 시료를 통과하는 경우에 시료의 구성 원소와 상관없이 단위길이당 운동 에너지의 손실이 같고, 두 실험에서 시료를 완전히 통과한 수소 이온은 초기 운동 에너지의 2%를 잃는다고 가정한다. [8점]



[그림3] 시료의 구조 및 수소 이온의 입사 방향

2014학년도 연세대학교 수시모집 논술시험 문제(수학, 화학)

모집단위		수험번호		성 명	

[문제1] 다음 제시문을 읽고 아래 질문에 답하시오.

17세기에 라이프니츠는 두 양 사이의 대응 관계를 명확히 하고자 함수의 개념을 처음 도입하였다. 그 이후 많은 변화를 거쳐 함수의 개념은 일반화 되었으며 다양한 대응관계를 표현하는 도구로 활용되고 있다. 현대에는 함수를 수가 아닌 대상에도 적용하여 사용하고 있다.

(가) 실수 전체의 집합을 R라 하고, 집합 $U=\{f\,|\,f:R\to R\}$라 하자. 즉, 집합 U는 집합 R에서 집합 R로 가는 모든 함수의 모임이다. 전체 집합 U의 두 부분집합 A, B를

$$A=\{f\mid f\in U,\, f(x)=ax+b,\ a,b\in R\},$$
$$B=\{f\mid f\in U,\ f(x)=ax^2+bx+c,\ a,b,c\in R,\ a>0\}$$

라 하자.

(나) 함수 $f\in U$ 대하여 $mx-f(x)$가 최댓값을 가지면 그 값을 $F(m)$이라 하자.

(다) 두 실수 a, b에 대하여 $\mathrm{Max}(a,b)=\begin{cases} a & (a\ge b)\\ b & (a<b)\end{cases}$ 이다.

※ 다음 모든 문제에서 사용되는 f와 F는 제시문 (나)에서 주어진 관계를 만족한다.

[1-1] 함수 $f(x)=x^2$에 대하여 곡선 $y=f(x)$에 접하고 기울기가 m인 접선을 l이라 할 때, 직선 l의 y절편이 $-F(m)$임을 설명하시오. [10점]

[1-2] (1) 함수 $f(x)=ax^2+bx+c$가 집합 B의 원소일 때, 모든 실수 m에 대하여 $F(m)=pm^2+qm+r$로 나타낼 수 있으므로 함수 $F(x)$도 집합 B의 원소임을 설명하시오. [10점]

(2) 문제 (1)의 두 함수 f와 F에 대하여 f에 F를 대응시키는 함수 $T:B\to B$를 생각할 수 있다. 함수 T에 대하여 $f_k=(\underbrace{T\circ T\circ\cdots\circ T}_{k\text{개}})(f)$ $(k=1,2,3,\cdots)$으로 정의하자. 집합 B의 원소 $f(x)=ax^2+bx+c$에 대하여 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{n}f_k\left(\frac{k}{2n}\right)$의 수렴 여부를 논하고, 수렴하면 그 극한값을 a,b,c에 대한 식으로 나타내시오. [10점]

[1-3] (1) 함수 $f(x)=\mathrm{Max}(ax+b,cx+d)$ (단, $a<c$)에 대하여 $F(m)$이 존재하는 m의 범위를 찾고, $F(m)$을 a,b,c,d와 m에 대한 식으로 나타내시오. [10점]

(2) 함수 $f(x)=\mathrm{Max}\left(\frac{a+b}{2}x-\frac{ab}{2},\frac{1}{2}x^2\right)$ (단, $a<b$)라 하자. 모든 실수 m에 대하여 $F(m)$이 존재함을 보이고, $F(m)$을 a,b와 m에 대한 식으로 나타내시오. [10점]

(3) 집합 U의 원소 f에 대응하는 F가 집합 U의 원소라면 $T(f)=F$라 하고, 이 과정을 k번 반복할 수 있는 경우 $f_k=(\underbrace{T\circ T\circ\cdots\circ T}_{k\text{개}})(f)$ $(k=1,2,3,\cdots)$으로 정의하자. 함수 $f(x)=\mathrm{Max}\left(6x-10,\frac{1}{2}x^2\right)$에 대하여 무한급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^n}f_n(3^n)$의 수렴 여부를 논하고, 수렴하면 그 값을 구하시오. [10점]

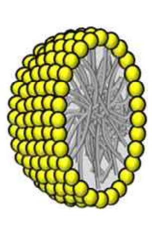
연세대학교 YONSEI UNIVERSITY

[문제2] 다음 제시문을 읽고 아래 질문에 답하시오.

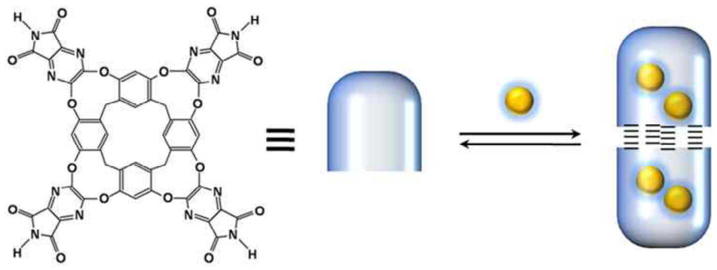
(가) 자기조립(self-assembly)은 무질서한 배열의 분자들이 수소결합, 쌍극자 상호작용, 분산력과 같은 분자 간의 상호작용에 의해 조직적인 구조나 형태가 자발적으로 만들어지는 과정이다. 생명체는 여러 단계의 자기조립 과정을 통하여 고도로 조직화된 세포, 조직, 장기 등을 만든다. 자기조립에 대한 연구는 생명체에서 일어나는 복잡한 화학 현상의 이해에 도움을 주며 나노 구조의 제어를 가능하게 해 각종 기능성 재료의 설계에 응용된다.

(나) 마이셀은 친수성 머리 부분과 소수성 꼬리로 구성된 계면활성제가 모인 분자집합체이다. 계면활성제가 물속에서 일정 농도 이상이 되면 그림 1과 같이 소수성 꼬리부분이 중심부를 향하고 친수성 머리 부분은 물과 닿는 표면을 형성한다. 계면활성제를 이용하면 물에 잘 녹기 어려운 소수성 분자들을 마이셀 내부에 가두어 물속에 분산시킬 수 있다.

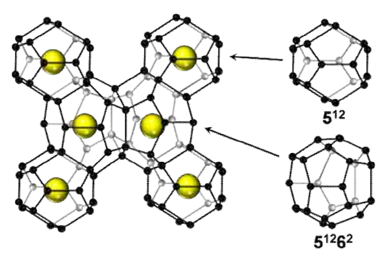
(다) 분자캡슐(molecular capsule)은 2개 이상의 분자가 자기조립해서 만들어지며, 내부에 작은 크기의 분자를 가둘 수 있는 공간(cavity)을 가진 거대분자체이다. 그림 2는 수소결합을 이용하여 분자캡슐을 만드는 대표적인 분자의 예이다. 분자캡슐은 비교적 약한 분자 간의 힘을 이용해 만들어지며 내부에 게스트(guest) 분자가 포함될 경우 캡슐의 구조를 더 안정하게 유지하는 경우가 있다. 분자캡슐은 대부분 비교적 약한 분자간의 힘으로 만들어지기 때문에, 환경에 따라 게스트 분자의 출입을 자유롭게 조절할 수 있다. 캡슐 내부에 존재하는 게스트 분자는 외부환경으로부터 고립되기 때문에 독특한 물리적·화학적 특성을 나타내는 경우도 있다.



[그림 1] 마이셀

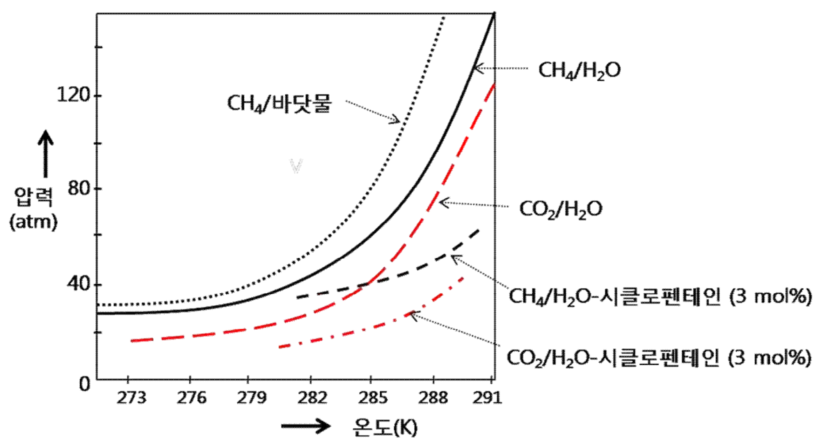


[그림 2] 분자캡슐



[그림 3] 메테인 하이드레이트

(라) 가스 하이드레이트(gas hydrate)는 가스 분자들이 물분자로 이루어진 결정 속에 갇혀 있는 구조이며 높은 압력에서 생성된다. 불타는 얼음으로 잘 알려진 메테인 하이드레이트(methane hydrate)는 대표적인 가스 하이드레이트 중의 하나이다. 메테인 하이드레이트의 일반 구조식은 $(CH_4)(H_2O)_n$로 주어지며, 그림 3은 메테인 하이드레이트의 대표적인 구조의 일부를 표시한 것이다. 모퉁이에 존재하는 4개의 구조는 정12면체로 (정5각형 12개로 구성= $\mathbf{5^{12}}$로 표시) 각 꼭짓점에는 산소 원자가 있고 이들 결정구조 안에 메테인 분자가 갇혀 있다. 가운데 2개의 구조는 14면체로 (정5각형 12개 + 정6각형 2개로 구성 = $\mathbf{5^{12}6^2}$) 마주보는 두 개의 면은 6각형이고 나머지는 5각형 구조이다. 이 외에도 메테인 하이드레이트에는 $\mathbf{5^{12}6^4}$나 $\mathbf{5^{12}6^8}$와 같이 더 큰 공간을 갖는 구조가 혼합된 형태로 존재한다. 그림 4는 다양한 조건에서 가스 하이드레이트가 만들어지는 가상의 상평형 그림이다.



[그림 4] 가스 하이드레이트의 상평형

[2-1] 그림 1의 마이셀은 물속에서 자발적으로 생성되는 반면, 그림 2의 분자캡슐은 물에서는 만들어지기 어려우며 극성이 낮은 유기용매에서는 잘 만들어진다. 이러한 점을 고려하여 그림 1, 2, 3에서 제시된 각 자기조립체의 형성 과정에서 작용하는 주된 분자 간의 힘을 기술하고, 분자 간의 힘에 영향을 줄 수 있는 외부 요인을 설명하시오. [8점]

[2-2] 메테인 하이드레이트에서 메테인 가스를 얻을 수 있는 방법과 그 이유를 4가지 이상 제안하고, 메테인 하이드레이트로부터 메테인 가스를 얻을 때 발생되는 문제점을 기술하시오. [8점]

[2-3] 다음은 메테인 하이드레이트 결정이 만들어지는 가상의 평형 반응식이다.

$$CH_4\,(g) + 6H_2O\,(l) \rightleftharpoons (CH_4)(H_2O)_6(s)$$

위 반응평형을 통해서 형성된 다량의 메테인 하이드레이트가 수심 1000 m의 해저에서 발견되었다. 발견된 메테인 하이드레이트 1 L를 채취하여 0 °C, 1 atm에서 분해했을 때, 168 L의 메테인 가스를 얻었다. 그림 4의 조건과 채취된 메테인 하이드레이트의 밀도를 참조하여 수심 1000 m 해저에서 메테인 하이드레이트가 안정적으로 존재할 수 있는 환경에 대해서 논하시오. (단, 메테인 가스는 주어진 조건에서 이상기체이며, H, C, O의 원자량은 각각 1, 12, 16 이다. 그리고 수심 1000 m에서 바닷물의 밀도는 1.028 g/mL이며, 압력은 100 atm이라고 가정하자. 기체상수 R = 0.082 atm·L/mol·K) [8점]

[2-4] 가스 하이드레이트의 응용 분야 중의 하나로 해수 담수화와 관련된 연구가 진행되고 있다. 그림 4에서 제시된 상평형을 이용하여 12 °C의 해수를 담수화하기 위한 가장 효율적인 조건과 담수화 과정을 설명하시오. 제안한 조건에서 담수화가 가장 효과적으로 이루어질 수 있는 이유를 제시문 (다)를 참고하여 설명하시오. (단, 담수화 과정에서 온도는 일정하다고 가정하자.) [8점]

[2-5] 물질이 용해되는 과정은 분자 간의 상호작용으로 해석할 수 있다. 즉, 용질분자 간의 인력과 용매분자 간의 인력의 합에 비해 용매분자와 용질분자 간의 인력이 클 경우, 그 물질은 더 잘 용해될 수 있다. 메테인 가스의 경우 물에 대한 용해도는 매우 낮지만, 메테인 가스와 물을 혼합한 상태에서 일정 이상의 압력을 가했을 때 자발적으로 메테인 하이드레이트를 생성하게 된다. 이러한 과정을 엔탈피(ΔH)와 엔트로피(ΔS) 및 자유에너지(ΔG)의 변화와 연관시켜 설명하시오. 그리고 바닷물에서 메테인 하이드레이트를 만들기 위해서는 동일한 압력에서 순수한 물을 이용할 때보다 더 낮은 온도가 필요한 이유에 대해서 설명하시오. (단, $\Delta G = \Delta H - T \cdot \Delta S$) [8점]

2014학년도 연세대학교 수시모집 논술시험 문제(수학, 생명과학)

모집단위		수험번호		성 명	

[문제1] 다음 제시문을 읽고 아래 질문에 답하시오.

17세기에 라이프니츠는 두 양 사이의 대응 관계를 명확히 하고자 함수의 개념을 처음 도입하였다. 그 이후 많은 변화를 거쳐 함수의 개념은 일반화 되었으며 다양한 대응관계를 표현하는 도구로 활용되고 있다. 현대에는 함수를 수가 아닌 대상에도 적용하여 사용하고 있다.

(가) 실수 전체의 집합을 R라 하고, 집합 $U=\{f\,|\,f:R\rightarrow R\}$라 하자. 즉, 집합 U는 집합 R에서 집합 R로 가는 모든 함수의 모임이다. 전체 집합 U의 두 부분집합 A, B를

$$A=\{f\mid f\in U,\ f(x)=ax+b,\ a,b\in R\},$$
$$B=\{f\,|\,f\in U,\ f(x)=ax^2+bx+c,\ a,b,c\in R,\ a>0\}$$

라 하자.

(나) 함수 $f\in U$ 대하여 $mx-f(x)$가 최댓값을 가지면 그 값을 $F(m)$이라 하자.

(다) 두 실수 a, b에 대하여 $\mathrm{Max}(a,b)=\begin{cases} a & (a\geq b) \\ b & (a<b) \end{cases}$ 이다.

※ 다음 모든 문제에서 사용되는 f와 F는 제시문 (나)에서 주어진 관계를 만족한다.

[1-1] 함수 $f(x)=x^2$에 대하여 곡선 $y=f(x)$에 접하고 기울기가 m인 접선을 l이라 할 때, 직선 l의 y절편이 $-F(m)$임을 설명하시오. [10점]

[1-2] (1) 함수 $f(x)=ax^2+bx+c$가 집합 B의 원소일 때, 모든 실수 m에 대하여 $F(m)=pm^2+qm+r$로 나타낼 수 있으므로 함수 $F(x)$도 집합 B의 원소임을 설명하시오. [10점]

(2) 문제 (1)의 두 함수 f와 F에 대하여 f에 F를 대응시키는 함수 $T:B\rightarrow B$를 생각할 수 있다. 함수 T에 대하여 $f_k=(\underbrace{T\circ\ T\circ\cdots\circ\ T}_{k\text{개}})(f)$ $(k=1,2,3,\cdots)$으로 정의하자. 집합 B의 원소 $f(x)=ax^2+bx+c$에 대하여 $\displaystyle\lim_{n\rightarrow\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{n}f_k\left(\frac{k}{2n}\right)$의 수렴 여부를 논하고, 수렴하면 그 극한값을 a, b, c에 대한 식으로 나타내시오. [10점]

[1-3] (1) 함수 $f(x)=\mathrm{Max}(ax+b, cx+d)$ (단, $a<c$)에 대하여 $F(m)$이 존재하는 m의 범위를 찾고, $F(m)$을 a, b, c, d와 m에 대한 식으로 나타내시오. [10점]

(2) 함수 $f(x)=\mathrm{Max}\left(\frac{a+b}{2}x-\frac{ab}{2}, \frac{1}{2}x^2\right)$ (단, $a<b$)라 하자. 모든 실수 m에 대하여 $F(m)$이 존재함을 보이고, $F(m)$을 a, b와 m에 대한 식으로 나타내시오. [10점]

(3) 집합 U의 원소 f에 대응하는 F가 집합 U의 원소라면 $T(f)=F$라 하고, 이 과정을 k번 반복할 수 있는 경우 $f_k=(\underbrace{T\circ\ T\circ\cdots\circ\ T}_{k\text{개}})(f)$ $(k=1,2,3,\cdots)$으로 정의하자. 함수 $f(x)=\mathrm{Max}\left(6x-10, \frac{1}{2}x^2\right)$에 대하여 무한급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^n}f_n(3^n)$의 수렴 여부를 논하고, 수렴하면 그 값을 구하시오. [10점]

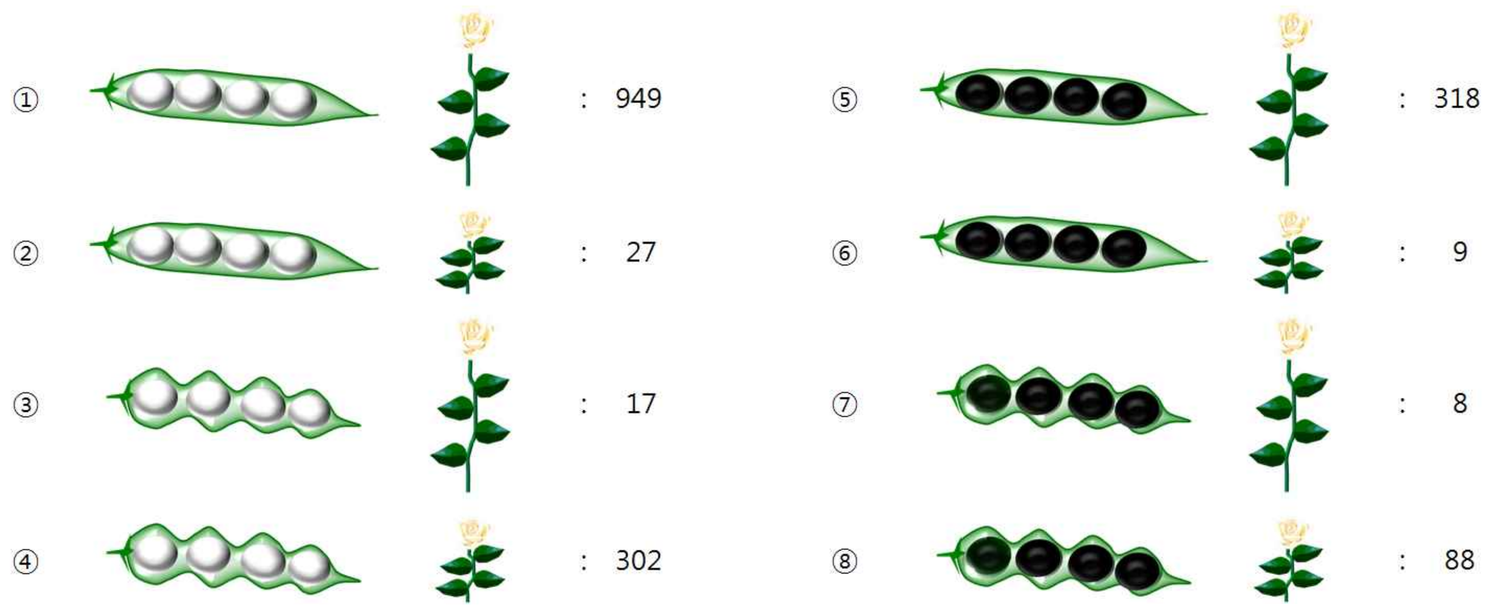
[문제2] 다음 제시문을 읽고 아래 질문에 답하시오.

(가) 17세기 무렵에 일어난 이른바 '과학혁명'이라고 부르는 세계관의 급격한 변화로 생명 현상에 대한 연구에서도 근대 과학의 특징들이 산발적으로 나타나기 시작했다. 대표적인 예로 하비는 실험을 통하여 혈액이 순환함을 증명하였고, 후크와 레벤후크는 각각 직접 제작한 현미경으로 세포와 미생물을 최초로 관찰하였다. 그러나 이런 연구들은 바로 체계를 갖춘 학문으로까지 성장하지는 못했고, 19세기에 들어서야 비로소 근대 과학으로 발전하기 시작했다. 사실, 'Biology'라는 단어 자체도 1802년에 독일의 트레비라누스가 처음 제안하였고 같은 해 라마르크가 과학 용어로 도입한 것이다. 근대 과학으로서의 생물학은 다윈과 멘델에 의해서 완성되었다고 해도 과언이 아니다. ㉠당시에는 깨닫지 못했지만, 이들의 발견은 20세기에 접어들어 시작된 생물학의 급속한 발전의 기초가 되었다.

(나) 다음은 크릭이 노벨상 수상(1962년) 후에 했던 초청 강연 내용의 일부이다.
"대체로 핵산의 조립 계획은 매우 단순합니다. 핵산은 교대로 나타나는 인산과 당의 그룹으로 이루어진 매우 긴 기본 골격을 갖는데, 그 골격은 '인산-당-인산-당-인산-당'으로 된 단위들로 진행됩니다. 각각의 당 그룹에는 네 종류의 다른 분자가 부착되는데, 편의상 A, a, B, b 라고 부르겠습니다. 우리는 이들 네 알파벳이 정확한 서열로 유전정보를 판독한다고 믿고 있습니다. 사실상, 거의 모든 세포에서 핵산은 서로 감싸면서 연결되어 상보적인 한 쌍의 사슬이 됩니다. 다시 말해, 하나의 사슬에 큰 잔기가 있으면 그 상대 사슬에는 작은 잔기가 있다는 얘기입니다. 그리고 A는 오직 a와 그리고 B는 오직 b와 결합합니다. ㉡이 구조의 가장 큰 장점은 복제 과정이 단순하다는 것입니다. 게다가, 이 과정은 매우 정밀한 것처럼 보입니다. 아마도 복제 과정에서 효소에 의해 만들어진 실수들을 바로잡는 기능이 있는 것처럼 보입니다."

(다) 사람의 체세포에 들어 있는 염색체는 모두 46개로 이 중 22쌍이 상염색체이고, 1쌍은 XX 또는 XY인 성염색체이다. 유성생식을 하는 생물은 암수 생식세포가 결합하여 자손을 만든다. 따라서 사람의 정자와 난자가 체세포와 같은 수의 염색체를 가지고 수정을 한다면 자손의 염색체 수는 부모의 두 배가 될 것이다. 그러나 감수 분열로 형성된 생식세포의 염색체 수는 체세포의 절반이기 때문에 수정란의 염색체 수는 체세포와 같다. 또한 감수분열 과정에서 유전자 재조합이 일어나서 부모와 다른 형질의 자식이 태어날 수 있다. 요컨대 사람이 지니고 있는 46개의 염색체는 어머니와 아버지에게서 각각 23개씩 물려받은 것이다. 2000년, 사람의 염색체에 담겨있는 모든 유전정보를 규명하는 '인간유전체사업'의 공식적인 완결로 약 30억 뉴클레오티드 쌍에 달하는 인간 유전체 염기서열이 완전히 결정되었고, 사람의 세포에는 약 3만 개에 달하는 유전자가 있는 것으로 밝혀졌다. 각 세포에서는 모든 유전자가 발현되는 것이 아니라 환경이나 발생 과정에 따라 필요한 유전자들만 선택적으로 발현된다.

(라) 유전학자가 이배체인 콩의 세 가지 특징을 대상으로 교배 실험을 진행하였다. 키가 크고 매끈한 콩깍지에 검정 콩이 들어있는 순종과 키가 작고 주름진 콩깍지에 흰 콩이 들어있는 순종을 교배하여 잡종 콩을 얻었다. 이들은 모두 키가 크고 매끈한 콩깍지 안에 흰 콩이 들어 있었다. 이 잡종 콩으로 자가수분을 해서 얻은 총 1,718 개체 중에서 다음 그림과 같이 8가지의 서로 다른 표현형이 관찰되었다. ㉢이 결과는 멘델의 유전법칙에 의해 예상되는 빈도수와는 큰 차이를 보이는 것이었다.



[그림] 잡종 콩(F1)의 자가수분 결과. 각 표현형의 오른쪽 숫자는 관찰된 개체수임.

[2-1] 제시문 **(가)**에서 밑줄 친 ㉠의 주장을 논증하시오. [8점]

[2-2] 제시문 **(나)**의 밑줄 친 ㉡에서 말하는 물질의 전체 복제 과정을 구체적으로 설명하고, 이것의 생물학적 중요성을 제시문 **(다)**, **(라)**의 내용에 근거하여 설명하시오. [8점]

[2-3] 제시문 **(라)**의 밑줄 친 ㉢에 나타난 현상의 원인을 제시문 **(다)**에 언급된 생식세포 형성 과정과 염색체의 개념을 적용하여 설명하시오. [8점]

[2-4] 제시문 **(라)**의 유전학자는 같은 콩의 수백 개 특징을 대상으로 유사한 교배 실험을 수행하였다. 이전 실험 결과와 마찬가지로 여러 가지 특징들이 멘델의 유전법칙에 의해 예상되는 것과는 다른 유전 양상을 보였으며, 이러한 특징들을 총 6개의 그룹으로 나눌 수 있었다. 이것의 의미를 제시문 **(나)**, **(다)**의 내용을 참고하여 설명하시오. 또한, 이를 바탕으로 이 식물의 잎에서 세포분열 중기의 세포에 존재하는 이중나선 DNA의 개수를 유추하시오. [8점]

[2-5] 이 콩을 대상으로 계속 연구를 하던 중 '유전자 A'의 기능이 상실된 식물은 제대로 자라지 못하고 잎이나 가지 등을 잘 만들지 못한다는 사실을 발견하였다. 이에 반해, '유전자 B'의 기능이 상실된 식물은 잎의 모양에는 이상을 보이지만 생장은 거의 정상이었다. 흥미롭게도 유전자 A와 B의 기능이 모두 상실된 식물은, 유전자 B의 기능만 상실된 식물과 매우 유사하게 생장하였다. 제시문 **(다)**를 참고하여, 유전자 A와 유전자 B가 어떤 관계를 가지고 식물의 생장을 조절하는지 추론하시오. [8점]

2014학년도 연세대학교 수시모집 논술시험 문제(수학, 지구과학)

모집단위		수험번호		성명	

[문제1] 다음 제시문을 읽고 아래 질문에 답하시오.

17세기에 라이프니츠는 두 양 사이의 대응 관계를 명확히 하고자 함수의 개념을 처음 도입하였다. 그 이후 많은 변화를 거쳐 함수의 개념은 일반화 되었으며 다양한 대응관계를 표현하는 도구로 활용되고 있다. 현대에는 함수를 수가 아닌 대상에도 적용하여 사용하고 있다.

(가) 실수 전체의 집합을 R라 하고, 집합 $U=\{f \mid f:R\to R\}$라 하자. 즉, 집합 U는 집합 R에서 집합 R로 가는 모든 함수의 모임이다. 전체 집합 U의 두 부분집합 A, B를

$$A=\{f \mid f\in U,\ f(x)=ax+b,\ a,b\in R\},$$
$$B=\{f \mid f\in U,\ f(x)=ax^2+bx+c,\ a,b,c\in R,\ a>0\}$$

라 하자.

(나) 함수 $f\in U$ 대하여 $mx-f(x)$가 최댓값을 가지면 그 값을 $F(m)$이라 하자.

(다) 두 실수 a,b에 대하여 $\mathrm{Max}(a,b)=\begin{cases} a & (a\ge b) \\ b & (a<b) \end{cases}$ 이다.

※ 다음 모든 문제에서 사용되는 f와 F는 제시문 (나)에서 주어진 관계를 만족한다.

[1-1] 함수 $f(x)=x^2$에 대하여 곡선 $y=f(x)$에 접하고 기울기가 m인 접선을 l이라 할 때, 직선 l의 y절편이 $-F(m)$임을 설명하시오. [10점]

[1-2] (1) 함수 $f(x)=ax^2+bx+c$가 집합 B의 원소일 때, 모든 실수 m에 대하여 $F(m)=pm^2+qm+r$로 나타낼 수 있으므로 함수 $F(x)$도 집합 B의 원소임을 설명하시오. [10점]

(2) 문제 (1)의 두 함수 f와 F에 대하여 f에 F를 대응시키는 함수 $T:B\to B$를 생각할 수 있다. 함수 T에 대하여 $f_k=(\underbrace{T\circ T\circ\cdots\circ T}_{k\text{개}})(f)$ $(k=1,2,3,\cdots)$으로 정의하자. 집합 B의 원소 $f(x)=ax^2+bx+c$에 대하여 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{n}f_k\left(\frac{k}{2n}\right)$의 수렴 여부를 논하고, 수렴하면 그 극한값을 a,b,c에 대한 식으로 나타내시오. [10점]

[1-3] (1) 함수 $f(x)=\mathrm{Max}(ax+b,cx+d)$ (단, $a<c$)에 대하여 $F(m)$이 존재하는 m의 범위를 찾고, $F(m)$을 a,b,c,d와 m에 대한 식으로 나타내시오. [10점]

(2) 함수 $f(x)=\mathrm{Max}\left(\frac{a+b}{2}x-\frac{ab}{2},\frac{1}{2}x^2\right)$ (단, $a<b$)라 하자. 모든 실수 m에 대하여 $F(m)$이 존재함을 보이고, $F(m)$을 a,b와 m에 대한 식으로 나타내시오. [10점]

(3) 집합 U의 원소 f에 대응하는 F가 집합 U의 원소라면 $T(f)=F$라 하고, 이 과정을 k번 반복할 수 있는 경우 $f_k=(\underbrace{T\circ T\circ\cdots\circ T}_{k\text{개}})(f)$ $(k=1,2,3,\cdots)$으로 정의하자. 함수 $f(x)=\mathrm{Max}\left(6x-10,\frac{1}{2}x^2\right)$에 대하여 무한급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^n}f_n(3^n)$의 수렴 여부를 논하고, 수렴하면 그 값을 구하시오. [10점]

[문제2] 다음 제시문을 읽고 아래 질문에 답하시오.

(가) 수많은 별들이 모여 있는 집합체를 은하라고 한다. 태양이 속해 있는 은하를 우리은하라고 부르며, 우리은하 밖에는 우리은하처럼 수많은 별이 밀집한 은하들이 무수히 많이 있는데, 이러한 은하를 외부 은하라고 한다. 제2의 지구를 탐사하기 위하여, 지구에서 망원경을 사용하여 외부 은하들과 별들을 관측하였다. 외부 은하들의 스펙트럼을 조사해 보니, 관측한 파장이 좀 더 긴 쪽으로 치우쳐 관찰되는 적색편이 현상이 [표 1]과 같이 나타났다. 우주의 어느 곳에서 관측해도 똑같이 나타나는 적색편이 현상은 외부 은하들의 상대속도와 관련되어 있다.

[표 1] 외부 은하들의 자료

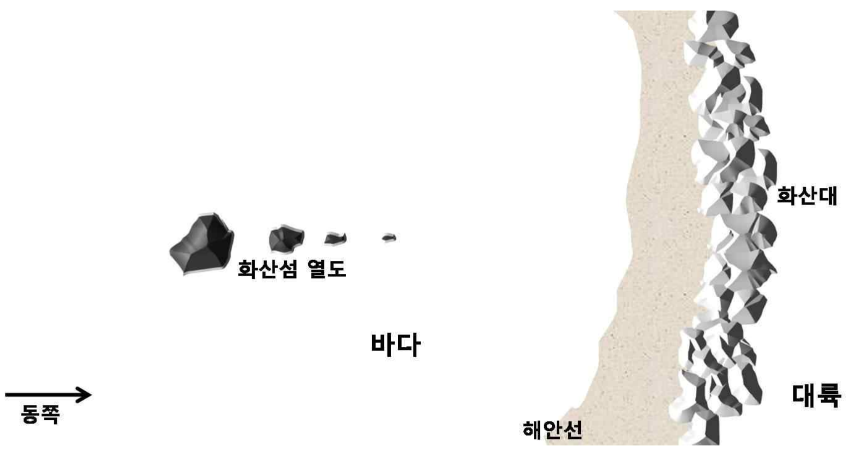
은하 번호	은하까지의 거리(Mpc)	적색편이 양(z)
1	422	0.10
2	1055	0.25
3	2110	0.50
4	4220	1.00

(나) 관측한 별들 중에서 A라는 별을 선택하여 순식간에 이동할 수 있는 우주선을 보냈다. 우주선이 A별 근처에 도달하여 보니 그 별 주위로 여러 개의 행성들이 궤도 운동을 하고 있었다. 이미 우리는 케플러의 업적을 통해 태양계에서의 행성 운동(공전)에 관한 법칙들을 알고 있다. 조화의 법칙(케플러 제3법칙)은 행성의 공전주기와 태양과 행성 사이의 거리와의 관계를 알려준다. 이 조화의 법칙에서 사용되는 비례상수(k)는 $k=4\pi^2/\mu$ 이고, 여기서 μ 는 $\mathrm{km}^3/\mathrm{sec}^2$ 의 단위를 갖는 천체의 질량에 관련된 비례상수이다. 케플러의 법칙들은 중력으로 묶여있는 모든 천체에 적용할 수 있으며, 뉴턴이 만유인력의 법칙을 정리하는 기초가 되었다. 케플러의 법칙들과 뉴턴의 운동 법칙을 조합하면, 원 궤도에서의 공전 속도 v 와 공전 궤도 반지름 a 는 $v^2=\mu/a$ 의 관계를 갖는다.

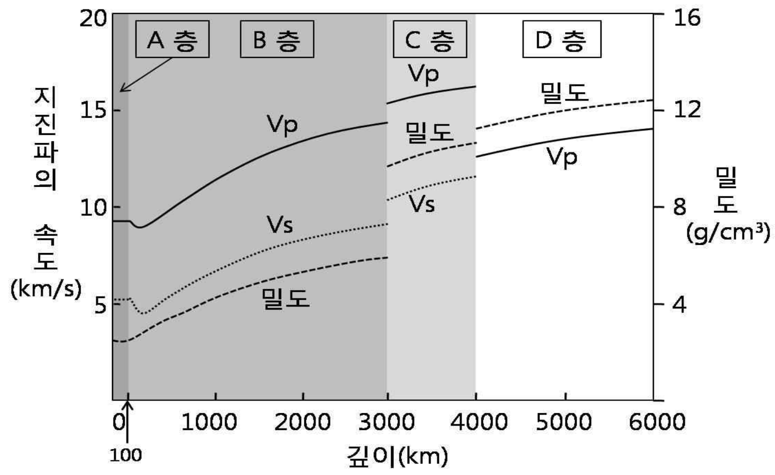
(다) A별의 행성들을 조사한 우주선은 B라는 행성을 선택하여 날아갔다. 우주선은 B행성 주위의 원 궤도에 머무르면서, B행성이 지구와는 반대로 동쪽에서 서쪽으로 자전하고 있다는 것을 알아냈다. 우주선에서 나온 두 척의 탐사선이 B행성의 대기를 통과하여 각각 대륙과 해양을 탐사하기 시작하였다. 탐사선들은 B행성의 대기를 통과하여 내려오면서 대류층을 발견하였으며, 지표 근처에서 고기압성 경도풍을 겪으면서 남반구에 착륙하였다. 해양 탐사선은 B행성의 바다가 지구의 바다와 마찬가지로 물로 이루어진 것을 확인하였고, B행성의 바다에 진입하여 해수의 흐름을 관측했다.

(라) 대륙 탐사선의 관찰로부터 B행성의 대륙에는 성층형 화산대가 해안선과 평행하게 발달해 있으며, 인접한 바다에는 순상형 화산섬 열도가 동서 방향으로 [그림 1]과 같이 형성되어 있는 것을 확인하였다. 탐사선에서 나온 로봇이 대륙의 화산대를 따라 채취한 안산암질 암석으로부터 방사성 동위원소의 양을 측정했을 때, 모원소에 대한 자원소의 비율이 일정하게 관찰되었다. 또한 화산섬 열도의 현무암질 암석에서 방사성 동위원소의 양을 측정했을 때에는 동쪽의 암석으로 갈수록 모원소에 대한 자원소의 비율이 점진적으로 증가함을 확인하였다.

(마) 로봇은 지표의 다양한 위치에서 지진파를 관측하여 [그림 2]와 같이 깊이에 따른 지진파 속도와 밀도의 변화 곡선을 구하였다. 이때 지진파 중 P-파의 속도(Vp)는 매질의 부피와 모양의 변화에 의해 바뀌고, S-파의 속도(Vs)는 매질의 모양 변화에 의해 바뀐다고 하자. 또한 로봇은 깊이에 따른 온도 변화가 지구와 비슷하다는 것을 알아냈다.



[그림 1] B행성의 지표 환경



[그림 2] B행성 내부의 지진파 속도 및 밀도 변화

[2-1] 제시문 (가)를 참고하여, 외부 은하들의 거리와 속도에는 어떠한 관계가 있는지 정량적으로 기술하고 그 의미를 설명하시오. 이를 바탕으로 우주의 나이와 크기를 추정하시오. 단, 빛의 속도는 $c \approx 3\times10^5\ \mathrm{km/sec}$ 이고, $1\mathrm{pc}$(파섹)$\approx 3.086\times10^{13}\ \mathrm{km}$ 이다. [8점]

[2-2] 제시문 (나)를 참고하여, 우주선이 B행성 주위에서 p초(sec)의 공전주기를 가진 원 궤도를 돌도록 하기 위해서는 B행성의 중심과 우주선 사이의 거리가 얼마나 되어야 하는지 서술하시오. 그리고 그 원 궤도로 돌기 위한 초기 속도의 크기를 설명하고, 그 방향에 대해서 만유인력과 연관하여 논하시오. [8점]

[2-3] 제시문 (다)에서 해양 탐사선이 겪었던 경도풍과 해수의 흐름에 대한 원리를 각각 설명하고 그 공통점을 논하시오. [8점]

[2-4] 제시문 (라)를 참고하여, [그림 1]에서 관찰된 다양한 화산의 형성 과정에 대하여 설명하고, 해양 탐사선이 발견하게 될 해저 지각 구조의 특징을 추정하시오. [8점]

[2-5] 제시문 (마)를 참고하여, [그림 2]의 지진파 속도 및 밀도 변화의 특징을 설명하고, B행성의 내부 층상 구조에 대하여 논하시오. 이러한 층상 구조가 B행성의 대기와 해양의 형성, 그리고 지각의 지질 현상과 어떠한 관계가 있을지 추론하시오. [8점]