(2) 출제의도, 제시문 설명, 문항분석 (Type I 1번 문제)

가. 출제의도

고등학교 자연계학생들이 학습하는 미분과 적분의 기본 원리와 그 개념을 이해하고 있는지, 이를 응용하여 다른 조건에서도 같은 원리와 개념을 적용할 수 있는지, 또한 학생 개인 스스로가 이 원리와 개념을 적용될 수 있는 다른 방법을 논리적이고 창의적인 사고력을 통하여 찾아낼 수 있는 지를 묻는 문제이다.

나. 제시문 설명 및 문항분석

가) 고등학교 교과서에서 학습하는 곡선의 길이를 정적분의 정의를 이용하여 유도하는 문제이다. 정적분의 정의를 정확히 이해하고 있고, 이를 곡선의 길이를 구하는 문제에 적용할 수 있는지를 묻고있다.

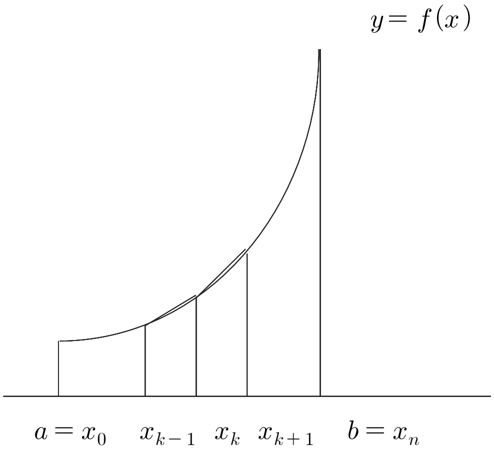
나) (1)에서의 방법과 달리 한 점에서의 접선을 구하고 이 접선이 구간의 분할과 교차하는 두 점 사이의 거리의 합을 구하는 문제이다. 이는 (1)에서 사용한 방법을 그대로 적용하여 새로운 길이의 합을 정적분의 형태로 구해보는 문제이다.

다) (1) 과 (2)의 결과는 같아야한다. 비록 (1)과 (2)가 다른 선분의 길이의 합을 구하였지만, 극한을 이용하여 정적분의 정의대로 나타낸 결과는 같다는 것이다. 다시 말하면, 이는 곡선의 길이는 교과서에서 말하고 있는 유한선분의 길이의 합을 극한으로 계산하는 정의와 이에 대응하는 다른 선분의 길이를 같은 방법으로 계산하여도 곡선의 길이를 얻을 수 있다는 것을 알려준다.

라) (1)에서는 곡선 사이의 선분의 길이의 합의 극한값, (2)에서는 접선의 길이의 합의 극한값이 같은 곡선의 길이가 되었으므로, 이 두 가지와는 다른 방법을 찾아내는 문제이다. 여러 가지 답이 나올 수 있지만, (1)과 (2)의 혼합, 또는 각 소구간 하나에 대응하는 접선의 길이의 합의 극한등 여러 가지 방법이 있을 수 있다.

다. 평가기준 및 예시답안

[문제 1-1]



[그림 1]

폐구간 $[a,b]$를 n개의 균등한 소구간으로 나누고, 각 소구간을 $[a=x_0, x_1]$ $\cdots$ $[x_{k-1}, x_k]$ $\cdots$ $[x_{n-1}, x_n=b]$ 이라하자. 그리고 $x_k - x_{k-1} = \triangle x = \dfrac{b-a}{n}$ 이다. 이때, 점$(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ 과 $(x_k, f(x_k))$ 사이의 선분의 길이는 $\sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}$인데 $f(x)$ 가 미분가능한 함수이므로 평균값 정리에 의하여

$f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(\xi)(x_k - x_{k-1})$를 만족하는 ξ 가 x_{k-1}과 x_k 사이에 존재한다.

따라서 위의 선분의 길이는$\sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (x_k - x_{k-1})^2 [f'(\xi)]^2}$ 이 되므로 각 구간에서 구한 이러한 선분의 총합은 $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+[f'(\xi)]^2}\,(x_k - x_{k-1})$ 이 되어 구하는 곡선의 길이는

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+[f'(\xi)]^2}\,\triangle x = \int_a^b \sqrt{1+[f']^2}\,dx$$ 이다.

[문제 1-2]

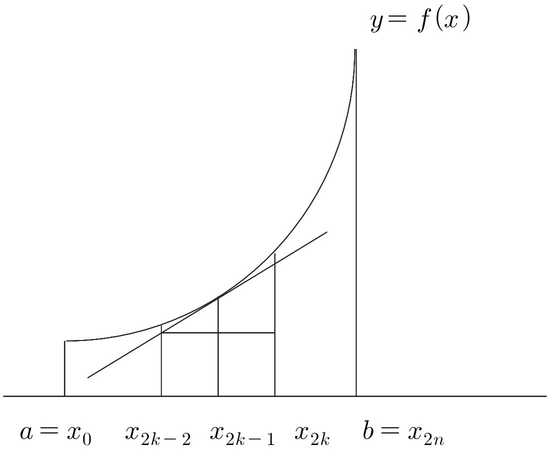
폐구간 $[a,b]$를 $2n$개의 균등한 소구간으로 나누고, 각 소구간을 $[a=x_0, x_1]$ $\cdots$ $[x_{2k-2}, x_{2k-1}], [x_{2k-1}, x_{2k}]$ $\cdots$ $[x_{2n-1}, x_{2n}=b]$ 라 하자. 그러면 $x_{2k} - x_{2k-1} = \triangle x = \dfrac{b-a}{2n}$ 이다. 또한 점$(x_{2k-1}, f(x_{2k-1}))$에서의 접선의 식을 $y=g_k(x)$라 하면, $g_k(x) = f(x_{2k-1}) + f'(x_{2k-1})(x - x_{2k-1})$ 이다.

$\triangle g_{2k}=[f(x_{2k-1})+f'(x_{2k-1})(x_{2k}-x_{2k-1})]-[f(x_{2k-1})+f'(x_{2k-1})(x_{2k-2}-x_{2k-1})]$ 라 놓고 $\triangle x_{2k}= x_{2k}-x_{2k-2}$ 라 하면, 이 접선위의 두 점$(x_{2k-2}, g_k(x_{2k-2}))$와 $(x_{2k}, g_k(x_{2k}))$ 사이의 거리 l_k는

$l_k= \sqrt{[\triangle g_{2k}]^2+[\triangle x_{2k}]^2}= \sqrt{1+[f'(x_{2k-1})]^2}\,\triangle x_{2k}$가 된다.

따라서, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} l_k$의 값은

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} l_k= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+[f'(x_{2k-1})]^2}\,\triangle x_{2k}= \int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$ 이다.



[그림 2]

[문제 1-3]

(1)과 (2)에서 유도한 바와 같이 두 값은 결국 같은 값을 가지게 된다.
다시 말하면, 이는 곡선의 길이는 교과서에서 말하고 있는 유한선분의 길이의 합을 극한으로 계산하는 정의와 이에 대응하는 다른 선분의 길이를 같은 방법으로 계산하여도 곡선의 길이를 얻을 수 있다는 것을 아는 사실이 중요하다.

(1)에서는 교과서에 나오는 것처럼 소구간에 대응하는 곡선 사이의 선분의 길이의 합의 극한값, (2)에서는 접선의 길이의 합의 극한값이 같은 곡선의 길이가 되었으므로, 이 두 가지와는 다른 선분의 길이이나 그 합의 극한은 위의 결론과 같게 되는 선분을 찾아내는 문제이다.

여러 가지 답이 나올 수 있지만, 다음의 각 경우가 있을 수 있다

가. 폐구간 $[a,b]$를 짝수개, 즉, $2rn$개의 균등한 소구간으로 나누고, 위의 방법을

적용하는 방법(r은 자연수)

나. 폐구간 $[a,b]$를 rn개의 균등한 소구간으로 나누고, 위의 방법을 적용하는 방법 (r은 자연수).

다. (1)과 (2)의 혼합, 즉 교대로 선분의 길이를 사용하는 방법

라. 각 소구간 하나에 대응하는 접선의 길이의 합(즉, 위의 (2)에 사용한 선분의 길이의 반)을 사용하는 방법

(3) 출제의도 및 답안 분석 (Type II 1번 문제)

가. 출제의도

가) 제시문은 고등학교 수학 I,II 교과과정에서 배운 수열과 수열의 극한에 관한 기본적인 원리를 주어진 상황에 적합하게 적용하는 능력을 평가하려한다.

나) 제시문을 통해 이해력, 논리적 분석력, 사고의 유연성, 표현력을 평가하려한다.

나. 모범답안

[문제 1-1]

수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$라 하자. 관계식 ㉠의 양변에 극한을 취하면

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left[a_n + \beta a_n (K - a_n)\right] = \alpha + \beta\alpha(K-\alpha)$$

따라서 α는 다음 방정식의 근이 된다.

$$\alpha = \alpha + \beta\alpha(K-\alpha)$$

따라서 $\alpha = 0, K$가 된다.

[문제 1-2]

(a) 초기 개체수 a_0가 $K < a_0 < 2K$ 일 때

편의상 $a_0 = K+b, \quad 0 < b < K$ 로 표시하자. $\beta a_0 (K-a_0) < 0$ 임으로 관계식 ㉠에 의해 다음이 성립한다.

$$a_1 = a_0 + \beta a_0 (K - a_0) = K + b - \beta(K+b)b$$

$0 < \beta < \dfrac{1}{2K}$이고 $0 < b < K$임으로 다음 부등식이 성립한다.

$$0 < \beta(K+b) < 1, \qquad 0 < b - \beta(K+b)b < b$$

따라서 다음 부등식이 성립한다.

$$K < a_1 = K + b - \beta(K+b)b < a_0$$

(b) 초기 개체수 a_0가 $0 < a_0 < K$ 일 때

편의상 $a_0 = K - b, \quad 0 < b < K$ 로 표시하자. 관계식 ㉠에 의해

$$a_1 = a_0 + \beta a_0 (K - a_0) = K - b + \beta (K - b) b$$

$0 < \beta < \frac{1}{2K}$이고 $0 < b < K$임으로 다음 부등식이 성립한다.

$$0 < \beta (K - b) < 1, \quad -b < -b + \beta (K - b) b < 0$$

따라서 다음 부등식이 성립한다.

$$a_0 < a_1 = K - b + \beta (K - b) b < K$$

[문제 1-3] 다양한 답안이 가능하다.

[답안A]

(a) 초기 개체수 a_0가 $K < a_0 < 2K$ 일 때

답안 [1-2]에서 a_0 와 a_1간의 관계는 일반적으로 a_n 와 a_{n+1}에서도 성립함으로 다음 결론이 유도된다.

$$a_0 > a_1 > \cdots > a_n > a_{n+1} > \cdots > K$$

따라서 $a_n = K + b_n, \quad 0 < b_n < K$ 로 표시할 수 있다. 이때 수열 $\{b_n\}$은 다음 관계식을 만족한다.

$$K + b_{n+1} = a_{n+1} = a_n + \beta a_n (K - a_n) = K + b_n - \beta (K + b_n) b_n$$

즉,

$$Ⓐ \quad b_{n+1} = b_n - \beta (K + b_n) b_n$$

가정 $0 < \beta < \frac{1}{2K}$에 의해 $\frac{1}{2} < \beta (K + b_n) < 1$ 이 성립함으로, Ⓐ에 의해 수열 $\{b_n\}$은 다음 부등식을 만족한다.

$$Ⓑ \quad 0 < b_{n+1} < \frac{1}{2} b_n$$

따라서, $b_n < 2^{-n} b_0$이 되고 $\lim_{n \to \infty} b_n = 0$이 된다. 따라서 수열 $\{a_n\}$도 수렴한다. [문제 1-1]의 답안에 의해 극한값 α는 0또는 K가된다.

$a_n > K$ 임으로 $\alpha = K$ 이여야 한다.

(b) 초기 개체수 a_0가 $0 < a_0 < K$ 일 때도 같은 방식으로 증명한다.

[답안B]

(a) 초기 개체수 a_0가 $K < a_0 < 2K$ 일 때
답안 1-2에서 a_0 와 a_1간의 관계는 일반적으로 a_n 와 a_{n+1}에서도 성립함으로 다음 결론이 유도된다.

$$a_0 > a_1 > \cdots > a_n > a_{n+1} > \cdots > K$$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 감소수열이면서 하한을 가지고 있다. 따라서 수열의 극한은 존재함(상식적인 수준이나 대학수준의 논리임)으로 $\lim_{n \to \infty} a_n = \alpha$라 하자. [문제 1-1]의 답안에 의해 극한값 α는 0또는 K가된다.
$a_n > K$임으로 $\alpha = K$ 이여야 한다.

(b) $0 < a_0 < K$ 일 때, $a_0 < a_1 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots < K$
따라서 수열 $\{a_n\}$은 단조증가 또는 단조감소 수열이면서 하한과 하한을 가지고 있다.

(b) 초기 개체 수 a_0가 $0 < a_0 < K$ 일 때도 같은 방식으로 증명한다.

(4) 출제의도, 평가기준 및 답안 분석 (2번 문제)

가. 출제의도

예로부터 긴 꼬리를 보이며 관찰되는 혜성은 역사적인 사건의 예시를 나타내거나, 불길한 징조로 여겨져 오곤 했다. 현대과학에서도 혜성은 '더러운 얼음 덩어리'라고 표현되기도 한다. 이는 혜성이 태양에서 멀리 떨어져 있다가 태양에 근접함에 따라 불순물이 가득한 얼음이 녹으며 분리된 먼지와 기체 이온들이 두 종류의 꼬리를 형성하는 것에 근거한다. 본 문제에서는 이러한 혜성의 먼지꼬리 형태에 대하여 만유인력과 복사압이 미치는 영향을 고려하여 분석하도록 하였다. 이를 통하여, 파동 및 힘과 운동에 대한 이해를 평가해 보고자 한다.

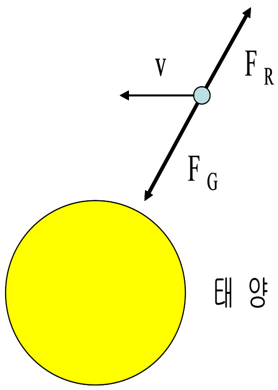
나. 평가기준 및 예시답안

[문제2-1] 태양은 1초당 P_S 의 복사에너지를 사방으로 방출한다. 이렇게 방출된 복사파가, 어떤 주어진 시간에 반지름이 r 인 가상의 구의 표면을 통과하고 있다고 하면, 에너지 보존에 의하여 1초당 구의 표면을 통과하는 모든 복사에너지의 합은 P_S 와 같아야 한다. 그러므로 $P_S = 4\pi r^2 I$. (여기서 I 는 반경 r 인 가상의 구 표면에서 단위면적/단위시간 당 복사에너지양이다.) 거리가 r 떨어진 면

지에 미치는 복사압의 세기는 I 에 비례하기 때문에 F_R 은 다음과 같이 거리의 제곱에 반비례한다.

$$F_R \propto I = \frac{P_S}{4\pi r^2}$$

[문제2-2] 혜성은 다양한 크기의 먼지들로 구성되어 있는데, 먼지의 반경이 a_0 일 때 태양과 먼지 사이의 만유인력 F_G와 복사압에 의한 밀치는 힘 F_R이 균형을 이룬다. 즉,



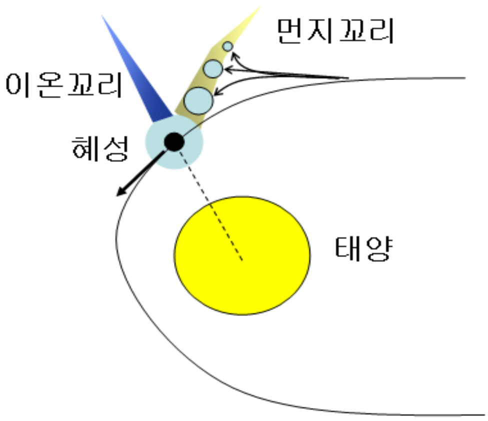
$$G\frac{M_S m}{r^2} = \frac{4\pi\rho G M_S a_0^3}{3r^2} = \frac{P_S \pi a_0^2}{4\pi c r^2}.$$

(왜냐하면, 먼지의 질량 $m = \frac{4\pi a^3}{3}\rho$, 단면적 $A = \pi a^2$이기 때문이다.)

그러므로 $a_0 = \frac{3P_S}{16\pi c\rho G M_S}$ 이면 먼지에 미치는 힘의 합은 0 이다.

만유인력 F_G는 a^3에 비례하고, 복사압에 의한 척력 F_R은 a^2에 비례한다. 그러므로 반경 $a > a_0$ 인 경우, 인력이 척력보다 강하다. 그러므로 먼지의 운동은 태양을 중심으로 타원 궤도 운동을 한다. 그러나 유한한 크기의 척력 때문에 혜성 핵의 궤도 보다는 바깥에 위치할 것이다. 반지름이 $a < a_0$인 경우, 척력이 인력보다 강해서 태양에서 밀쳐지는 운동이 우세하게 된다.

[문제2-3] (2) 에서 논한 먼지의 운동에 의하면, 먼지는 반지름에 따라 마치 빛의 스펙트럼처럼 먼지꼬리 내에 분포되며, 아래 그림과 같이 반지름이 큰 먼지는 혜성 핵에 가까운 거리에, 작은 먼지는 먼 거리에 위치한다.



(5) 출제의도, 제시문 설명, 문항분석 (3번 문제)

가. 출제의도

- 우리 인간이 가지고 있는 5가지 감각 중의 하나인 후각의 원리를 과학적으로 이해하는지 여부를 묻고자 하였음.
- 분자구조와 분자간 상호작용에 대한 미시적인 화학적 개념을 바탕으로 거시적인 생물학적 현상을 설명할 수 있는지 여부를 묻고자 하였음.
- 화학 및 생물학의 원리를 응용할 수 있는지 여부를 묻고자 하였음.

나. 제시문 설명

- (가)에서는 후각과 관련된 소설, ‘향수’에 대한 내용을 간단히 요약하여 소개함으로써 후각에 관심을 유도하고자 하였음.
- (나)에서는 기본적인 생물학적 용어들을 사용하여, 후각과 관련된 생물학적 사실들을 제시함으로써, 선행학습을 하지 않더라도 생물학적 용어에 대한 이해를 바탕으로 문제를 해결할 수 있도록 하였음.
- (다)에서는 분자의 구조-전기적인 측면과 분자간 상호작용에 대한 기본 개념을 기술하고, 단백질 분자와 같은 거대분자의 경우에 어떻게 적용될 수 있는지를 설명함으로써, 문제해결의 방향을 제시하였음.

다. 문항분석

[문제 3-1]

제시된 분자구조로부터 유기분자의 화학적 특성을 이해하고, 이를 바탕으로 각 유기분자와 거대 수용체 단백질 분자간의 상호작용의 차이를 인식할 수 있는지 여부를 묻고자 하였음. 또한 수용체 유전자 개수의 10배 이상의 향기를 인지할 수 있기 위해서는 ‘분자간 상호작용의 세기와 본질의 차이’의 측면과 더불어, 인간의 인지중추인 뇌와의 연결방법이 중요함을 인식하고 ‘조합메커니즘’의 원리를 도출할 수 있는지 여부를 묻고자 하였음. 제시문에 대한 이해와 화학-생물학적인 개념을 바탕으로 다음과 같은 사실(공통점과 차이점)을 논리적으로 유추할 수 있어야 함.

- 향기 유발 분자들은 대부분 휘발성이 강한 방향족 유기분자들임.
- 친수성인 극성 작용기 부분과 소수성인 탄화수소 부분으로 구성되어 있음.
- 탄소-탄소 이중결합 또는 벤젠고리 구조는 분자 모양을 일정하게 유지하는 역할을 함.
- 알데히드(CHO), 카보닐(CO), 하이드록시(OH) 등 극성 작용기들은 수용체의

특정 아미노산과 수소결합을 할 것으로 예상됨.

- 4개의 향기 유발 분자의 전체적인 분자 모양이 서로 다름: ①은 벤젠고리와 알데히드기가 컨쥬게이션이 된 납작한 구조; ②는 탄소-탄소 결합으로 인한 선형 구조; ③과 ④는 헥산고리와 옆가지 작용기에 의한 덜 납작한 구조.
- ③과 ④는 분자 모양은 같지만 광학이성질체로서 삼차원 배열이 서로 다름. 수용체 결합자리와 상호작용이 달라질 수 있음 -> 분자 모양이 동일하더라도 삼차원 배열이 다르면 수용체와의 상호작용의 세기와 본질이 달라질 수 있기 때문에 향기가 달라질 수 있음. <- 생물학적 측면과 비교하여 설명할 수 있음.
- 각각의 향기 유발 분자를 인지하는 수용체는 향기 유발 분자의 분자 모양과 삼차원 배열을 수용할 수 있는 결합자리 구조를 가질 것임.
- 수용체의 결합자리에는 각각의 향기 유발 분자의 극성작용기들(알데히드, 카보닐, 하이드록시)과 특이적인 수소결합을 할 수 있도록 특정 아미노산이 삼차원적으로 배열될 것임.
- 제시문 (나)의 내용으로부터 인간은 약 350 종류의 수용체를 가지고 있기 때문에, 각 수용체가 한 개의 향기 유발 분자와 상호작용한다면 350가지의 향기만을 인지할 것임.
- 하지만 각각의 수용체는 여러 종류의 향기 유발 분자와 상호작용할 수 있고, 동일한 수용체를 가지고 있는 감각뉴런은 동일한 뇌의 부분과 연결되어 있다는 사실을 지적; 따라서, 유사한 분자 구조(예: ③ 과 ④)를 가지고 있더라도 뇌의 서로 다른 부분에 연결되어 있는 여러 종류의 수용체 분자들과의 상호작용의 조합은 다를 수 있기 때문에, 향기를 다르게 인지할 수 있음. 즉 조합메커니즘(combinatorial mechanism)이 작용하고 있음.

[문제 3-2]

후각의 원리에 대한 이해를 바탕으로 기능이 최적화된 새로운 생체모방 디바이스를 제안하도록 함으로써, 자연현상의 원리를 응용할 수 있는지 여부를 묻고자 하였음.

- 인간의 후각시스템의 원리를 인식해야함: 향기 유발 분자와 수용체 분자간의 상호작용에 의해 시작; 결합 전후, 수용체 분자의 구조적 특성 변화; 수용체 분자의 특성변화는 전기적인 신경전달 과정에 영향을 줌; 인지중추인 뇌에서 ‘조합메커니즘’에 의한 신호분석.
- 전자코는 크게 세부분으로 나뉠 수 있음: 향기 유발 분자를 선택적으로 포집하는 부분(수용체 부분); 포집된 분자에 의해서 전기적인 특성의 변화를 유도하는 부분(수용체-신경전달 부분); 전기적인 병렬 신호를 측정하고 ‘조합메커니즘’에 의해 분석하는 부분(뇌).

- 수용체에 해당하는 부분은 수용체의 결합자리와 유사한 분자구조를 가지고 있고 구조-역학적으로 안정한 ‘분자인지 유기-무기 분자’를 활용한 인공수용체; 전기적의 특성의 변화를 유도하는 부분은 분자의 결합 전후에 전기적인 특성이 변화되는 ‘전도성 고분자’ ‘금속산화물 반도체’; 뇌에 해당하는 부분은 전류 또는 저항을 측정할 수 있는 장치가 부착되어 있고 병렬 신호처리를 수행할 수 있는 컴퓨터.
- 종합하면, 고감도의 고분자(반도체) 선(wire)을 제작한 후, 선 표면에 많은 개수의 동일한 인공수용체를 부착함; 가능한 많은 수의 인공수용체 선을 활용하되, 인공수용체 종류별로 전기적인 특성을 측정할 수 있도록 공간적으로 배열함; 병렬로 들어오는 전기적인 신호의 조합을 분석.
- 참고로 인공수용체는 향기 유발 분자와의 결합력이 강해야 함과 동시에, 연속적인 사용을 위해서 필요시 쉽게 분해될 수 있어야 함.

라. 평가기준

[문제 3-1]

A: 전반적인 문항분석의 내용을 체계적으로 기술한 경우
- 향기 유발 분자의 구조-전기적 특성을 기술(특히 ③과 ④의 차이점을 설명)

- 수용체 결합자리의 구조적인 특성을 기술(특히 수소결합을 위한 아미노산의 배열을 설명)
- 후각 감각의 메커니즘은 조합메커니즘임을 기술

B: 전반적인 문항분석의 내용을 기술했지만 체계적이지 못한 경우, 또는 A의 괄호안의 내용 등 상세한 설명을 하지 못한 경우

C: A의 3개 항목 중에서 2개를 기술한 경우, 또는 B에 비해 문제에 대한 이해도가 떨어지는 경우

D: A의 3개 항목 중에서 1개를 기술한 경우, 또는 C에 비해 문제에 대한 이해도가 떨어지는 경우

[문제 3-2]

A: 전반적인 문항분석의 내용을 체계적으로 기술한 경우
- 인간의 후각시스템의 핵심 원리를 기술

- 인공수용체, 고분자(반도체) 선, 컴퓨터 등을 이용한 전자코의 구성을 설명
- 전기적인 병렬신호의 조합을 분석해야함을 지적

B: 전반적인 문항분석의 내용을 기술했지만 체계적이지 못한 경우, 또는 A의 내용 중에서 2개를 상세하게 기술한 경우

C: A의 3개 항목 중에서 1개를 상세하게 기술한 경우, 또는 B에 비해 문제에 대한 이해도가 떨어지는 경우

D: C에 비해 문제에 대한 이해도가 떨어지는 경우

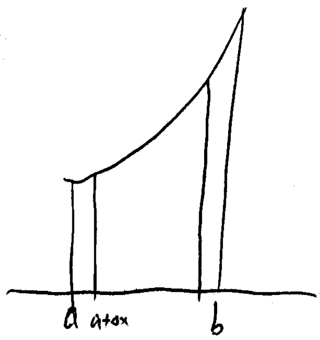
(6) 답안 사례 및 평가

가. Type I 1번 답안

▶ 전체문항 답안 사례 1

[1-1] 답

정적분의 정의에 따르면, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f(\overline{x_k})\cdot \Delta x = \int_a^b f(x)dx$ (단, $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, $\overline{x_k}$는 $a+k\Delta x$와 $a+(k+1)\Delta x$사이의 임의의 수)가 된다.



이제 곡선의 길이를 구해보면, $[a,b]$를 일단 n등분을 하자.
잘게 잘랐을 때 곡선의 길이는 직선의 길이와 같게 되므로 곡선의 길이를 l이라고 했을 때,

$$l = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{(\Delta x)^2 + (f(x_{k+1}) - f(x_k))^2}$$ (단, $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, $x_k = a + k\Delta x$)(이유는 피타고라스의 정리에 의해서)

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+(\frac{f(x_{k+1})-f(x_k)}{\Delta x})^2}\,\Delta x$$

평균값정리에 의해 $x_k < \overline{x_k} < x_{k+1}$ 인 $\overline{x_k}$가 존재해서

$f'(\overline{x_k}) = \dfrac{f(x_{k+1})-f(x_k)}{\Delta x}$가 된다.

$$\therefore \quad l = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{1+(f'(\overline{x_k}))^2}\Delta x \quad (\Delta x = \frac{b-a}{n},\ x_k < \overline{x_k} < x_{k+1})$$

$$= \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx \qquad \text{(by정적분의 정의)}$$

[1-2] 답

$y = g_k(x) = f'(x_{2k-1})(x - x_{2k-1}) + f(x_{2k-1})$이 된다.

l_k는 피타고라스 정리에 의해 $\sqrt{(x_{2k}-x_{2k-2})^2+(f'(x_{2k-1})(x_{2x}-x_{2k-2}))^2}$이 된다

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} l_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(x_{2k}-x_{2k-2})\sqrt{1+(f'(x_{2k-1}))^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \Delta x\sqrt{1+(f'(x_{2k-1}))^2} \ (\Delta x = \frac{b-a}{n},\ x_{2k-2} < x_{2k-1} < x_{2k})$$

$$= \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}dx \qquad \text{(by정적분의 정의)}$$

[1-3] 답

$[1-1][1-2]$에서 유도된 방법은 다르지만, 그 계산값은 같게 된다.
좀 더 일반적으로 $[a,b]$를 $2mn$등분을 한 뒤 점$(x_{2mk-1}, f(x_{2mk-1}))$에서 접선의 식을 $g_k(x)$, 접선 위의 점$(x_{2mk-m-1}, g_k(x_{2mk-m-1}))$와 $(x_{2mk+m-1}, g_k(x_{2mk+m-1}))$사이의 거리를 l_k라 하면,

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1} l_k = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}dx$가 됨을 쉽게 알 수 있다.

실제적으로 l_k를 구할 때에는, 등분을 할 필요도 없다.(리만적분의 결과에 따르면, 각 구간의 길이가 0에 수렴한다면 이와 같은 방법으로 연속함수에 대해서 정적분이 가능하다.)

평가

[1-1]

정적분의 정의와 평균값의 정리를 정확히 인지하고 있고, 이를 적용하여 곡선의 식을 $f'(x)$이 포함된 정적분으로 적절히 유도하였다.

[1-2]

1-2에서 주어진 조건을 잘 이해하고 있고, 이를 적절히 이용할 줄 알고 있다. 정적분의 정의를 사용하여 간결하게 원하는 정적분 형태를 얻었다.

[1-3]

첫 번째 답안은 조금 부족하다. [1-1]과 [1-2]에서 유도한 결과가 왜 같은지를 설명하여야한다. 그러나 두 번째 답안은 매우 좋은 답이다. 지문에서 구간 $[a,b]$를 $2n$ 등분하였는지를 파악하면 이를 좀 더 일반화 할 수 있다는 것을 알 수 있을 것이다. 비록 선택한 두 점이 [1-2]에서 말하고 있는 두 점과 대응되는 점은 아니지만, 이러한 생각을 찾아낸 것은 쉽지 않은 일이고, 따라서 많이 칭찬해 주고 싶다.

▶ **전체문항 답안 사례 2**

[1-1] 답

$[a,b]$를 n등분하여 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$, $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$,

$x_k=a+\dfrac{k(b-a)}{n}(k=0,1,2,\cdots,n)$일 때

임의의 점 $(x_k, f(x_k))$, $(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$에 대하여

$$l_k=\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+\{f(x_{k+1})-f(x_k)\}^2}=(x_{k+1}-x_k)\sqrt{1+\{\frac{f(x_{k+1})-f(x_k)}{x_{k+1}-x_k}\}^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}l_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(x_{k+1}-x_k)\sqrt{1+\{\frac{f(x_{k+1})-f(x_k)}{x_{k+1}-x_k}\}^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\sqrt{1+\{\frac{f(x_{k+1})-f(x_k)}{x_{k+1}-x_k}\}^2}\cdot\Delta x$$

$$=\int_a^b\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}dx$$

따라서 점$(a,f(a))$부터 점$(b,f(b))$까지의 곡선의 길이는

$l=\displaystyle\int_a^b\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}dx$이다.

[1-2] 답

[그림2]는 $[a,b]$를 $2n$등분하였으므로 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{2n}=b$,

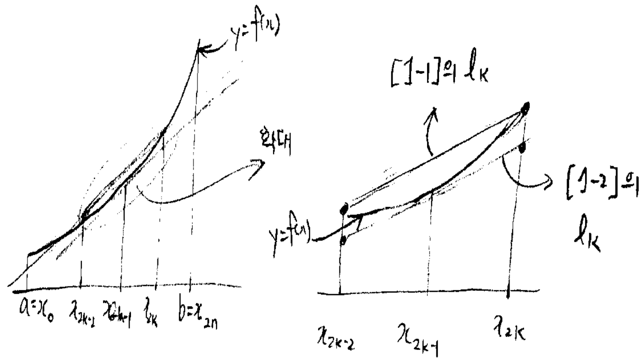
$\Delta x=\dfrac{b-a}{2n}$, $x_{2k}=a+\dfrac{2k(b-a)}{2n}=a+\dfrac{k(b-a)}{n}(k=0,1,2,\cdots,n)$이라고 하자.

점$(x_{2k-1}, f(x_{2k-1}))$에서의 접선의 식은 $y=f'(x_{2k-1})(x-x_{2k-1})+f(x_{2k-1})$이므로

$$g_k(x_{2k-2}) = f'(x_{2k-1})(x_{2k-2} - x_{2k-1}) + f(x_{2k-1})$$
$$g_k(x_{2k}) = f'(x_{k-1})(x_{2k} - x_{2k-1}) + f(x_{2k-1})$$
$$\begin{aligned} l_k &= \sqrt{(x_{2k} - x_{2k-2})^2 + \{g_k(x_{2k}) - g_k(x_{2k-2})\}^2} \\ &= \sqrt{(x_{2k} - x_{2k-2})^2 + \{f'(x_{2k-1})(x_{2k} - x_{2k-2})\}^2} \\ &= (x_{2k} - x_{2k-2})\sqrt{1 + \{f'(x_{2k-1})\}^2} \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} l_k &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(x_{2k} - x_{2k-2})\sqrt{1 + \{f'(x_{2k-1})\}^2} \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(2 \cdot \frac{b-a}{2n}\right)\sqrt{1 + \{f'(x_{2k-1})\}^2} \\ &= \int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}\,dx \end{aligned}$$

[1−3] 답

$[1-1]$에서 구한 l_k를 $[1-2]$에서와 같이 $[a,b]$를 $2n$등분하여 생각해보면, $\sqrt{(x_{2k} - x_{2k-2})^2 + \{f(x_{2k}) - f(x_{2k-2})\}^2}$ 와 같은 값이다.



구하고자 하는 길이 l의 $\frac{1}{n}$은 $[1-1]$의 l_k와 $[1-2]$의 l_k의 사이값인데, $[1-1]$의 l_k와 $[1-2]$의 l_k에 극한값을 취할 경우 값이 같아지므로, 구하고자 하는 길이 l은 $[1-1]$의 l_k나 $[1-2]$의 l_k의 극한값임을 알 수 있다.

따라서 $[1-1]$의 결과와 $[1-2]$의 결과는 같다.

$[1-1]$과 같은 결론을 유도하는 다른 방법으로는 [그림2]에서 $(x_{2k-1}, f(x_{2k-1}))$와 $(x_{2k}, g_k(x_{2k}))$의 거리 d_k를 이용하면 된다.

$$d_k = \sqrt{(x_{2k} - x_{2k-1})^2 + \{f'(x_{2k-1})(x_{2k} - x_{2k-1})\}^2}$$

$[a,b]$를 $2n$등분하였으므로 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{2n} = b$, $\Delta x = \frac{b-a}{2n}$,

$x_k = a + \frac{k(b-a)}{2n}(k = 0, 1, 2, \cdots, 2n)$이라고 하면

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n} d_k &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}(x_{2k}-x_{2k-1})\sqrt{1+\{f'(x_{2k-1})\}^2} \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\sqrt{1+\{f'(x_{2k-1})\}^2}\cdot\Delta x \\ &= \int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}dx\end{aligned}$$

평가

[1-1]

결론 부분에서 $\dfrac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}$과 $f'(x)$ 사이의 관계를 설명하지 않아서 아쉬운 답이 되었다. 그러나 기본적인 접근 방법은 옳게 알고 있다.

[1-2]

[1-1]과 달리 [1-2]의 문제는 지문에서 $f'(x)$를 포함하는 관계식(접선의 식)을 얻을 수 있다. 따라서 [1-1]에서 정확한 이유없이 $f'(x)$를 사용하여 감점을 당한 학생이라도, [1-2]에서는 문제의 의도대로 논리를 전개하면, 위와 같이 정확한 정적분으로 표현된 곡선의 길이를 정확히 구할 수 있다.

[1-3]

"사이값"이란 말은 정확한 표현이 아니다. 위쪽의 선분의 길이의 합의 극한([1-1]) 과 아래쪽 접선의 길이의 합의 극한([1-2])이 같아지는 것이다. 다음 답안, 즉, [1-2]에서 구한 길이의 절반만을 취하여 정적분의 정의를 사용하면 같은 결과를 얻는다는 것은 좋은 답안 중의 하나이다.

▸ [1-3] 문항의 답안 사례

[1-3]의 정답은 여러 가지가 있다. 학생들의 논리적이고 창의적인 사고력 측정을 위하여 다양한 답안이 정답이 될 수 있도록 출제한 문제이다. 다음은 몇 가지 다양한 답안의 예이다.

• 답안 사례 1

[1-2]의 결과와 [1-1]의 결과가 같다. $[a,b]$를 $3n$등분한 뒤 $(x_{3k-2}, f(x_{3k-2}))$와 $(x_{3k-1}, f(x_{3k-1}))$을 지나는 직선을 그어 그 직선이 $x=x_{3k}$와 만나는 점을 A_k,

$x = x_{3k+3}$과 만나는 점을 A_{k+1}이라 하고 $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n-1} A_k A_{k+1}$을 구한다.

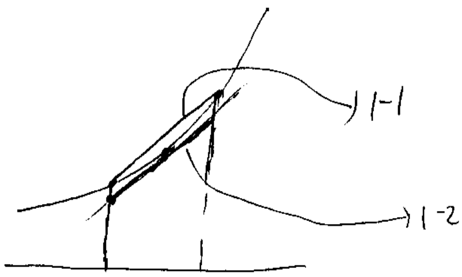
$x_k = \dfrac{(3n-k)a + kb}{3n}$

평가

[1-2]의 지문에서 구간 $[a, b]$를 $2n$등분한 것을 $3n$등분한 것으로 생각해본 답안이다. 그러나 [1-2]에서 사용한 접선위의 두 점을 선택한 것이 아니기 때문에 선택한 점들 사이의 거리에서 $f'(x)$를 도출하려면 역시 [1-1]에서 사용한 평균값 정리를 사용하여야한다. 이러한 논점이 빠져 있기는 하지만, 주어진 구간을 $3n$등분한 것으로 생각해본 아이디어는 좋은 생각이다.

- **답안 사례** 2

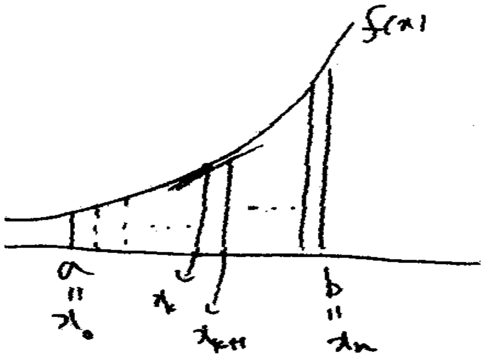
[1-1]과 [1-2]의 결과를 비교해보면 [1-1]은 곡선 $f(x)$의 도함수를 이용해 값이 표현되었고 [1-2]는 접선의 방정식을 이용해 표현되었다. 그러나 결과는 같다.
이것은 극한의 개념을 도입했기에 가능한 것이다.
두 결과를 얻는 과정에서 큰 차이점은 [1-1]은 곡선 위의 두 점을 연결한 길이를 무한히 더한 것이고 [1-2]는 두 직선에 의해 잘라진 접선의 길이를 무한히 더한 것인데,
그림으로 살펴보면 무한히 나누었을 때



[1-1]은 이 길이를 무한히 더한 것이고

[1-2]는 이 길이를 무한히 더한 것인데, 결과값은 같다. 같은 이유는 극한의 개념이 도입되었기에 가능한 것이다.

다른 방법을 생각해보면
$(x_k, f(x_k))$에서의 접선식을 $g_k(x)$라 할 때
$(x_k, g_k(x_k))$와 $(x_{k+1}, g_k(x_{k+1}))$사이의 거리를 무한히 더해도 같은 결과가 나올 것이다.



$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+(g_k(x_{k+1})-g_k(x_k))^2}$를 계산해도 같은 결과를 얻을 수 있다.

평가

[1-2]의 지문에서 구간 $[a,b]$를 $2n$등분한 것을 잘 이해하고 있고, 이를 쉽게 n등분한 것으로 생각하여도 같은 결과를 유도할 수 있다는 사실을 간단하게 설명하고 있다. 역시 좋은 답이다.

- **답안 사례 3**

[1-1][1-2]에서 유도된 방법은 다르지만, 그 계산 값은 같게 된다.
좀 더 일반적으로 $[a,b]$를 $2mn$등분을 한 뒤 점$(x_{2mk-1}, f(x_{2mk-1}))$에서 접선의 식을 $g_k(x)$, 접선 위의 점 $(x_{2mk-m-1}, g_k(x_{2mk-m-1}))$와 $(x_{2mk+m-1}, g_k(x_{2mk+m-1}))$사이의 거리를 l_k라 하면,

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1} l_k = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$가 됨을 쉽게 알 수 있다.

실제적으로 l_k를 구할 때에는, 등분을 할 필요도 없다.(리만적분의 결과에 따르면, 각 구간의 길이가 0에 수렴한다면 이와 같은 방법으로 연속함수에 대해서 정적분이 가능하다.)

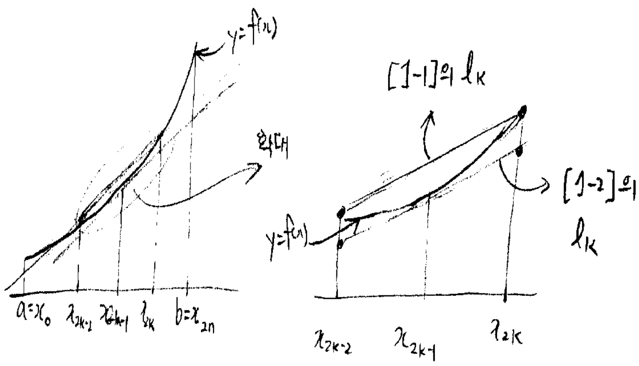
평가

[1-2]의 지문에서 구간 $[a,b]$를 $2n$등분한 것을 잘 이해하고 있고, 이를 더욱 일반화하여 $2mn$등분하는 경우를 생각해내었다. 비록 선택한 두 점이 [1-2]에서 말하고 있는 경우의 정확한 일반화는 아니지만 가장 훌륭한 답안 중의 하나이다.

- **답안 사례 4**

$[1-1]$에서 구한 l_k를 $[1-2]$에서와 같이 $[a,b]$를 $2n$등분하여 생각해보면,
$\sqrt{(x_{2k}-x_{2k-2})^2+\{f(x_{2k})-f(x_{2k-2})\}^2}$와 같은 값이다.

구하고자 하는 길이 l의 $\frac{1}{n}$은 $[1-1]$의 l_k와 $[1-2]$의 l_k의 사이값인데, $[1-1]$의



l_k와 $[1-2]$의 l_k에 극한값을 취할 경우 값이 같아지므로, 구하고자 하는 길이 l은 $[1-1]$의 l_k나 $[1-2]$의 l_k의 극한값임을 알 수 있다.
따라서 $[1-1]$의 결과와 $[1-2]$의 결과는 같다.

$[1-1]$과 같은 결론을 유도하는 다른 방법으로는 [그림2]에서 $(x_{2k-1}, f(x_{2k-1}))$와 $(x_{2k}, g_k(x_{2k}))$의 거리 d_k를 이용하면 된다.

$d_k = \sqrt{(x_{2k} - x_{2k-1})^2 + \{f'(x_{2k-1})(x_{2k} - x_{2k-1})\}^2}$

$[a,b]$를 $2n$등분하였으므로 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{2n} = b$, $\Delta x = \dfrac{b-a}{2n}$,

$x_k = a + \dfrac{k(b-a)}{2n} (k = 0, 1, 2, \cdots, 2n)$이라고 하면

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n} d_k &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}(x_{2k} - x_{2k-1})\sqrt{1 + \{f'(x_{2k-1})\}^2} \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\sqrt{1 + \{f'(x_{2k-1})\}^2}\cdot\Delta x \\ &= \int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}dx\end{aligned}$$

평가

문제의 의미를 잘 파악하고 있다. [1-2]의 지문에서 구간 $[a,b]$를 $2n$등분하여 논리를 전개한 것을 이해하고 있고, 또한 [1-2]에서 정의한 접선의 길이 중에서 $\frac{1}{2}$만을 이용하여도 같은 결과를 얻는다는 사실을 잘 설명하고 있다. 좋은 답안이다.

나. Type II 1번 답안

▸ 답안 사례 1

[1−1] 답

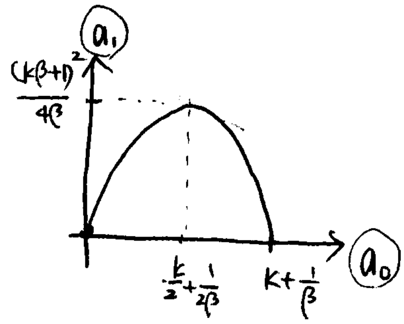
$a_{n+1} = a_n + \beta a_n(k - a_n)$에서 a_n이 수렴한다고 했으므로 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = X$라고 할 수 있다.

$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} \beta a_n(k - a_n)$, $\quad X = X + \beta X(k - X)$, $\quad X = X + \beta kX - \beta X^2$,

$\beta X(X - k) = 0$

박테리아 양 a_n은 0이 될 수는 없으므로 $\lim_{n\to\infty} a_n = k$ 가 된다.

[1-2] 답



㉠의 식에 $n = 1$을 대입하면

$a_1 = -a_0(\beta a_0 - (k\beta + 1))$ 이것을 그래프로 나타내면

이때, $k < a_0 < 2k$일 때 a_1의 범위를 구해보자.

a_0이 k이면

$a_1 = k$------------------------------㉮

a_0이 $2k$이면

$a_1 = -2k(k\beta - 1)$---------------------㉯

최대값은 $\left(a_0 = \frac{k}{2} + \frac{1}{2\beta} = \frac{k\beta + 1}{2\beta} \right)$ 일 때

$a_1 = \frac{(k\beta + 1)^2}{4\beta}$----------------------㉰

㉯에서 $0 < \beta < \frac{1}{2k}$이므로 이때 $k < a_1 < 2k$

∴㉮<㉯

또한 ㉰에서 $a_1 = a_0 \times \frac{k\beta + 1}{2}$인데 $\frac{1}{2} < \frac{k\beta + 1}{2} < \frac{3}{4}$이므로 $a_1 < a_0$이다.

∴초기 개체수가 $k < a_0 < 2k$이면 a_1은 부등식 $k < a_1 < a_0$를 만족한다.

이번엔 $0 < a_0 < k$일 때 a_1의 범위를 구해보자.

a_0가 0이면 $a_1 = 0$, $\quad 0 < a_1 < k \rightarrow a_0 < a_1 < k$

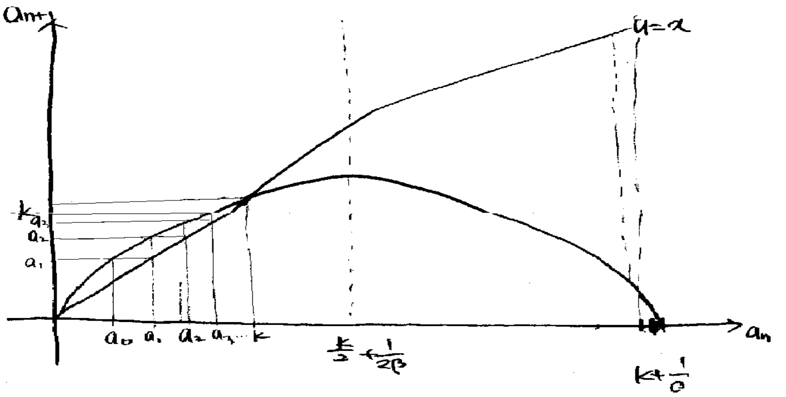
a_0가 k이면 $a_1 = k$

$\therefore 0 < a_0 < k$일 때 $a_0 < a_1 < k$를 만족한다.

[1-3] 답

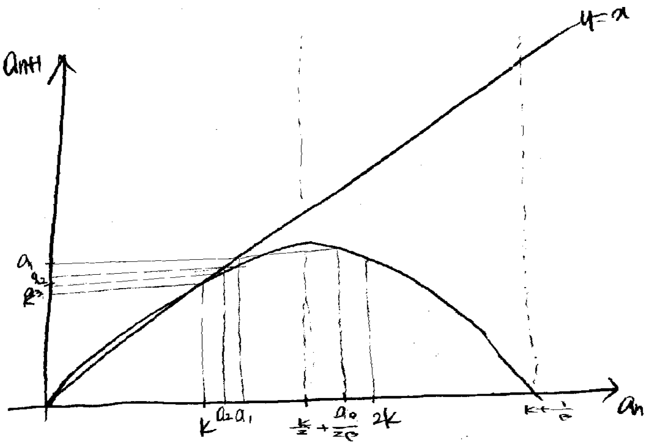
$0 < \beta < \dfrac{1}{2k}$이므로 위에서도 말했듯이 a_n과 a_{n+1} 관계는 2차함수 그래프 꼭지점에서 $f(a_n) > f(a_{n+1})$이다.

i) $0 < a_0 < k$일 때 극한값을 알아보면



$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n$은 k까지 증가한다.($0 < a_0 < k$일 때)

ii) $k < a_0 < 2k$일 때 극한값을 알아보면



$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n$은 k까지 감소한다.($k < a_0 < 2k$일 때)

평가

제시문의 원리를 정확히 이해하였고, 유연한 수리 분석을 통해 제시문의 상황을 단순화하였다. 수리 과학적 상황을 그래프로 변환하여 결론을 유추해내는 능력이 우수하다. 논리적인 표현 능력은 개선해야 한다.

▸ 답안 사례 2

[1-1] 답

α_n이 수렴한다면,

$\lim_{n\to\infty}\alpha_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha$로 표현할 수 있다.

$\alpha_{n+1}=\alpha_n+\beta\alpha_n(k-\alpha_n)$----------㉠

$n\to\infty$로 보내면,

$\alpha=\alpha+\beta\alpha(k-\alpha)$가 되서

$\alpha\beta(-\alpha+k)=0$ 이 되므로

$\therefore\ \alpha=0$ or k

그런데 $\alpha_0>0,\ \beta>0,\ k>0$이므로

1) $0<\alpha_n<k$이면,

㉠에서 $\beta\alpha_n(k-\alpha_n)$이 양수가 되어

α_{n+1}은 α_n보다 증가하게 됨을 알 수 있다.

2) $\alpha_n>k$이면

㉠에서 $\beta\alpha_n(k-\alpha_n)$이 음수가 되어

α_{n+1}은 α_n보다 감소함을 알 수 있다.

1), 2)로 보아 α는 0에 수렴이 불가능하고($\because$1))에서 증가하니까 “k”에 수렴함을 알 수 있다.

[1-2] 답

$\alpha_{n+1}=\alpha_n+\beta\alpha_n(k-\alpha_n)$

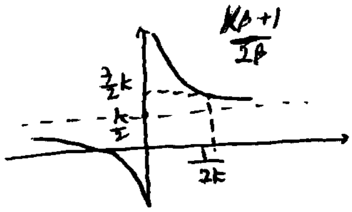
$\quad\quad=\alpha_n+\beta k\alpha_n-\beta\alpha_n^2$

Let $\alpha_{n+1}=y,\ \alpha_n=x$,,

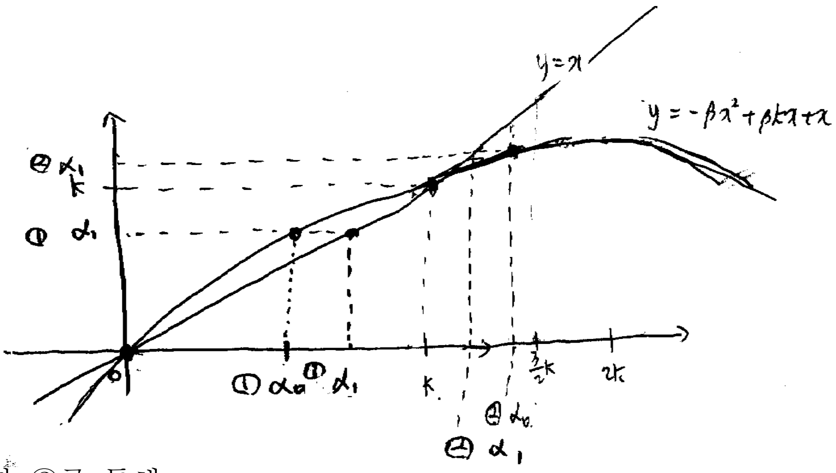
$y=-\beta x^2+\beta kx+x$ ---- 이차함수($\beta>0,\ k>0,\ x>0$)

이 이차함수는 $x=\dfrac{\beta k+1}{2\beta}$을 축으로 한다.

그런데 $0<\beta<\dfrac{1}{2k}$이므로



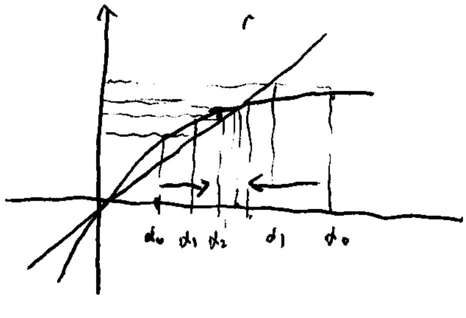
축은 $x=\frac{3}{2}k$ 오른쪽에 있음을 알 수 있다.
위의 정보를 통해 이차함수를 작성하면



①과 ②를 통해
② $k < a_0 < 2k$이면 $k < a_1 < a_0$임을 확인
① $0 < a_0 < k$이면 $a_0 < a_1 < k$임을 확인할 수 있다.

[1-3] 답

수열 a_n에서 n을 실수로 확장하여 생각했을 때 위의 이차함수를 작성할 수 있었다.
$(0 < \beta < \frac{1}{2k}$, $k > 0$인 조건하$)$



y는 x의 다음 항이 되므로,
위 그림에서 $\alpha_0 \rightarrow \alpha_1 \rightarrow \alpha_2 \rightarrow \alpha_3$와 같은 과정을 반복하면
$y=x$와 이차함수의 교점인 (k,k)로 계속 접근해감을 확인할 수 있다.
즉, $k < a_0 < 2k$이면 a_n이 k가 될 때까지 감소하고,
$0 < a_0 < k$이면 a_n이 k가 될 때까지 증가한다.

평가

직관에 의한 통합적인 추론 능력과 수리 과학적 상황을 그래프로 변환하여 결과를 예측하는 능력이 우수하다. 다만, 결과의 타당성을 논리적으로 설명하는 능력을 보완하였으면 한다.

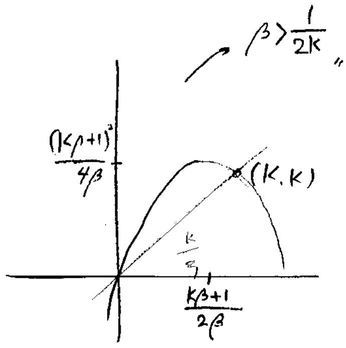
▶ 답안 사례 3

[1-1] 답

$a_{n+1} = a_n + \beta a(k - a_n)$에서, a_{n+1}과 a_n의 관계는 $y = f(x)$의 함수에서 y와 x의 관계와 같은 함수관계이다.
따라서 $a_{n+1} = y$, $a_n = x$로 두면,
$y = x + \beta x(k - x)$의 함수를 얻게 되고 이를 $g(x)$라 하자.
$y = x + \beta x(k - x) = (1 + \beta k)x - \beta x^2$이고,
여러번의 시행은 $g(x)$의 거듭합성으로 나타낼 수 있다.

$$y = -\beta x^2 + (1 + \beta k)x$$
$$= -\beta(x^2 - (\frac{1}{\beta} + k)x)$$
$$= -\beta(x - \frac{k\beta + 1}{2\beta})^2 + \frac{(k\beta + 1)^2}{4\beta}$$
이며 개형은 <그림①>과 같다

$y = g(x) \ni (k, k)$이므로, 수렴한다면 함수를 합성함에 따라 점차 (k, k)에 근접하여 수렴하게 될 것이다.

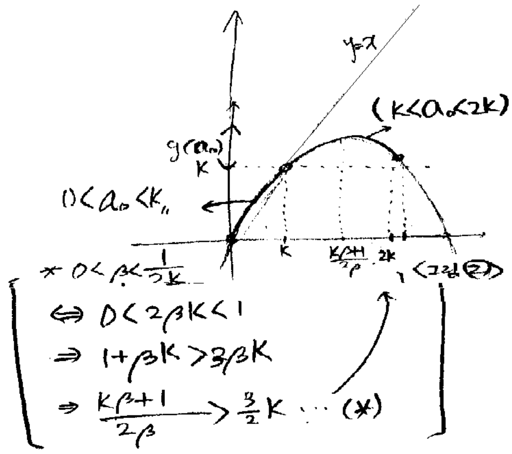


<그림①>

[1-2] 답

i)$k < a_1 < a_0$을 [1-1]의 $y = g(x)$로 해석하면,
$k < g(a_0) < a_0$이다.
$0 < \beta < \frac{1}{2k}$이면,
$\frac{k\beta + 1}{2\beta} > \frac{3}{2}k$이므로

(By.(*))
그러면 $y = g(x)$는 <그림②>처럼
수정된다.



그러면, $k < a_0 < 2k$에서
$g(a_0) > k$가 성립한다.---①
$k < a_0 \longleftrightarrow k - a_0 < 0$
$\therefore$
$a_1 = a_0 + \beta a_0(k - a_0) < a_0 (\because \beta > 0)$---②
By①②, $k < a_1 < a_0$

ii) <그림②>에서 $y = g(x)$는 위로 볼록한 함수(이차함수 최고차항계수< 0 ↔이계도함수값< 0↔위볼록)이므로, $a_1 = g(a_0) > a_0$---③
마찬가지로 그래프에서 $g(a_0) < k$---④
$\therefore$By③④, $a_0 < a_1 < k$ 성립

[1-3] 답

[1-2]의 결과와 <그림②>에 의해
i) $k < a_0 < 2k$에서 $k < \forall a_n < 2k$, $k < a_{n+1} < a_n$이 성립한다.
→ $\forall n \in N$, $a_{n+1} < a_n$이고, $a_n > k$이므로
감소수열이며 하계를가진다.---$2k > a_0 > a_1 > \cdots > a_n > k$
$\therefore a_n$은 수렴하고, $\lim_{n\to\infty} a_n = k$이다.---①
ii) $0 < a_0 < k$일 때도 마찬가지로
$0 < \forall a_n < k \rightarrow a_n < a_{n+1} < k$가 성립한다. → $\forall n \in N$, $a_{n+1} > a_n$이고,
$a_n < k$이므로, 증가수열이며 상계를 가진다
$\therefore 0 < a_0 < a_1 < \cdots < a_n < k$
$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = k$이다.---②
By①,②, $0 < \beta < \frac{1}{2k}$일 때 a_n은 k로 수렴한다.

평가

제시문의 원리를 정확히 이해하였고, 수준 높은 수리분석을 수행하여 결론을 유도하였다. 다만, [1-3]의 답안에서 상계, 하계의 개념을 사용하였는데, 이는 대학수준의 개념으로 고등학교학생에게는 적절하지 않다.

▶ 답안 사례 4

[1-1] 답

$a_{n+1} = a_n + \beta a_n(k - a_n)$

$\rightarrow\ a_{n+1} - a_n = \beta a_n(k - a_n)$

여기서 $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n$이고 둘 다 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} - \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$\lim_{n\to\infty} \beta a_n(k - a_n) = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} - a_n = 0$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$라 하면

$\beta\alpha(k - \alpha) = 0$

$\alpha(k - \alpha) = 0$

$\therefore \alpha = 0,\ k$

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = 0,\ k$

[1-2] 답

$a_1 = a_0 + \beta a_0(k - a_0)$이다.

$a_1 - a_0 = \beta a_0(k - a_0)$

$k < a_0 < 2k$일 때 $0 < k < a_0$이므로

$a_0 > 0,\ k - a_0 < 0$

따라서 $\beta a_0(k - a_0) < 0$이다.

$\therefore a_1 < a_0$

또한 $a_1 - k = a_0 + \beta a_0(k - a_0) - k$

$= -(k - a_0) + \beta a_0(k - a_0)$

$= (\beta a_0 - 1)(k - a_0)$

여기에서 $0<\beta<\dfrac{1}{2k}$이므로

$\dfrac{1}{\beta}>2k>a_0$이다.

$a_0<\dfrac{1}{\beta}$

$\beta a_0<1$

$\beta a_0-1<0$

또한 $k-a_0<0$이므로

$(\beta a_0-1)(k-a_0)>0$이다.

따라서 $a_1-k>0$이므로

$\therefore k<a_1<a_0$

마찬가지로 $a_1-a_0=\beta a_0(k-a_0)$에서

$0<a_0<k$일 때

$a_0>0$, $k-a_0>0$이므로

$\beta a_0(k-a_0)>0$이다.

$\therefore a_1>a_0$

또한 $a_1-k=(\beta a_0-1)(k-a_0)$에서

$\dfrac{1}{\beta}>2k>a_0$이다.

그래서 $\beta a_0-1<0$이고

$k-a_0>0$이므로

$a_1-k=(\beta a_0-1)(k-a_0)<0$

$\therefore a_0<a_1<k$

[1-3] 답

$k<a_0<2k$일 때

[1-2]에서 $k<a_1<a_0<2k$이므로

$k<a_1<2k$이다.

그러므로 $k<a_1<2k$일 때

a_2는 부등식 $k<a_2<a_1$을 만족할 것이다.

a_3도 역시 위와 같은 이유로 $k<a_3<a_2$를 만족할 것이다.

그러므로 $a_0>a_1>a_2>\cdots>a_{n-1}>a_n>k$ 이다.

그런데 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$, k 에서

$a_n > k > 0$이기 때문에 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 은 0 이 될 수 없다.
그러므로 $\lim_{n\to\infty} a_n = k$
$\therefore k < a_0 < 2k$이면 개체수가 k가 될 때까지 감소한다.
또한 $0 < a_0 < k$일 때
$k > a_1 > a_0$이므로
$0 < a_1 < k$를 만족한다.
$0 < a_1 < k$일 때
a_2도 부등식 $k > a_2 > a_1$을 만족한다.
그러므로 $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n < k$ 이다.
$\lim_{n\to\infty} a_n = 0,\ k$에서
$a_n > a_0 > 0$이므로 $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$이다.
$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = k$
$\therefore 0 < a_0 < k$ 이면 개체수가 k가 될 때까지 증가

평가

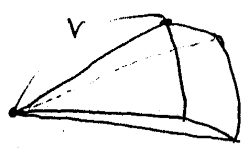
제시문의 원리와 개념을 정확히 분석한 후, 다루기 쉬운 다항식(중학교수준)의 형태로 변환하여 결론을 유도하였다. 개념 및 원리에 관한 인지능력이 우수하고, 논리적인 표현능력도 갖추었다.

다. 문제 2번 답안 사례

▸ 답안 사례 1

[2-1] 답

어떤 한 순간에 태양 표면을 떠난 복사 에너지가 있다고 가정하자. 이후로부터는 떠난 E량은 일정하다. 그러나 에너지가 태양으로부터 고르게 퍼져나간다면, 일정량의 에너지가 점점 퍼지는 것이므로 단위면적당 도달하는 E량은 감소한다.



단위면적당 도달하는 에너지 량은, 반지름이 r인 구에서 생각해보면 다음과 같다.
단위면적당 E량 = $(\frac{E}{4\pi r^2})$ (E는 태양으로부터 나온 에너지

량)
그러므로 r^2에 반비례한다.

[2-2] 답

먼지에 미치는 힘은 F_G와 F_R 두 가지인데 이 두 힘은 반대방향으로 상호작용하므로, 먼지에 미치는 힘의 합이 0이 되려면 $F_G = F_R$이 성립해야 한다.

$G\frac{Msm}{r^2} = \frac{PsA}{4\pi cr^2}$가 성립해야 하는데, 이 때 먼지의 질량 m은 다음과 같이 표현 가능하다.

(질량=부피×밀도)이므로, $m = r \times \frac{4}{3}\pi a^3$(먼지의 평균반지름을 a라 하면) 이를 이용하여 위의 식을 정리할 수 있다.

$\frac{Ps \cdot \pi a^2}{4\pi cr^2} = G\frac{Ms \cdot \frac{4}{3}\pi a^3 r}{r^2}$($r$은 밀도)--------①

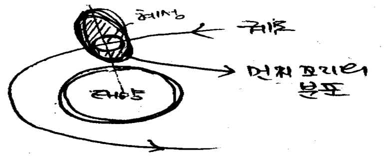
$\therefore a = \frac{3Ps}{16\pi c \cdot G \cdot Ms \cdot r}$($r$은 밀도)

그러므로, $a_0 = \frac{3Ps}{16\pi c \cdot G \cdot Ms \cdot r}$일 때 먼지에 미치는 힘의 합력은 0이 된다.

이 때 위 식 ①에서 알 수 있듯이, F_G는 a^3에 비례하고, F_R은 a^2에 비례한다. 그러므로 a가 a_0보다 커지면 상대적으로 인력을 많이 받아 태양쪽으로 쏠리며, 반대로 a가 a_0보다 작아지면 상대적으로 태양 반대쪽으로 힘을 받아 밀려난다.

[2-3] 답

태양의 반대방향으로만 밀려나는 이온꼬리와는 달리, 먼지 꼬리는 태양 쪽과, 그 반대쪽 모두를 향하여 오른쪽 그림과 같이 분포할 것이다.



이는 먼지의 반지름 차이에 의해 생기게 되는 현상인데, [2-2]에서 밝힌 것과 같이, 태양에 가까운 쪽의 먼지들은 a_0보다 큰 반지름을 가지고 태양으로부터 멀리 떨어진 먼지들은 a_0보다 작은 반지름을 가진다. 즉 태양에 가까운 쪽에 분포하는 먼지일수록 더 큰 반지름을 가진다.

평가

[2-1] 풀이에서 에너지 보존을 잘 이해하고 있으며, 이를 통하여 단위면적 당 복

사에너지가 태양으로부터의 거리의 제곱에 반비례함을 수식으로도 잘 표현하였다.

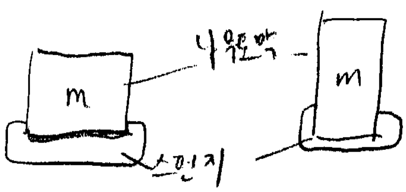
[2-2] 힘의 평형을 잘 이해하였고 이를 통하여 평형일 경우의 먼지의 반지름의 크기 a_0 를 정확이 구하였다. 두 힘이 반경에 대해 $F_R \propto a^2$ 이며, $F_G \propto a^3$ 이 된다는 사실을 이용하여,
반경이 a_0 에 비하여 큰 경우와 작은 경우 먼지에 미치는 두 힘의 크기를 잘 비교하였다.

[2-3] 위의 두 가지 힘의 비교로부터 먼지의 반지름이 태양에서 멀어질수록 작아진다는 점은 잘 지적하였다. 그러나 먼지에 미치는 복사압이 없을 때에도 먼지는 만유인력에 의하여 혜성과 같이 태양주위를 공전 한다는 사실을 파악하고 있지는 않다고 판단된다. 즉, 복사압이 주는 힘은 공전 궤도로부터 먼지를 멀어지게 하는 추가적인 힘이다.

▶ **답안 사례 2**

[2-1] **답**

먼지가 받는 힘 F_R 은 거리의 제곱에 반비례한다. 이는 스펀지 위에 나무토막을 올려놓았을 때 같은 나무토막이더라도 힘을 주는 면적에 따라 스펀지에 박히는 깊이에 빗댈 수 있다. 아래 그림과 같이 나무토막이 스펀지에 힘을 주는 면적이 클수록 들어간 깊이는 작다. 즉, 스펀지의 단위면적당 받는 힘은 왼쪽의 경우가 더 작다. 이것을 먼지와 F_R에 적용시키면 태양으로부터 거리가 r인 먼지는 그



때의 반지름 r인 구의 겉넓이(이 때 구는 거리 r에 있는 모든 물체에 작용하는 힘이다) $4\pi r^2$의 일부의 힘을 받는다. 힘은 아까 스펀지에서 보듯 면적에 반비례하므로 F_R은 거리의 제곱에 반비례한다.

[2-2] **답**

먼지에 작용하는 힘의 합이 0일 때는 $F_R = F_G$일 때이다. 여기서 $\frac{PsA}{4\pi cr^2} = G\frac{Msm}{r^2}$을 정리하면 $A = \pi a^2$이므로, $Psa_0^2 = 4cGMsm$이다. 그런데 먼지의 질량 m은 먼지의 부피와 밀도의 곱이므로 $m = \frac{4}{3}\pi a_0^3 \times r$, 따라서

$Psa_0^2 = 4cGMs \times \frac{4}{3}\pi a_0^3 \times r$,

정리하면 $a_0 = \frac{3}{16} \cdot \frac{Ps}{r\pi cGms}$이다.

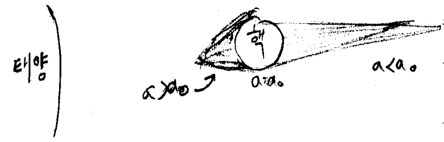
이 때

(i) $a > a_0$인 경우, $F_R < F_G$이다. 먼지입자는 만유인력의 힘으로 태양 쪽으로 운동하게 된다. 그러는 동안 태양과의 거리는 점점 짧아지므로, 가속도가 증가하는($\frac{1}{r^2}$에 비례하여) 운동을 한다.

(ii) $a < a_0$인 경우, $F_R > F_G$이다. 먼지입자는 태양으로부터 멀어지는 방향으로 운동을 하게 된다. 그러나, $a > a_0$일 때와는 반대로, 운동하기 시작한 지점의 가속도가 가장 크고, 운동할수록 가속도가 0에 가까워진다. 따라서 먼지 입자는 가속도의 크기가 작아지는 운동을 하다가, 외력이 미치지 않을 경우 충분히 먼 거리에서 등속 직선 운동을 하게 된다.

[2-3] 답

결론적으로, 먼지 그림은 아래와 같이 형성된다. 여기서 태양 반대쪽이 더 길고 가느다란 것은 $F = ma$에 의하여 태양 반대쪽으로 날아가는 먼지들의 가속도가 평균적으로 더 크기 때문이다. 그리고, 태양으로 향하는 먼지의 반지름의 분포는 a_0보다 크고, 태양반대쪽으로 향하는 먼지의 반지름 분포는 a_0보다 작다.



평가

[2-1] 힘과 압력 사이의 관계를 나무토막과 스펀지를 이용한 비유를 통해 잘 이해하고 있으나, 복사에너지와 복사압의 관계를 에너지 보존원리를 통하여 연결하지 않은 점이 조금 아쉬웠다.

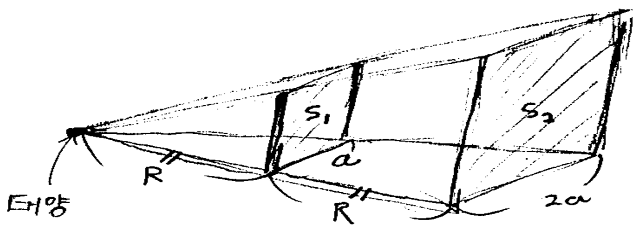
[2-2] 힘의 평형을 잘 이해하였고 이를 통하여 평형일 경우의 먼지의 반지름의 크기 a_0 를 정확이 구하였다. 반지름이 a_0 에 비하여 큰 경우와 작은 경우 먼지에 미치는 두 힘의 크기를 정성적으로 잘 비교하였고, 정해진 크기의 먼지입자가 받게 될 두 힘의 차이를 먼지의 운동 가속도로 잘 이해하였다. 그러나 먼지가 혜성과 같이 움직이고 있었기 때문에, 존재하는 관성에 대한 이해가 없는 것으로 판단된다.

[2-3] 먼지의 반지름이 태양에서 멀어질수록 작아진다는 점은 잘 지적하였다. 그러나 먼지에 미치는 복사압이 없을 때에도 먼지는 만유인력에 의하여 혜성과 같이 태양주위를 공전 한다는 사실을 파악하고 있지는 않다고 판단된다. 즉, 복사압이 주는 힘은 공전 궤도로부터 먼지를 멀어지게 하는 추가적인 힘이다.

▶ **답안 사례 3**

[2-1] 답

문제에서 먼지들은 구형이라고 가정하였다. 먼지와 태양과의 거리와 먼지의 반지름을 비교해 보았을 때 먼지의 반지름은 무시할 수 있을 만큼 작다. 따라서 태양이 먼지에 미치는 힘은 먼지의 가장 큰 단면적만 고려하면 된다.



위의 그림과 같이 우주공간에서 태양의 복사압에 의해 밀치는 힘은 단면적 S_1 모두에 미치는 힘의 크기와, 단면적 S_2 모두에 미치는 힘의 크기가 같으므로, 태양으로부터 거리의 제곱에 반비례한다. 왜냐하면 도형의 닮음의 성질을 이용하면 $S_1 = a^2$, $S_2 = 4a^2$으로 S_2가 S_1의 4배이다. 여기서 S_2는 태양으로부터 $2R$만큼 떨어져 있고 S_1은 태양으로부터 R만큼 떨어져 있으므로 $F_R \propto \frac{1}{r^2}$($r$은 거리)임을 알 수 있다.

[2-2] 답

$r = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi a^3}$($r$은 밀도), $m = \frac{4}{3}\pi a^3 r$

$F_R = F_G$이므로

$$\frac{Ps\pi a^2}{4\pi cr^2} = \frac{GMs \cdot \frac{4}{3}\pi a^3 r}{r^2}$$

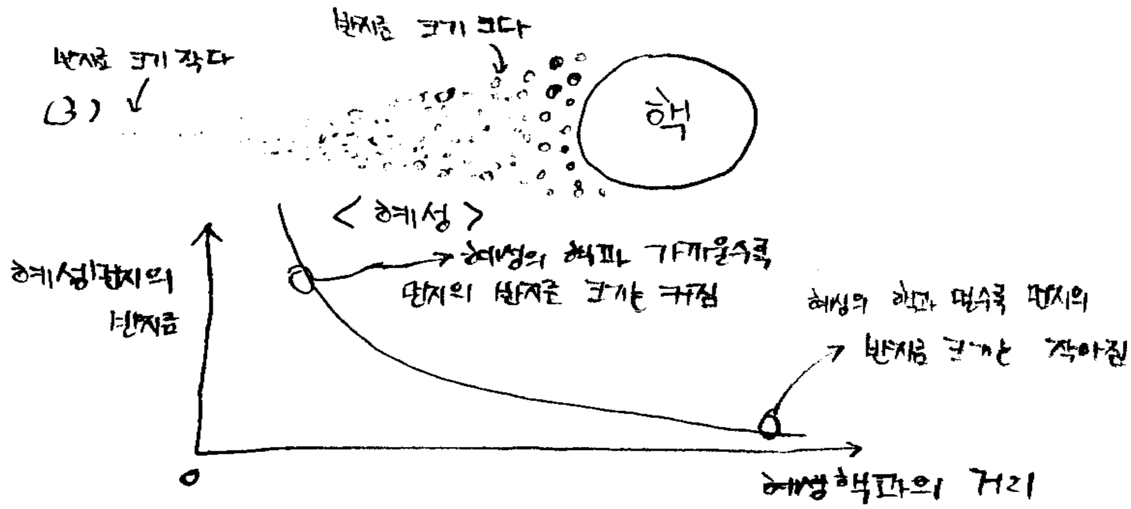
$$\therefore a_0 = \frac{3Ps}{16\pi cr GMs}$$

먼지가 받는 알짜힘은 $F = F_G - F_R$ 이다. (태양을 향하는 방향을 (+)로 생각)

i) 먼지의 반지름이 a_0보다 크면 $F_G > F_R$이므로 알짜힘$F > 0$으로 먼지는 태양을 향하여 등가속도 운동을 한다.

ii) 먼지의 반지름이 a_0보다 작으면 $F_G < F_R$이므로 알짜힘$F < 0$으로 먼지는 태양과 반대방향쪽으로 등가속도 운동을 한다.(단, 먼지에 작용하는 힘은 F_G와 F_R만 생각한다.)

[2-3] 답



반지름이 a_0보다 큰 먼지는 원래 위치보다 태양을 향해 가고, a_0보다 작은 먼지는 원래 위치보다 태양 반대쪽을 향해 간다.

평가

[2-1] 풀이에서 에너지 보존을 잘 이해하고 있으며, 이를 통하여 단위면적 당 복사에너지가 태양으로부터의 거리의 제곱에 반비례함을 수식으로도 잘 표현하였다.

[2-2] 힘의 평형을 잘 이해하였고 이를 통하여 평형일 경우의 먼지의 반지름의

크기 a_0 를 정확이 구하였다. 반지름이 a_0 에 비하여 큰 경우와 작은 경우 먼지에 미치는 두 힘의 크기를 정성적으로 잘 비교하였으나, 정해진 크기의 먼지입자가 받게 될 두 힘의 차이는 $1/r^2$ 에 비례하는 데, 이를 등가속도 운동으로 잘못 이해하였다.

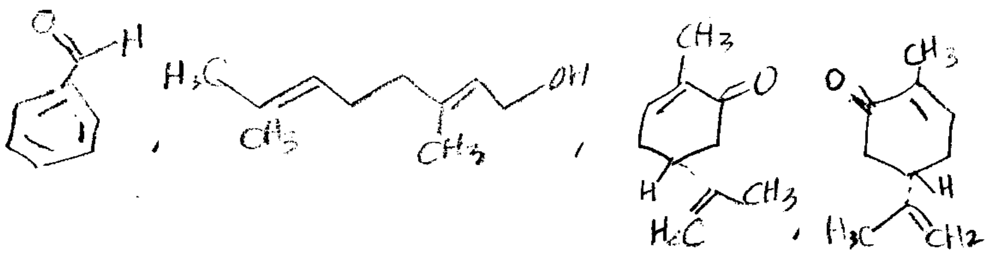
[2-3] 먼지의 반지름이 태양에서 멀어질수록 작아진다는 점은 잘 지적하였다. 그러나 "...태양을 향해 가고...태양 반대쪽을 향해 간다." 고 기술한 부분에서 먼지에 미치는 복사압이 없을 때에도 먼지는 만유인력에 의하여 혜성과 같이 태양주위를 공전 한다는 사실을 파악하고 있지는 않다고 판단된다. 즉, 복사압이 주는 힘은 공전 궤도로부터 먼지를 멀어지게 하는 추가적인 힘이다.

라. 문제 3번 답안 사례

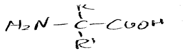
▶ 답안 사례 1

[3-1] 답

향기유발분자에는



등이 있는데 이들은 대부분 3차원적 구조를 갖고 있다. 또한 주로 벤젠고리가 있으며 산소와 이중결합을 유지하고 있다. 그런데 후각섬모의 표면에 향기유발분자를 인식할 수 있는 후각수용체라는 단백질이 있는데 우리가 냄새를 맡을 수 있는 것은 이 후각수용체가 향기유발분자들을 선택적으로 인지할 수 있는 세부구조를 형성하기 때문이다. 만약 향기유발분자들이 내 콧 속으로 들어와 코안 상피조직에 있는 후각섬모를 자극할 때, 후각수용체는 단백질로 이루어져 있기 때문에 그 안에 아미노산이라는 단위체를 가지고 있고 아미노산은

 라는 구조로 되어 있다.

향기유발분자들은 이 아미노산들과 분자간 상호작용을 하는데 장미향을 내는  같은 경우에는 -OH라는 수소결합을 하기 때문에 -COOH 결합으로 수소결합을 이루고 있는 아미노산과 매우 큰 쌍극자와 쌍극자 사이의 힘을 형성하게 된다. 또 그 밖에 향기를 내는 다른 분자들은 주로 에스테르 결합을 하기 때문에 무극성 분자인 경우가 있는데 이 때 아미노산의 알킬기가 탄소수가 많을 경우 아미노산이 무극성에 가까워 무극성분자와는 반데르발스의 힘, 즉 분산력을 형성하고 알킬기의 탄소수가 적은 경우 극성의 성질을 강하게 띠는 아미노산이 무극성 분자와 쌍극자와 유도쌍극자 사이의 힘을 형성한다. 그런데 후각수용체 유전자는 350여개인 반면 우리가 감지할 수 있는 향기는 약 4000가지이다. 이는 향기유발분자가 여러 종류의 후각수용체를 자극할 수 있어서 여러 향기가 섞여 새로운 향기가 생성될 수도 있고 또한 그 자극의 강도는 수용체의 종류에 따라 다르므로 같은 향기라도 그 자극이 약할 때는 향기롭지만 자극의 강도가 매우 셀 때는 역겨운 냄새가 될 수도 있기 때문이다. 따라서 동시에 여러 후각 수용체를 각각 다른 강도로 자극할 경우 매우 다양한 종류의 향기가 감지될 수 있는 것이다.

[3-2] 답

최근 인간의 후각시스템을 이용하여 향기를 탐지하는 전자코가 발명되었다. 우리 인간의 후각시스템은 어떤 자극이 후각상피세포에 있는 후각섬모를 자극했을 때 후각섬모 표면에 있는 후각수용체라는 단백질에서 향기를 인지하고 한 개의 뉴런당 한 종류의 후각수용체를 발현하여 그 정보를 각각 뇌의 감각세포로 전달하는데 이 때 전달되는 감각의 수용체가 다를 경우 서로 다른 세포로 전달된다. 이를 이용하여 보다 정확하게 향기를 알아낼 수 있다. 먼저 향기를 인지할 수 있는 단백질로 전자코의 표면을 만든 후에 그 인지한 향기의 정보를 알아낼 수 있는 뇌세포와 같은 역할을 하는 곳으로 전달할 때 손실되는 정보의 양이 최대한 적도록 탄소나노튜브같이 매우 튼튼하고 질긴 소재를 사용한다. 이 때 각각의 수용체에서 자극을 전달할 때에는 인간의 후각시스템과 같이 서로 다른 수용체에서 받아들인 자극은 서로 다른 통로로 이동할 수 있게 통로를 구별시킨다. 그리고 뇌세포와 같은 역할을 하는 것은 컴퓨터 인공지능을 이용하는데 이 때 서로 다른 통로를 통해 들어온 자극은 다른 곳에서 정보를 인식하여 처리한다. 이렇게 하면 향기를 구별하여 선택적으로 탐지할 수 있고 검출감도 또한 높아질 것이다.

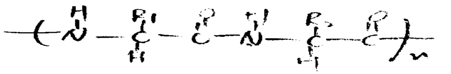
평가

문제 [3-1]의 풀이에서 수용체 단백질이 아미노산으로 이루어져 있고 3차구조를 이루고 있으며, 그 결합자리에 역시 3차구조를 가지는 냄새 유발 물질들이 수소결합, 반데르발스 힘 등에 의해 결합한다는 사실을 잘 설명함. 또한 조합메커니즘의 개념을 도입하여 다양한 냄새를 인식할 수 있음을 비교적 잘 설명함.
반면 문제 [3-2]의 풀이는 상대적으로 약함. 향기를 인지할 수 있는 단백질로 전자코의 표면을 만든다는 아이디어는 실질적으로 문제점이 있음. 그러나 인지한 향기의 정보를 알아낼 수 있는 뇌세포와 같은 역할을 하는 곳으로 전달할 때 손실되는 정보의 양이 최대한 적도록 탄소나노튜브같이 매우 튼튼하고 질긴 소재를 사용한다는 아이디어를 잘 표현하였음.

▶ **답안 사례** 2

[3-1] **답**

후각수용체는 단백질 분자로 이루어졌다고 했다. 단백질 분자는 다음과 같다.



단백질 분자는 아미노산의 축합중합에 의해 만들어진다. 또한 구조는 아민기에 의해 수소결합을 하게 되어 나선형 구조를 하게 된다. ㉰의 첫 번째 향기유발분자는 아몬드향의 포르밀기를 갖고 있고 분자구조 위에 전기음성도가 큰 산소원자가 있어서 극성을 띄게 된다. 따라서 단백질의 유도쌍극자와 아몬드의 쌍극자가 서로 이끌려 분자간의 상호작용이 일어난다. 두 번째 향기유발분자는 장미향이다. 장미향은 (-OH)기를 갖고 있어 수소결합을 한다. 또한 구조상 대칭과 거의 비슷해 무극성에 가까울 것이다. 어쨌든, 장미향은 수소결합을 통해 단백질분자와 상호작용이 일어날 것이다. 마지막으로 장미향과 케러웨이향이 있는데 이들은 분자식이 같으나 광학적으로 다른 광학 이성질체이다. 또한 삼차원구조를 갖고 있다. 단백질은 복잡한 삼차원구조를 갖게 되므로 박하향과 케러웨이향과 상호작용하는 것이다.

한편 인간은 평균적으로 350여개의 후각 수용체 유전자를 갖고 있다고 했다. 이는 한 개의 유전자에서 하나의 향기유발분자를 인식한다는 것이다. 그리고 상피조직에는 100만개의 뉴런이 있다고 했다. 따라서 어느 향기유발분자가 적으면 1종류의, 많으면 350종류의 유전자를 자극하게 된다. 이 때 자극되는 경우의 수는 최소한 2^{350}개이다. 따라서 인간은 유전자의 수의 10배 이상의 향기를 감지할 수 있는 것이다. 그러나 실제로 2^{350}개에 달하는 어마어마한 가지수가 아니라 4000가지 이상인 이유는 그만한 종류의 향기유발분자가 없을 뿐만이 아니라가 분자마다의 특성이 각기 다르고 따라서 단백질 분자와 향기유발분자의 상호작용이 다르기 때문이다.

[3-2] 답

제시문에서 인간이 탐지할 수 있는 서로 다른 향기의 수는 4000가지 이상이라고 했고 평균적으로 350여개의 후각 수용체 유전자가 있다고 했다. 이것을 이용하면 된다. 먼저 4000여 가지의 종류에 해당하는 향기에 있어서, 각 향기가 작용하는 유전자의 종류를 파악한다. 각각의 다른 유전자는 뇌에서 다른 부분을 자극한다고 했으니 뇌파측정이나 전기적 신호측정을 이용하면 쉽게 데이터베이스화(化)할 수 있을 것이다. 그 후에는 이 데이터베이스를 이용하면 된다. 예컨대, 어떤 A향이라는 향기가 작용하는 유전자가 1, 3 ,5번이라고 하자. 그러면 '스마트 전자코'에서 이 향기를 탐지하면 자극이 감지될 것이다. 이 때 감지되는 자극을 미리 조사한 데이터베이스와 일치 여부를 확인하면 분명히 1, 3, 5에 해당하는 데이터를 찾을 수 있을 것이다. 이것이 향기를 탐지하는 방법이다. 한편 이 방법을 통해 선별적으로도 향을 탐지할 수 있다. 예컨대 '딸기향'만을 탐지하고 싶으면 '딸기향'이 반응하는 유전자의 자극에 의한 것만 자극이 통하게 되면 선별적으로 향기를 탐지할 수 있게 되는 것이다.

평가

이 답안 역시 문제 [3-1]에 대한 풀이로 수용체 단백질이 아미노산으로 이루어져 있고 3차구조를 이루고 있음을 잘 설명하고 있고, 특히 광학이성질체가 화학식은 같으나 그 3차구조가 달라서 다른 냄새를 낸다는 개념을 잘 설명하고 있음. 또한 조합메커니즘의 개념을 도입하여 다양한 냄새를 인식할 수 있음을 비교적 잘 설명함.

반면 [3-2]의 풀이는 먼저 4000여 가지의 종류에 해당하는 향기에 있어서, 각 향기가 작용하는 유전자의 종류를 파악한 후 그 데이터베이스를 이용한다는 논리는 무리가 있어 보임. 그러나 스마트 전자코 제작에 뇌파측정을 응용한 전기적 신호측정을 도입한다는 설명은 잘 하였음.

▸ 답안 사례 3

[3-1] 답

(다)의 향기유발분자들을 보면 우선 작용기가 ①은 -CHO, ②는 -OH, ③,④는 $-\overset{O}{\overset{\|}{C}}-$ 로 다름을 알 수 있다. 따라서 후각수용체는 향기유발분자의 작용기에 따라 서로 다른 결합을 생성하는 등의 방식으로 향기유발분자를 인식하고 그 강도도 이에 따라 달라질 수 있을 것이다. 또한 ③,④는 서로 거울이성질체이므로, 이에 따라 향기유

발분자와 후각수용체간의 상호작용도 달라질 수 있을 것이다. 또한 ①에 비해 ②, ③,④는 모두 입체구조이므로, 이에 따른 상호작용도 차이가 있을 것이다. 다음으로, ②는 -OH를 가지며 수소결합을 형성할 수 있으므로, 수용체와의 수소결합 유무에 따라서 감지될 수 있느냐 없느냐 또는 강도의 차이가 날 것이다. 즉, 수용체와 분자의 그 인력에 따라서도 차이가 생길 수 있다는 것이다. 따라서, 정리하자면 수용체가 수용할 수 있는 분자의 종류나 그 강도는 향기유발분자의 작용기, 광학적 특성의 차이, 입체구조, 분자간인력, 수소결합 등에 따라서 달라질 수 있을 것이다.

다음으로, 인간은 비록 350여개의 후각 수용체 유전자를 가지고 있지만, 향기유발분자는 여러 개의 후각수용체를 수용할 수 있으며 자극의 강도는 수용체의 종류에 따라 달라지므로, 그 조합의 수는 매우 크므로, 뇌는 350여개의 후각수용체 중 어떤 것이 얼마나 큰 자극을 받았느냐를 조합해내어 그 후각 수용체 유전자수의 10배 이상의 서로 다른 향기자극을 분별할 수 있을 것이다.

[3-2] 답

후각수용체는 다양한 분자의 구조-전기적 특성에 따라 반응하므로, 전자코도 이러한 여러 개의 후각수용체와 유사한 작용을 하는 센서로 조합되어야 할 것이다. 그 센서는 작용기를 판별하거나 그 삼차원 구조 등 각각의 분자의 구조-전기적 특성들을 감지할 수 있어야 하며, 그 수가 많으면 많을수록 더욱더 많은 종류를 감지할 수 있을 것이며, 그 감도도 커질 것이다. 따라서 히드록시기에만 반응하는 센서 등 그 경우의 수를 모두 포괄할 수 있도록 세분화되고 다양한 센서가 전자코에 필요할 것이다.

평가

[3-1]의 풀이에서 단백질 수용체의 3차구조에 대한 설명은 없지만, 향기유발분자들의 작용기에 따라 후각수용체와 향기유발분자들의 결합 강도의 차이를 잘 설명하고 있음. 특히 거울이성질체가 후각수용체와 다르게 상호작용한다는 사실도 설명하고 있음. 답을 정리하면서 수용체가 수용할 수 있는 분자의 종류나 그 강도는 향기유발분자의 작용기, 광학적 특성의 차이, 입체구조, 분자간 인력, 수소결합 등에 따라서 달라질 수 있음을 잘 요약하여 설명함. 조합메커니즘의 개념을 도입하여 다양한 냄새를 인식할 수 있음을 비교적 잘 설명함.

[3-2]의 풀이에서는 후각수용체는 다양한 분자의 구조-전기적 특성에 따라 반응하므로, 전자코도 이러한 여러 개의 후각수용체와 유사한 작용을 하는 센서로 조합되

어야 할 것임을 잘 설명하고 있음. 특히 답에서 수용체 분자와 냄새유발 분자의 결합을 전기적 특성 변화로 감지할 수 있어야 한다는 것을 잘 설명함.

▶ 답안 사례 4

[3-1] 답

후각수용체는 그 종류에 따라 특수한 결합자리가 존재하여 향기유발분자의 특정 구조를 인지하고 자극을 받는다.

예를 들어 벤젠고리를 인지하고 자극을 받는 수용체가 있다면, 이 수용체는 아몬드향 유발분자에 의해서는 자극이 되지만, 장미향에 의해서는 자극이 되지 않는다. 또한, 장미향은 히드록시기를 지니고 있어, 핵이 노출되어 부분 양전하를 띠는 히드록시기와 수소결합을 한다. 반면 아몬드향, 박하향, 캐러웨이향은 비록 C=O 구조가 존재하여 산소가 부분 음전하를 띄고 비공유 전자쌍이 존재하지만, 히드록시기의 산소 원자에 비해 수소결합력이 약하다. 힘의 세기가 다르므로 그 결합이 달라지고 다른 후각수용체에 자극을 주게 된다.

따라서, 향기유발분자들은 각각의 구조-전기적 특성에 따라 그러한 구조의 후각수용체 결합하고 자극을 준다. 한 분자가 여러 특성을 가질 수 있으므로 한 향기유발분자는 여러 수용체를 자극할 수 있고, 뇌는 서로 다른 후각수용체에서 전달된 자극을 서로 다른 위치의 세포에서 인식한다. 따라서 뇌는 여러 후각수용체에서 보내온 자극들을 조합하여 후각을 성립시킬 것이고, 이러한 조합을 통하여 후각수용체 유전자의 개수인 350의 10배가 넘는 다양한 종류의 향기를 감지할 수 있다.

[3-2] 답

스마트 전자코는 인간의 후각시스템과 같이 특정 분자의 구조를 인식할 수 있는 후각수용체를 다수 포함해야 한다. 스마트 전자코는 향기유발분자를 용해시킬 수 있는 액체층, 분자를 인식하는 센서, 그리고 전해진 정보를 조합하여 어떤 향기인지 결정하는 시스템이 필요하다. 이것은 각각 인간 후각 시스템의 점막층, 후각수용체, 뇌와 대응된다.

이 때 다양한 향기를 정밀하게 검출해내기 위해서는 향기유발분자를 인식하는 후각수용체가 분자들의 구조를 최대한 감지할 수 있도록 그 종류가 다양해야 하며, 적은 양으로도 충분히 감지하기 위해서는 후각수용체가 많아야 한다.

마지막으로 가능한 조합과 그 조합이 의미하는 향기가 무엇인가에 대한 충분한 데이터베이스가 필요하다.

평가

[3-1]의 풀이에서 후각수용체는 그 종류에 따라 특수한 결합자리가 존재하여 향기유발분자의 특정구조를 인지하고 자극을 받는다는 것을 잘 설명하고 있음. 또한 수용체와 냄새유발 분자간의 결합, 전기적 자극 전달 등도 잘 설명함. 또한 조합메커니즘의 개념을 도입하여 다양한 냄새를 인식할 수 있음을 비교적 잘 설명함.

이 답안은 특히 문제 [3-2]의 풀이가 우수함. 스마트 전자코가 인간의 후각시스템과 같이 특정 분자의 구조를 인식할 수 있는 후각수용체를 다수 포함해야 함을 잘 지적하였고, 스마트 전자코가 향기유발분자를 용해시킬 수 있는 액체층, 분자를 인식하는 센서, 그리고 정보를 조합하는 컴퓨터 시스템과 데이터베이스의 필요함도 잘 지적하였으며 이것은 각각 인간 후각 시스템의 점막층, 후각수용체, 뇌와 대응됨을 잘 표현하였음.