

자연계열(오후, 의학과제외)

---

## 2018학년도 논술고사

# 자연계열 (오후, 의학과제외) 모범답안





[문제 1-1] (4점) 이집트분수  $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{20}$ 을 이용하여 ( ) 안에 알맞은 수를 써 넣으시오.

( )명에게 ( )개의 빵을 나누어 줄 때

빵 ( )개는 ( )등분, 빵 ( )개는 ( )등분, 빵 ( )개는 ( )등분하면 공평하게 나눌 수 있다.

[풀이]  $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{20} = \frac{10}{20} + \frac{4}{20} + \frac{1}{20} = \frac{10+4+1}{20} = \frac{15}{20}$ 이므로 (20)명에게 (15)개의 빵을 나누어 줄 때 빵 (10)개는 (2)등분, 빵 (4)개는 (5)등분, 빵 (1)개는 (20)등분하면 공평하게 나눌 수 있다.

[문제 1-2] 등식  $\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$  (단,  $n$ 은 2 이상의 자연수)를 사용하여 다음을 증명하시오.

(1) (7점)  $n$ 이 짝수일 때,  $\frac{3}{n}$ 을 3개의 서로 다른 단위분수의 합으로 나타낼 수 있음을 보이시오.

(2) (7점)  $n$ 이 3이상의 홀수일 때,  $\frac{3}{n}$ 을 3개의 서로 다른 단위분수의 합으로 나타낼 수 있음을 보이시오.

[풀이] (1) 
$$\begin{aligned} \frac{3}{n} &= \frac{2}{n} + \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{\frac{n}{2}} + \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)} \right) \\ &= \frac{1}{\frac{n}{2}} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)} \end{aligned}$$

여기에서  $\frac{n}{2} < n+1 < n(n+1)$ 이고

$n$ 이 짝수이므로  $\frac{n}{2}$ 는 자연수, 따라서 3개의 서로 다른 단위분수의 합이다.

(2) 등식  $\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$ 의 양변에 2를 곱하면  $\frac{2}{n} = \frac{2}{n+1} + \frac{2}{n(n+1)}$ 를 얻고

$$\begin{aligned} \frac{3}{n} &= \frac{1}{n} + \frac{2}{n} \\ &= \frac{1}{n} + \left( \frac{2}{n+1} + \frac{2}{n(n+1)} \right) \\ &= \frac{1}{n} + \frac{1}{\frac{n+1}{2}} + \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}} \end{aligned}$$

여기에서  $\frac{n+1}{2} < n < \frac{n(n+1)}{2}$ 이고

$n$ 이 홀수이므로  $\frac{n+1}{2}$ 는 자연수, 따라서 3개의 서로 다른 단위분수의 합이다.

[문제 1-3] (10점) [문제 1-2] (1)과 제시문 (나)를 이용하여  $n$ 이 짝수이고  $k$ 가 2 이상의 자연수일 때,  $\frac{3}{n}$ 을  $k$ 개의 서로 다른 단위분수의 합으로 나타낼 수 있음을 보이시오.

[풀이]



(a)  $k$ 가 짝수이면 제시문 (나)를 사용하여

$$\begin{aligned} \frac{3}{n} &= \frac{1}{\frac{n}{2}} + \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{\frac{n}{2}} + \frac{1}{n} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{\frac{n}{2}} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{6n} \\ &= \frac{1}{\frac{n}{2}} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{6n} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{\frac{n}{2}} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{12n} + \frac{1}{18n} + \frac{1}{36n} \end{aligned}$$

가장 큰 단위분수에 제시문 (나)의 등식  $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ 를 곱하는 식으로 하면  $k$ 개( $k$ 는 짝수)의 서로 다른 단위분수의 합을 얻을 수 있다.

(b)  $k$ 가 홀수이면 [문제 1-2]에서

$$\frac{3}{n} = \frac{1}{\frac{n}{2}} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$$

제시문 (나)를 사용하여

$$\frac{3}{n} = \frac{1}{\frac{n}{2}} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{\frac{n}{2}} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n(n+1)} + \frac{1}{3n(n+1)} + \frac{1}{6n(n+1)}$$

가장 큰 단위분수에 제시문 (나)의 등식  $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ 를 곱하는 식으로 하면  $k$ 개( $k$ 는 홀수)의 서로 다른 단위분수의 합을 얻을 수 있다.

[문제 1-4] (1) (14점) 자연수  $n$ 에 대하여,  $\frac{1}{n}$ 을 두 단위분수의 합  $\frac{1}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 으로 나타낼 수 있다고 하자. 이 때  $x = n+a$ ,  $y = n+b$  이고  $ab = n^2$ 을 만족시키는 자연수  $a$ ,  $b$ 가 존재함을 보이시오.

(2) (8점)  $\frac{1}{6}$ 을 서로 다른 두 개의 단위분수의 합  $\frac{1}{6} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$  (단,  $x < y$ )으로 나타낼 수 있는 모든 경우를 구하시오.

[풀이] (1)  $\frac{1}{y} = \frac{1}{n} - \frac{1}{x} = \frac{x-n}{nx}$  이므로  $y = \frac{nx}{x-n} = \frac{n(x-n)+n^2}{x-n} = n + \frac{n^2}{x-n}$ .

$y$ 와  $n$ 은 정수이므로  $\frac{n^2}{a-n}$ 은 정수가 된다.

$a = x-n$ 이라 하면  $a$ 는  $n^2$ 의 약수이고

$b = \frac{n^2}{a}$  라 두면  $b$ 는 자연수이며

$x = n+a$ ,  $y = n+b$  이다.

$$\frac{1}{n+a} + \frac{1}{n+b} = \frac{2n+a+b}{(n+a)(n+b)} =$$

(2)  $6^2 = 36$ 은  $1 \times 36$ ,  $2 \times 18$ ,  $3 \times 12$ ,  $4 \times 9$ 으로 표현되므로



# 2018학년도 자연계열(오후) 모범답안

자연계열(오후)  
(의학과 제외)

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{6+1} + \frac{1}{6+36} = \frac{1}{7} + \frac{1}{42}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{6+2} + \frac{1}{6+18} = \frac{1}{8} + \frac{1}{24}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{6+3} + \frac{1}{6+12} = \frac{1}{9} + \frac{1}{18}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{6+4} + \frac{1}{6+9} = \frac{1}{10} + \frac{1}{15}$$

[문제 2-1] (10점) 단위원  $x^2 + y^2 = 1$ 과 포물선  $x+1 = 4cy^2 (c > 0)$ 이 점  $(-1,0)$ 이 아닌 교점을 가질  $c$ 의 범위를 구하고 이 때 교점의 좌표를 구하시오.

[풀이]

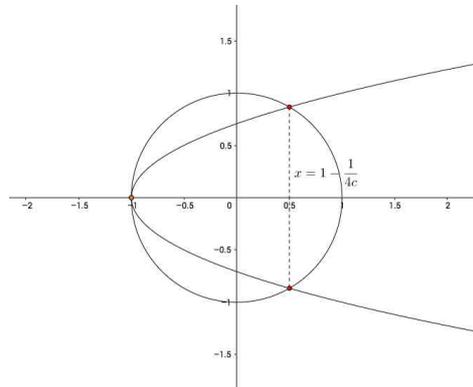
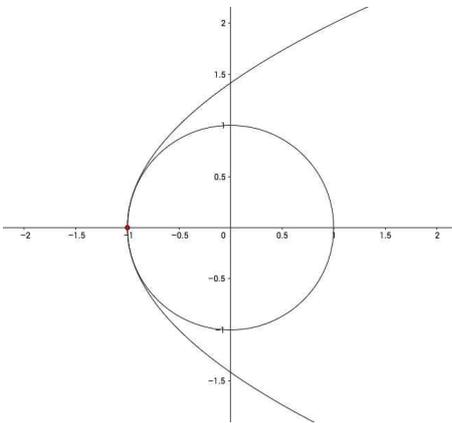
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x+1 = 4cy^2 \end{cases}$$

를 연립하면  $x^2 + \frac{x+1}{4c} = 1$ , 정리하면  $x^2 + \frac{x}{4c} + \frac{1}{4c} - 1 = 0$ 이고

$(x+1)(x-1+\frac{1}{4c}) = 0$ . 따라서  $x = 1 - \frac{1}{4c}$ 가 교점이 될 가능성이 있다.

교점이 될려면  $|x| \leq 1$ 이어야 하므로  $c > \frac{1}{8}$ 을 얻는다.

이제 교점은  $(1 - \frac{1}{4c}, \pm \frac{\sqrt{8c-1}}{4c})$



[문제 2-2]  $p < -1$ 일 때, 단위원  $x^2 + y^2 = 1$ 과 포물선  $x-p = 4cy^2 (c > 0)$ 이 접할 때 그 접점과 접점이 존재할  $c, p$ 에 관한 조건을 다음 과정을 통해 구해보자.

- (1) (6점)  $x = a$ 에서 두 곡선의 접선의 기울기가 같도록 하는  $a$ 의 값을 구하시오.
- (2) (7점) (1)에서 구한  $a$ 에 대하여  $|a| \leq 1$ 이 될  $c$ 의 조건을 구하시오.
- (3) (7점)  $(a, \pm \sqrt{1-a^2})$ 이 포물선 위의 점이 되도록 하는  $p$ 를  $c$ 에 관한 식으로 나타내시오.

[풀이]

(1)  $x^2 + y^2 = 1$ 에서  $y' = -\frac{x}{y}$ ,  $x-p = 4cy^2$ 에서  $y' = \frac{1}{8cy}$  두 기울기가 같으려면

$$-\frac{x}{y} = \frac{1}{8cy}. \text{ 이제 } y \neq 0 \text{이므로 } a = -\frac{1}{8c}.$$

$$(2) a^2 = \frac{1}{64c^2} \leq 1 \text{에서 } c > \frac{1}{8}$$

$$(3) y^2 = 1 - a^2 = 1 - \frac{1}{64c^2} = \frac{64c^2 - 1}{64c^2} > 0 \text{에서 } y = \pm \frac{\sqrt{64c^2 - 1}}{8c} \text{이므로}$$

접점의 좌표는  $(-\frac{1}{8c}, \pm \frac{\sqrt{64c^2 - 1}}{8c})$  이고 이 좌표를  $x-p = 4cy^2$ 에 대입하면

$$-\frac{1}{8c} - p = 4c \times \frac{64c^2 - 1}{64c^2} = \frac{64c^2 - 1}{16c} = 4c - \frac{1}{16c}$$

따라서  $p = -4c - \frac{1}{8c} + \frac{1}{16c} = -4c - \frac{1}{16c}$

이제 (1), (2), (3)의 결과를 종합하면 접점이 존재하려면  $c > \frac{1}{8}$ 이고  $p = -4c - \frac{1}{16c}$

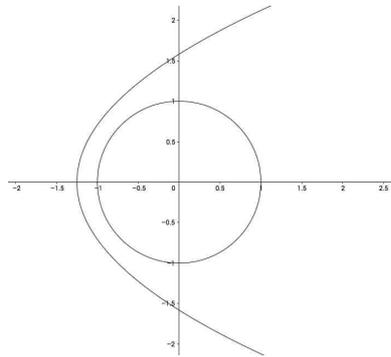
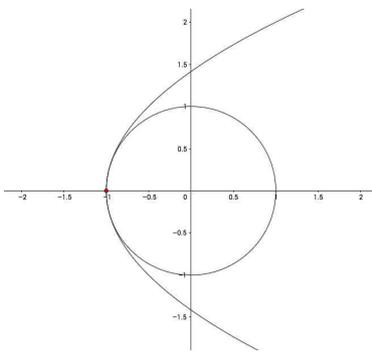
[문제 2-3] (20점)  $p \leq -1$ 이라 하자. 단위원  $x^2 + y^2 = 1$ 과 포물선  $x - p = 4cy^2 (c > 0)$ 의 교점의 개수를  $c$ 와  $p$ 에 따라 구하시오.

[풀이]

(a)  $c \leq \frac{1}{8}$ 인 경우: [문제 2-2]에서 두 점에서 접하지 않으므로

$p = -1$ 일 때는 [문제2-1]에서 교점은  $(-1, 0)$  하나뿐이고,

$p < -1$ 일 때 만나지 않는다.



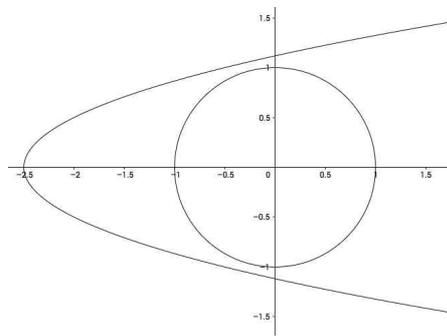
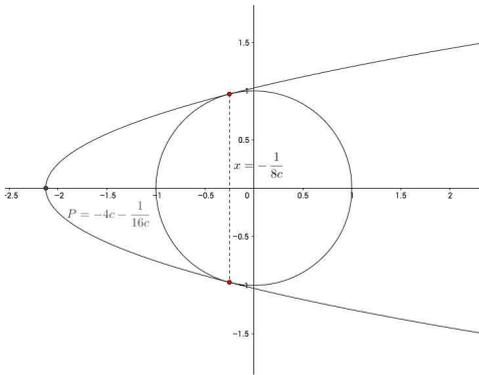
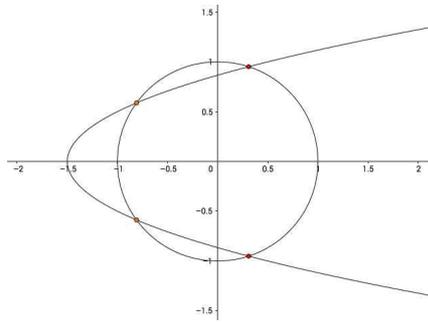
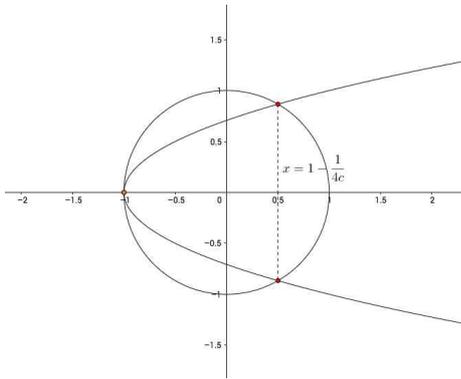
(b)  $c > \frac{1}{8}$ 인 경우: [문제2-2]에서 접점이 존재하려면  $c > \frac{1}{8}$ 이고  $p = -4c - \frac{1}{16c}$ 이다.

$p = -1$ 일 때 3개의 교점(접점 1개, 교점 2개)

$-4c - \frac{1}{16c} < p < -1$ 일 때 4개의 교점

$p = -4c - \frac{1}{16c}$ 일 때 2개의 교점(접점)

$p < -4c - \frac{1}{16c}$ 일 때 만나지 않는다.



해설 <https://ggbm.at/eFeDY4Za>