

## 2018학년도 논술고사

# 자연계열 (오후, 의학과제외)



성 명	
전 형	
수험번호	

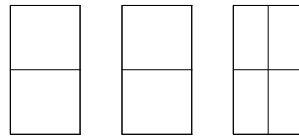
표지를 제외한 페이지 수: 3



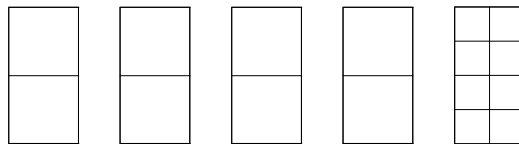
[문항1] 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

이집트분수는 분수를 서로 다른 단위분수(분자가 1이고 분모가 자연수인 분수)의 합으로 나타낸 것이다. 이런 이집트분수를 어떻게 사용했는지 역사적으로 분명하지는 않으나 다음과 같은 분배 문제와 관련 있다고 볼 수 있다.

(가) 4명에게 3개의 빵을 나누어 주는 방법을 생각해 보자. 아래 그림과 같이 빵 2개는 2등분하고, 빵 1개는 4등분하여 공평하게 나눠주면 모든 사람은  $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ (개)의 빵을 가지게 된다.



8명에게 5개의 빵을 나누어줄 때는 아래 그림과 같이 빵 4개는 2등분하고, 빵 1개는 8등분하면 공평하게 나눌 수 있다. 이 때 모든 사람은  $\frac{5}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$ (개)의 빵을 가지게 된다.



(나) 자연수도 서로 다른 단위분수의 합으로 나타낼 수 있는 경우가 있다. 예를 들어,

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

이다.

[문제 1-1] (4점) 이집트분수  $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{20}$ 을 이용하여 ( ) 안에 알맞은 수를 써 넣으시오.

( )명에게 ( )개의 빵을 나누어 줄 때

빵 ( )개는 ( )등분, 빵 ( )개는 ( )등분, 빵 ( )개는 ( )등분하면 공평하게 나눌 수 있다.

[문제 1-2] 등식  $\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$  (단,  $n$ 은 2 이상의 자연수)를 사용하여 다음을 증명하시오.

(1) (7점)  $n$ 이 짝수일 때,  $\frac{3}{n}$ 을 3개의 서로 다른 단위분수의 합으로 나타낼 수 있음을 보이시오.

(2) (7점)  $n$ 이 3이상의 홀수일 때,  $\frac{3}{n}$ 을 3개의 서로 다른 단위분수의 합으로 나타낼 수 있음을 보이시오.



# 2018학년도 자연계열(오후) 논술고사

자연계열(오후)  
(의학과 제외)

[문제 1-3] (10점) [문제 1-2] (1)과 제시문 (나)를 이용하여  $n$ 이 짝수이고  $k$ 가 2 이상의 자연수일 때,  $\frac{3}{n}$ 을  $k$ 개의 서로 다른 단위분수의 합으로 나타낼 수 있음을 보이시오.

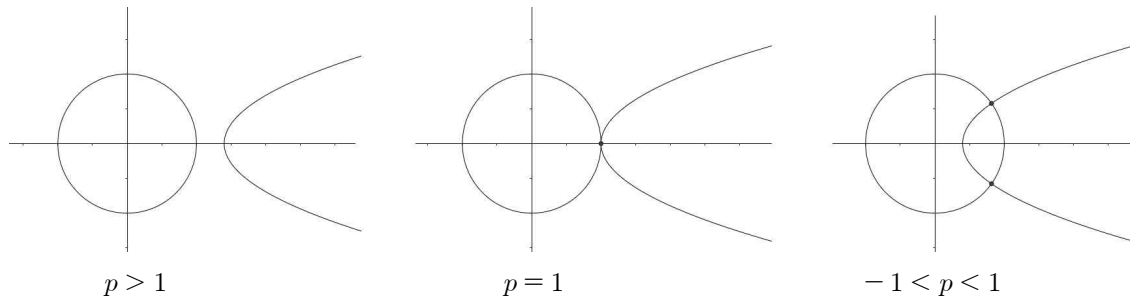
[문제 1-4] (1) (14점) 자연수  $n$ 에 대하여,  $\frac{1}{n}$ 을 두 단위분수의 합  $\frac{1}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 으로 나타낼 수 있다고 하자. 이 때  $x = n+a$ ,  $y = n+b$  이고  $ab = n^2$ 을 만족시키는 자연수  $a$ ,  $b$ 가 존재함을 보이시오.

(2) (8점)  $\frac{1}{6}$ 을 서로 다른 두 개의 단위분수의 합  $\frac{1}{6} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$  (단,  $x < y$ )으로 나타낼 수 있는 모든 경우를 구하시오.

[문항2] 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

이차곡선은 원, 타원, 쌍곡선, 포물선 등으로 원뿔을 평면으로 잘랐을 때의 단면에 나오는 곡선으로 원뿔곡선이라고도 한다. 이런 이차곡선들이 만나거나 접하는 장면을 알아보는 것은 흥미로운 일이다. 우리는 원과 포물선이 만나는 장면을 다음과 같이 정형화하여 알아보고자 한다.

다음 그림과 같이 단위원  $x^2 + y^2 = 1$ 과 포물선  $x - p = 4cy^2 (c > 0)$ 의 교점의 개수는  $p > 1$ ,  $p = 1$ ,  $-1 < p < 1$ 의 세 경우에는 어떤  $c > 0$ 에 대해서도 각각 0, 1, 2이다.



그러나  $p \leq -1$ 인 경우는  $p$ 와  $c$ 의 관계에 따라 교점의 개수가 달라진다.

[문제 2-1] (10점) 단위원  $x^2 + y^2 = 1$ 과 포물선  $x + 1 = 4cy^2 (c > 0)$ 이 점  $(-1, 0)$ 이 아닌 교점을 가질  $c$ 의 범위를 구하고 이 때 교점의 좌표를 구하시오.

[문제 2-2]  $p < -1$ 일 때, 단위원  $x^2 + y^2 = 1$ 과 포물선  $x - p = 4cy^2 (c > 0)$ 이 접할 때 그 접점과 접점이 존재할  $c, p$ 에 관한 조건을 다음 과정을 통해 구해보자.

- (1) (6점)  $x = a$ 에서 두 곡선의 접선의 기울기가 같도록 하는  $a$ 의 값을 구하시오.
- (2) (7점) (1)에서 구한  $a$ 에 대하여  $|a| \leq 1$ 이 될  $c$ 의 조건을 구하시오.
- (3) (7점)  $(a, \pm \sqrt{1 - a^2})$ 이 포물선 위의 점이 되도록 하는  $p$ 를  $c$ 에 관한 식으로 나타내시오.

[문제 2-3] (20점)  $p \leq -1$ 이라 하자. 단위원  $x^2 + y^2 = 1$ 과 포물선  $x - p = 4cy^2 (c > 0)$ 의 교점의 개수를  $c$ 와  $p$ 에 따라 구하시오.