2018학년도 논술고사

자연계열(오전)

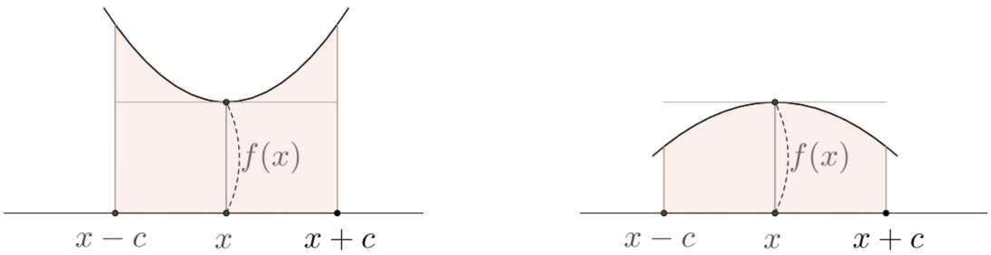
성　　명	
전　　형	
수험번호	

표지를 제외한 페이지 수: 4

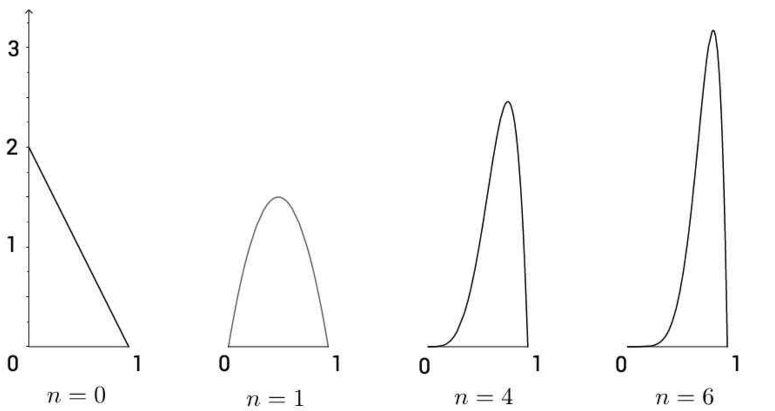
2018학년도 자연계열(오전) 논술고사

[문항1] 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

(가) 열린구간 (a,b)에서 정의되고 이계도함수가 연속인 함수 $f(x)$를 생각하자. 각각의 x에서 함수 그래프의 볼록 또는 오목은 이계도함수 $f''(x)$의 부호에 따른다. 예를 들어 아래 두 그래프를 보면 $f''(x)$와 $\frac{1}{2c}\int_{x-c}^{x+c} f(t)dt - f(x)$의 부호가 같음을 알 수 있다.



(나) 각각의 $n=0,1,\cdots$에 대하여 닫힌구간 $[0,1]$에 정의된 함수 $f(x)=(n+1)(n+2)x^n(1-x)$를 생각하자. 모든 n에 대하여 $\int_0^1 f(x)dx$의 값은 같으며, n이 커짐에 따라 그래프가 점점 오른쪽으로 치우쳐 간다. 예를 들어 $n=0,1,4,6$일 때 함수 $f(x)$의 그래프는 각각 아래와 같다.



$n=0$인 경우 모든 실수 x에 대하여 $f''(x)=0$이므로 $\int_0^1 |f''(x)|dx = 0$이다. 그리고 n이 증가할수록 $\int_0^1 |f''(x)|dx$의 값이 점점 증가한다.

(다) (평균값 정리) 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이고, 열린구간 (a,b)에서 미분가능할 때,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

인 c가 열린구간 (a,b)에 적어도 하나 존재한다.

(라) 오일러의 수 e는 수열 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$의 극한으로 정의된다. 이를 이용하면 다음을 알 수 있다.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}$$

[문제 1-1] 제시문 (나)를 읽고 다음 물음에 답하시오.

(1) (5점) 모든 n에 대하여 $\int_0^1 f(x)dx = 1$임을 보이시오.

(2) (10점) 2이상의 자연수 n에 대하여 $\int_0^1 |f''(x)|dx = (n+1)(n+2)a_n$이라고 할 때, a_n을 구하고, 제시문 (라)를 이용하여 $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하시오.

(3) (10점) 각각의 $r \in (0,1)$에 대하여, n이 한없이 커질 때 $\int_r^1 f(x)dx$의 값이 1에 수렴함을 보이시오. (단, 1보다 큰 상수 b에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{b^n}=0$ 이다.)

[문제 1-2] 제시문 (가)를 읽고 다음 물음에 답하시오. 모든 실수에서 정의되고 모든 x에 대하여 $f''(x) > 0$ 인 함수 $f(x)$를 생각하자.

(1) (5점) 음이 아닌 실수에서 정의된 함수 $h(x)$가

$$h(x) = \int_{-x}^{x} f(t)dt - 2f(0)x$$

이다. $x > 0$일 때 $h'(x)$를 구하시오.

(2) (10점) $x > 0$일 때 $h'(x) > 0$임을 보이시오.

(3) (10점) (1), (2)와 제시문 (다)를 이용하여, 모든 $x > 0$에 대하여

$$\frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)dt > f(0)$$

이 성립함을 보이시오.

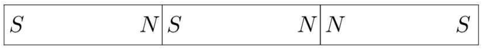
2018학년도 자연계열(오전) 논술고사

자연계열
(오전)

[문항2] 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

(가) 같은 길이의 막대자석 여러 개를 일렬로 빈틈없이 나열하자. 세 개의 자석이 [그림 1]과 같이 나열되어 있다면 두 곳에서 같은 극이 만나고, [그림 2]에서는 한 곳에서만 같은 극이 만난다.

[그림 1]



[그림 2]

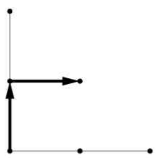
두 극이 같은 곳의 개수를 E로 표시한다면 [그림 1]은 E가 2, [그림 2]는 E가 1이 된다. 왼쪽이 S극, 오른쪽이 N극인 자석을 **타입1**으로, 그 반대인 경우 **타입0**으로 표시한다면, [그림 1]의 나열방식은 $(1,0,1)$, [그림 2]는 $(1,1,0)$으로 나타낼 수 있다. 세 개의 자석들을 나열하는 방식은 모두 $2^3=8$가지인

$$(1,0,0),\ (1,0,1),\ (1,1,0),\ (1,1,1),\ (0,0,0),\ (0,0,1),\ (0,1,0),\ (0,1,1)$$

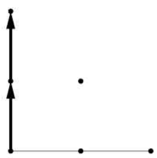
들이며 이들을 E의 값에 따라 분류하면 다음의 표와 같다.

E	0	1	2
나열방식의 개수 $w(E)$	2	4	2
나열 방식	$(1,1,1)$ $(0,0,0)$	$(1,0,0),\ (1,1,0)$ $(0,1,1),\ (0,0,1)$	$(1,0,1)$ $(0,1,0)$

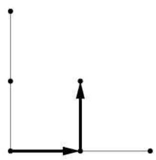
제일 왼쪽 자석이 **타입1**인 경우, 세 개의 자석을 나열하는 각각의 방식마다 아래 그림처럼 이차원 격자 위의 경로를 대응시키자. 즉 $(1,a,b)$ (단, a,b는 0 또는 1)를 왼쪽에서 오른쪽으로 읽어가면서 같은 값이 나올 때 오른쪽으로, 다른 값이 나올 때 위쪽으로 길이 1만큼 이동한다면 아래와 같이 길이 2인 경로와 대응시킬 수 있다.



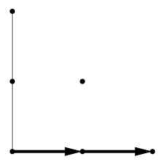
$(1,0,0)$
$E=1$



$(1,0,1)$
$E=2$



$(1,1,0)$
$E=1$



$(1,1,1)$
$E=0$

제일 왼쪽 자석이 **타입0**인 경우도 같은 규칙을 적용하면 비슷한 논의가 가능하다.

(나) 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(m,p)$ (단, $p\in(0,1)$)을 따를 때, m이 충분히 크면 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(mp,\ mp(1-p))$를 따른다.

아래 문제들에서 n은 3이상의 자연수라고 하자.

[문제 2-1] (5점) n개의 자석들을 나열할 때, **타입1**의 개수가 j개인 나열방식의 개수를 구하시오.

[문제 2-2] (10점) n개의 자석들을 나열할 때, E의 값에 따른 나열방식의 개수 $w(E)$를 구하고 그 이유를 설명하시오.

[문제 2-3] n개의 자석들을 나열할 때, 각 자석을 **타입1**으로 선택할 확률이 p(단, $p \in (0,1)$), **타입0**으로 선택할 확률이 $q=1-p$라고 하자. 자석의 타입을 선택하는 사건들은 서로 독립이라고 하자.

(1) (10점) $p=q=\frac{1}{2}$인 경우 E의 값이 k일 확률을 **[문제 2-2]**를 이용하여 구하고 이유를 설명하시오.

(2) (10점) 제시문 (나)에 따르면 (1)에서 구한 E의 확률분포는 n이 커지면 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(m,\sigma^2)$을 따른다. 이 때 m,σ를 구하고 이유를 설명하시오.

(3) (15점) $p \neq q$일 경우 E의 값이 1일 확률은 $\frac{2pq}{q-p} \cdot r$로 나타낼 수 있다. r을 p와 q에 관한 식으로 나타내시오.