

2018 자연계열 모의논술

[문항 1] 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

완전제곱을 이용하여 최솟값을 찾는 다음의 두 가지를 생각해보자.

(가) 공간상의 두 점 $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ 과 임의의 실수 k, l 으로 다음과 같이 점 $P(u, v, w)$ 들을 생각한다.

$$(u, v, w) = k(1, 0, 0) + l(0, 1, 0). \quad (1)$$

이때 임의의 점 $Q(x, y, z)$ 와 점 $P(u, v, w)$ 사이의 거리는 $\sqrt{(x-k)^2 + (y-l)^2 + (z-w)^2}$ 이며 $(x-k)^2 + (y-l)^2 + (z-w)^2$ 이 최소가 되도록 k, l 을 선택할 때 그 거리는 가장 작은 값을 가지게 된다.

(나) 닫힌구간 $[-2, 2]$ 에 정의된 함수 $f(x)$ 를 네 개의 작은 구간 $[-2, -1)$, $[-1, 0)$, $[0, 1)$, $[1, 2]$ 위에서 적분한 값들을 각각 p, q, r, s 라고 하자. 이 때 다음의 A 를 최소로 만드는 실수 a, b 를 구할 수 있다.

$$A = (p - (-a - b))^2 + (q - (a - b))^2 + (r - (a + b))^2 + (s - (-a + b))^2.$$

[문제 1-1] 제시문 (가)를 참고하여 다음 논제에 답하시오.

(1) (10점) 공간상의 두 점 $A(1, -2, 3)$, $B(1, -1, -1)$ 을 생각하자. 점 $Q(2, 1, 2)$ 와 벡터 $(u, v, w) = k(1, -2, 3) + l(1, -1, -1)$ 을 이용하여 만든 점 $P(u, v, w)$ 사이의 거리가 최소가 되도록 실수 k, l 을 찾고 그 논거를 제시하시오.

(2) (10점) 공간상의 두 점 $A(1, -2, 3)$, $B(1, -1, -1)$ 을 생각하자. 임의의 점 $Q(x, y, z)$ 가 주어진 경우, 이 점과 벡터 $(u, v, w) = k(1, -2, 3) + l(1, -1, -1)$ 을 이용하여 만든 점 $P(u, v, w)$ 사이의 거리가 최소가 되도록 실수 k, l 을 찾고 그 논거를 제시하시오.

[문제 1-2] 제시문 (나)를 참고하여 다음 논제에 답하시오.

(1) (10점) 닫힌 구간 $[-2, 2]$ 에 정의된 임의의 함수 $f(x)$ 에 대하여 A 값이 최소가 되는 실수 a, b 를 p, q, r, s 를 이용하여 표현하고 그 논거를 제시하시오.

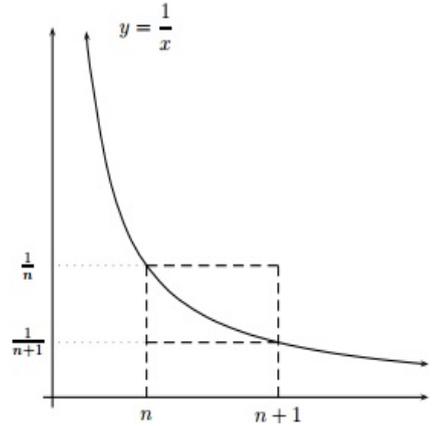
- (2) (10점) (1)에서 구한 a, b 가 각각 $\frac{1}{4} \int_{-2}^2 f(x)g(x)dx$, $\frac{1}{4} \int_{-2}^2 f(x)h(x)dx$ 로 표현되도록 함수 $g(x), h(x)$ 를 찾고, $\int_{-2}^2 (g(x))^2 dx$, $\int_{-2}^2 (h(x))^2 dx$, $\int_{-2}^2 g(x)h(x)dx$ 의 적분값들을 구하시오.
- (3) (10점) $0 \leq p \leq 1$ 를 만족하는 p 에 대하여 함수 $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}(x-p)\right)$ 를 생각하자. 이 함수의 A 값이 최소가 되는 a, b 를 $p(0 \leq p \leq 1)$ 에 관한 함수로 표현하시오.

[문항 2] 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

(가) 합 $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ 에 대하여 극한 $\lim_{n \rightarrow \infty} H_n = \infty$ 을 증명하는 방법은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \dots\right) + \dots \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \dots\right) + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \end{aligned}$$

(나) 다음과 같은 그림을 참고하면 다양한 부등식을 구할 수 있다.



(다) 수학적 귀납법을 이용하면 부등식 $\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \dots + \frac{1}{k+j} > \frac{2j+2}{j+2k}$ 이 성립함을 알 수 있다. 단, k 와 j 는 자연수이다.

[문제 2-1] 제시문 (가)를 참고하여 다음 논제에 답하시오.

(1) (4점) 모든 자연수 k 에 대하여, $H_{2^k} \geq 1 + \frac{k}{2}$ 임을 보이시오.

(2) (6점) 모든 자연수 k, m 에 대하여, $H_{m^k} \geq 1 + k \left(\frac{m-1}{m}\right)$ 임을 보이시오.

[문제 2-2] 제시문 (나)를 참조하여 다음 논제에 답하시오.

(1) (10점) 모든 자연수 n 에 대하여, 부등식 $\ln 2 - \frac{1}{2n} < H_{2n} - H_n < \ln 2$ 임을 보이시오.

(2) (10점) 모든 자연수 n 에 대하여, 부등식 $\ln(n+1) + \frac{n}{2(n+1)} < H_n$ 임을 보이시오.

(힌트: 그림에서 사다리꼴을 생각한다.)

[문제 2-3] 제시문 (다)를 참조하여 다음 논제에 답하시오.

(1) (10점) 합 $\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \dots + \frac{1}{k+j}$ 가 1보다 크거나 같도록 하는 자연수 j 를 자연수 k 를 이용하여 나타내시오.

(2) (10점) (1)을 이용하여 자연수 n 에 대하여, $H_{\frac{3^n-1}{2}} \geq n$ 임을 보이시오.

2018 자연계열 모의논술 채점기준 및 모범답안

[문항 1] 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

완전제곱을 이용하여 최솟값을 찾는 다음의 두 가지를 생각해보자.

(가) 공간상의 두 점 $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ 과 임의의 실수 k, l 으로 다음과 같이 점 $P(u, v, w)$ 들을 생각한다.

$$(u, v, w) = k(1, 0, 0) + l(0, 1, 0). \quad (1)$$

이때 임의의 점 $Q(x, y, z)$ 와 점 $P(u, v, w)$ 사이의 거리는 $\sqrt{(x-k)^2 + (y-l)^2 + (z-w)^2}$ 이며 $(x-k)^2 + (y-l)^2 + (z-w)^2$ 이 최소가 되도록 k, l 을 선택할 때 그 거리는 가장 작은 값을 가지게 된다.

(나) 닫힌구간 $[-2, 2]$ 에 정의된 함수 $f(x)$ 를 네 개의 작은 구간 $[-2, -1)$, $[-1, 0)$, $[0, 1)$, $[1, 2]$ 위에서 적분한 값들을 각각 p, q, r, s 라고 하자. 이 때 다음의 A 를 최소로 만드는 실수 a, b 를 구할 수 있다.

$$A = (p - (-a - b))^2 + (q - (a - b))^2 + (r - (a + b))^2 + (s - (-a + b))^2.$$

[문제 1-1] 제시문 (가)를 참고하여 다음 논제에 답하시오.

- (1) (10점) 공간상의 두 점 $A(1, -2, 3)$, $B(1, -1, -1)$ 을 생각하자. 점 $Q(2, 1, 2)$ 와 벡터 $(u, v, w) = k(1, -2, 3) + l(1, -1, -1)$ 을 이용하여 만든 점 $P(u, v, w)$ 사이의 거리가 최소가 되도록 실수 k, l 을 찾고 그 논거를 제시하시오.
- (2) (10점) 공간상의 두 점 $A(1, -2, 3)$, $B(1, -1, -1)$ 을 생각하자. 임의의 점 $Q(x, y, z)$ 가 주어진 경우, 이 점과 벡터 $(u, v, w) = k(1, -2, 3) + l(1, -1, -1)$ 을 이용하여 만든 점 $P(u, v, w)$ 사이의 거리가 최소가 되도록 실수 k, l 을 찾고 그 논거를 제시하시오.

■ 채점 기준

- (1), (2) 모두
 거리 제곱식의 전개 (5점)
 완전제곱식을 만든 후에 k, l 찾기 (5점)

- (1), (2) 모두 전개 후 완전제곱식을 만들 때 처음 두 항을 제외하고 쓰지 않아도 감점 없음 -
공간벡터(점과 평면상의 거리)를 사용하여 풀 경우에도 k, l 을 제대로 찾으면 만점
- 완전제곱식을 만드는 계산 실수에도 아이디어가 맞으면 8점

■ 모범 답안

(1) 점 Q 와 점 P 사이 거리의 제곱은 $(2-k-l)^2 + (1+2k+l)^2 + (2-3k+l)^2$ 이다.

이를 전개하면 $14k^2 - 12k + 3l^2 + 2l + 9$ 이며 완전 제곱식으로 표현하면

$$14\left(k - \frac{3}{7}\right)^2 + 3\left(l + \frac{1}{3}\right)^2 - 14 \times \frac{9}{49} - 3 \times \frac{1}{9} + 9$$

이 된다. 그러므로 $k = \frac{3}{7}, l = -\frac{1}{3}$ 이 거리제곱을, 따라서 거리를 최소가 되게 한다.

(2) 점 Q 와 점 P 사이 거리의 제곱은 $(x-k-l)^2 + (y+2k+l)^2 + (z-3k+l)^2$ 이다.

이를 전개하면 $14k^2 + (-2x+4y-6z)k + 3l^2 + (-2x+2y+2z)l + x^2 + y^2 + z^2$ 이며 완전 제곱식으로 표현하면

$$14\left(k + \frac{-x+2y-3z}{14}\right)^2 + 3\left(l + \frac{-x+y+z}{3}\right)^2 - 14 \times \left(\frac{-x+2y-3z}{14}\right)^2 - 3\left(\frac{-x+y+z}{3}\right)^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

이 된다. 그러므로 $k = \frac{x-2y+3z}{14}, l = \frac{x-y-z}{3}$ 가 거리제곱을, 따라서 거리를 최소가 되게 한다.

[문제 1-2] 제시문 (나)를 참고하여 다음 논제에 답하시오.

(1) (10점) 닫힌 구간 $[-2, 2]$ 에 정의된 임의의 함수 $f(x)$ 에 대하여 A 값이 최소가 되는 실수 a, b 를 p, q, r, s 를 이용하여 표현하고 그 논거를 제시하시오.

(2) (10점) (1)에서 구한 a, b 가 각각 $\frac{1}{4} \int_{-2}^2 f(x)g(x)dx, \frac{1}{4} \int_{-2}^2 f(x)h(x)dx$ 로 표현되도록 함수

$g(x), h(x)$ 를 찾고, $\int_{-2}^2 (g(x))^2 dx, \int_{-2}^2 (h(x))^2 dx, \int_{-2}^2 g(x)h(x)dx$ 의 적분값들을 구하시오.

(3) (10점) $0 \leq p \leq 1$ 를 만족하는 p 에 대하여 함수 $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}(x-p)\right)$ 를 생각하자. 이 함수의 A 값이 최소가 되는 a, b 를 $p(0 \leq p \leq 1)$ 에 관한 함수로 표현하시오.

■ 채점 기준

- (1) A 식을 전개 후 a, b 에 관한 내림차순으로 정리 (5점)
 전개된 식을 완전제곱식으로 만든 후에 a, b 찾기 (5점)
- (2) a, b 를 $f(x)$ 의 구간 별 적분을 이용하여 표현한 후에 $g(x), h(x)$ 를 찾기 (7점)
 - a, b 를 풀이처럼 $\frac{1}{4} \int_{-2}^2 f(x)g(x)dx, \frac{1}{4} \int_{-2}^2 f(x)h(x)dx$ 형태로 나타내는데 3점
 - $g(x), h(x)$ 를 명확히 구하는데 각 2점
 질문의 세 적분값들 구하기 (3점: 각 1점씩)
- (3) (2)번에서 구한 함수 $g(x), h(x)$ 를 이용하여 a, b 값을 적분 계산으로 구한다. 이 때 코사인 함수의 합의 공식, 그리고 우함수/기함수 성질을 이용하면 계산을 많이 간단히 할 수 있다. 이렇게 합쳐서 계산할 경우
 - $\cos\left(\frac{\pi}{2}(x-p)\right)$ 을 코사인 덧셈공식을 사용하여 분리하여 계산할 수 있음을 보이면 2점
 - $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right), f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ 각각에 대해 a, b 각 2점씩 총 8점
 어떻게 계산하더라도 a, b 각각의 값을 정확하게 계산하면 각 5점씩 부여 (10점)

■ 모범 답안

- (1) 제시문 (나)의 A 식을 전개하면

$$4a^2 + 4b^2 - 2(-p+q+r-s)a - 2(-p-q+r+s)b + p^2 + q^2 + r^2 + s^2$$

이 되며 이를 완전제곱식으로 표현하면

$$4\left(a - \frac{-p+q+r-s}{4}\right)^2 + 4\left(b - \frac{-p-q+r+s}{4}\right)^2 - 4 \times \left(\frac{-p+q+r-s}{4}\right)^2 - 4 \times \left(\frac{-p-q+r+s}{4}\right)^2 + p^2 + q^2 + r^2 + s^2$$

이 된다. 그러므로 $a = \frac{-p+q+r-s}{4}, b = \frac{-p-q+r+s}{4}$ 가 A 를 최소로 만들어 준다.

- (2) 제시문 (나)에 주어진 것처럼 p, q, r, s 는 함수 $f(x)$ 를 네 개의 작은 구간 $[-2, -1), [-1, 0), [0, 1), [1, 2]$ 위에서 적분한 값들이기 때문에 (1)에서 구한 a, b 는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{-p+q+r-s}{4} \\
 &= -\frac{1}{4} \int_{-2}^{-1} f(x) dx + \frac{1}{4} \int_{-1}^0 f(x) dx + \frac{1}{4} \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{4} \int_1^2 f(x) dx, \\
 b &= \frac{-p-q+r+s}{4} \\
 &= -\frac{1}{4} \int_{-2}^{-1} f(x) dx - \frac{1}{4} \int_{-1}^0 f(x) dx + \frac{1}{4} \int_0^1 f(x) dx + \frac{1}{4} \int_1^2 f(x) dx.
 \end{aligned}$$

그러므로 함수 $g(x), h(x)$ 를

$$g(x) = \begin{cases} -1, & -2 \leq x < -1 \\ 1, & -1 \leq x < 0 \\ 1, & 0 \leq x < 1 \\ -1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}, \quad h(x) = \begin{cases} -1, & -2 \leq x < -1 \\ -1, & -1 \leq x < 0 \\ 1, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

과 같이 정의하면 $a = \frac{1}{4} \int_{-2}^2 f(x)g(x)dx$, $b = \frac{1}{4} \int_{-2}^2 f(x)h(x)dx$ 로 표현할 수 있다.

이 때 적분 $\int_{-2}^2 (g(x))^2 dx$, $\int_{-2}^2 (h(x))^2 dx$, $\int_{-2}^2 g(x)h(x)dx$ 들의 값들은 각각 4, 4, 0이다.

(3) $\cos\left(\frac{\pi}{2}(x-p)\right)$ 는

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}(x-p)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}p\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}p\right) \quad (*)$$

과 같이 표현이 되기 때문에, 우선 함수들 $\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ 에 대하여 A 값이 최소가 되는 a, b 를 구하자.

$f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ 인 경우 (2)에서 구한 함수 $g(x), h(x)$ 와 $\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)g(x)$ 가 우함수이고,

$\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)h(x)$ 가 기함수라는 사실을 이용하면

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{1}{4} \int_{-2}^2 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)g(x)dx \\
 &= \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \int_0^2 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)g(x)dx \\
 &= \frac{1}{2} \left[\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx - \int_1^2 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx \right] \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\pi} \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin 0 - \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) \right] = \frac{2}{\pi}
 \end{aligned}$$

과

$$b = \frac{1}{4} \int_{-2}^2 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)h(x)dx = 0$$

를 얻는다.

또한 $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ 인 경우, $\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)g(x)$ 가 기함수이고, $\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)h(x)$ 가 우함수라는 사실 때문에

$$a = \frac{1}{4} \int_{-2}^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)g(x)dx = 0$$

과

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{4} \int_{-2}^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)h(x)dx \\ &= \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \int_0^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)h(x)dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx + \int_1^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{2}{\pi} \right) \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos 0 + \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot 2\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] = \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

를 얻는다.

그러므로 $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}(x-p)\right)$ 의 경우, 식 (*)과 적분의 성질을 이용하여 우리는

$$a = \frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}p\right), \quad b = \frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2}p\right)$$

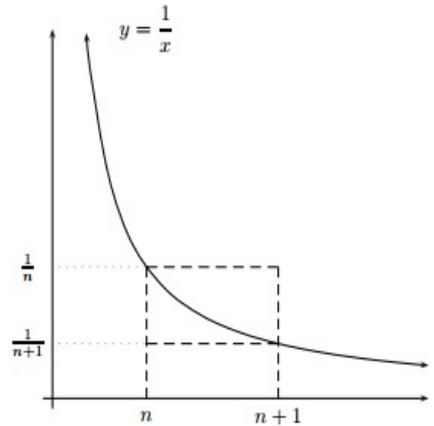
를 얻게 된다.

[문항 2] 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

(가) 합 $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ 에 대하여 극한 $\lim_{n \rightarrow \infty} H_n = \infty$ 을 증명하는 방법은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \dots\right) + \dots \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \dots\right) + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \end{aligned}$$

(나) 다음과 같은 그림을 참고하면 다양한 부등식을 구할 수 있다.



(다) 수학적 귀납법을 이용하면 부등식 $\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \dots + \frac{1}{k+j} > \frac{2j+2}{j+2k}$ 이 성립함을 알 수 있다. 단, k 와 j 는 자연수이다.

[문제 2-1] 제시문 (가)를 참고하여 다음 논제에 답하시오.

(1) (4점) 모든 자연수 k 에 대하여, $H_{2^k} \geq 1 + \frac{k}{2}$ 임을 보이시오.

(2) (6점) 모든 자연수 k, m 에 대하여, $H_{m^k} \geq 1 + k \left(\frac{m-1}{m}\right)$ 임을 보이시오.

[문제 2-2] 제시문 (나)를 참조하여 다음 논제에 답하시오.

(1) (10점) 모든 자연수 n 에 대하여, 부등식 $\ln 2 - \frac{1}{2n} < H_{2n} - H_n < \ln 2$ 임을 보이시오.

(2) (10점) 모든 자연수 n 에 대하여, 부등식 $\ln(n+1) + \frac{n}{2(n+1)} < H_n$ 임을 보이시오.

(힌트: 그림에서 사다리꼴을 생각한다.)

[문제 2-3] 제시문 (다)를 참조하여 다음 논제에 답하시오.

(1) (10점) 합 $\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \dots + \frac{1}{k+j}$ 가 1보다 크거나 같도록 하는 자연수 j 를 자연수 k 를 이용하여 나타내시오.

(2) (10점) (1)을 이용하여 자연수 n 에 대하여, $\frac{H_{3^n-1}}{2} \geq n$ 임을 보이시오.

[문제 2-1]

■ 채점 기준

(1) H_{2^k} 를 $k+1$ 항으로 묶은 후 각 항을 제시문처럼 비교 (2점)

정리하여 최종 식 도출 (2점)

(2) H_{m^k} 를 $k+1$ 항으로 묶음 (3점)

각 항을 $\frac{m^k - m^{k-1}}{m^k}$ 과 비교 (3점)

정리하여 최종 식 도출 (1점)

■ 모범 답안

$$\begin{aligned}
 (1) \quad H_{2^k} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{2^3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} \dots + \frac{1}{2^k}\right) \\
 &\geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^k} + \dots + \frac{1}{2^k}\right) \quad \text{--- 2점} \\
 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{2^1}{2^2} + \frac{2^2}{2^3} + \dots + \frac{2^{k-1}}{2^k} \\
 &= 1 + \frac{k}{2} \quad \text{--- 2점}
 \end{aligned}$$

(2) (1)과 마찬가지로

$$\begin{aligned}
 H_{m^k} &= 1 + \left(\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m}\right) + \left(\frac{1}{m+1} + \dots + \frac{1}{m^2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{m^{k-1}+1} + \dots + \frac{1}{m^k}\right) \quad \text{--- 3점} \\
 &> 1 + \left(\frac{1}{m} + \dots + \frac{1}{m}\right) + \left(\frac{1}{m^2} + \dots + \frac{1}{m^2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{m^k} + \dots + \frac{1}{m^k}\right) \\
 &= 1 + \left(\frac{m-1}{m}\right) + \left(\frac{m^2-m}{m^2}\right) + \left(\frac{m^3-m^2}{m^3}\right) + \dots + \left(\frac{m^k-m^{k-1}}{m^k}\right) \quad \text{---2점} \\
 &= 1 + k \times \left(\frac{m-1}{m}\right) \quad \text{--- 1점}
 \end{aligned}$$

[문제 2-2]

■ 채점 기준

(1) 부등식 $\int_n^{2n} \frac{dx}{x} > H_{2n} - H_n$ 의 증명 (4점)

부등식 $\ln 2 - \frac{1}{2n} < H_{2n} - H_n$ 의 증명 (6점)

(2) 사다리꼴 모양의 넓이와 $1/x$ 의 적분 비교 식 도출 (3점)

위 식의 합으로 $\ln(n+1)$ 의 상한을 사다리꼴의 넓이의 합으로 표현 (3점)

정리하여 최종 식 도출 (4점)

■ 모범 답안

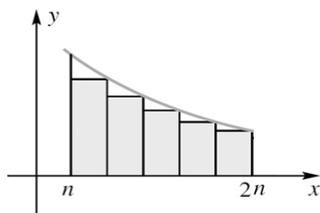
(1) 먼저 [그림 1]로부터 $\int_n^{2n} \frac{dx}{x} > H_{2n} - H_n$ 이므로,

$$\int_n^{2n} \frac{dx}{x} = [\ln x]_n^{2n} = \ln(2n) - \ln n = \ln(2n/n) = \ln 2 \quad \text{이다.} \quad \text{--- 4점}$$

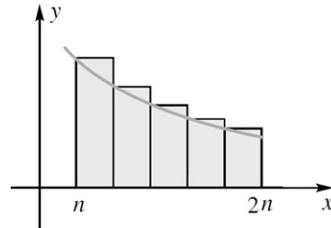
한편, [그림 2]에서

$$H_{2n} - H_n + \frac{1}{2n} = H_{2n-1} - H_{n-1} > \int_n^{2n} \frac{dx}{x} = \ln(2n) - \ln(n) = \ln 2 \quad \text{이므로,}$$

$\ln 2 - \frac{1}{2n} < H_{2n} - H_n$ 을 얻는다. --- 6점



[그림 1]



[그림 2]

두 번째 부등식은 다음과 같이 해결할 수도 있다.

$$\text{먼저, } H_{2n} - H_n > \int_{n+1}^{2n+1} \frac{dx}{x} = \ln(2n+1) - \ln(n+1) = \ln \frac{2n+1}{n+1} \quad (2\text{점})$$

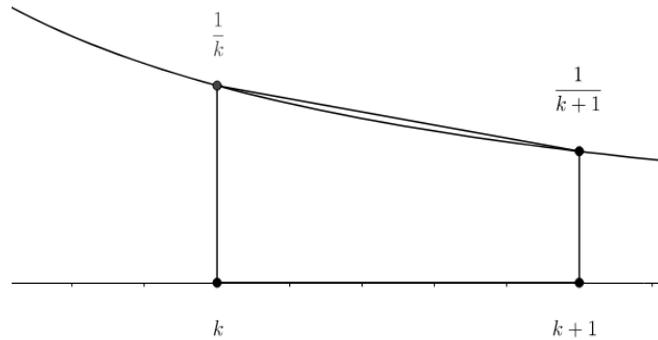
이제 $\ln 2 - \frac{1}{2n} < \ln \frac{2n+1}{n+1}$ 를 증명하면 된다. 이 부등식은 $\frac{2n+2}{2n+1} < e^{\frac{1}{2n}}$ 과 동치이며 양변

제곱하면 $(\frac{2n+2}{2n+1})^2 < e^{\frac{1}{n}}$ 이 된다. 우리는 $e^x \geq 1+x + \frac{x^2}{2}$ 임을 알고 있으므로

$(\frac{2n+2}{2n+1})^2 < 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}$ 을 증명하면 된다. (2점) 이는 다항식으로 비교하여 성립을 확인할 수 있다. (2점)

(2) 각 자연수 k 에 대해 [그림3]처럼 사다리꼴을 생각하면

$$\int_k^{k+1} \frac{dx}{x} < (\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1})/2 \quad \text{이다.} \quad \text{---3점}$$



[그림 3]

따라서

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^n \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} &< \sum_{l=1}^n (\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1})/2 = \frac{1}{2} (\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1}) \quad \text{---3점} \\ &= \frac{1}{2} (\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - 1 + \frac{1}{n+1}) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + (\frac{1}{2})(-1 + \frac{1}{n+1}) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \frac{-n}{2(n+1)} \end{aligned}$$

이제 $\ln(n+1) < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{2n}{n+1}$ 이므로 $\ln(n+1) + \frac{n}{2(n+1)} < H_n$ 이 성립한다. -- 4점

[문제 2-3]**■ 채점 기준**

- (1) 제시문 (다)를 참고하여 j 를 k 를 사용하여 표현 (10점)
 - $2k-2$ 보다 큰 값을 잡은 경우 제시문 (다)를 잘 사용한 경우 3점.
- (2) 각 k 에 대해 (1)에서 찾은 항까지의 합이 1보다 크음을 관찰 (2점)
 합이 1보다 크게 하는 각 묶음의 항의 수 확인 (2점) 및 이 수가 등비수열임을 관찰 (2점)
 정리하여 증명 마무리 (4점)

■ 모범 답안

- (1) $\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \dots + \frac{1}{k+j} > \frac{2j+2}{j+2k}$ 에서 $\frac{2j+2}{j+2k} \geq 1$ 인 j 를 k 로 나타내면
 $2j+2 \geq j+2k$ 에서 $j \geq 2k-2$ 이다.

- (2) 앞의 (1)에서 $j = 2k-2$ 이 되도록 j 를 잡아 나가면 항들의 그룹은 항상 1보다 크거나 같게 된다. --2점

항들의 그룹 $\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \dots + \frac{1}{k+(2k-2)}$ 에 속하는 항의 개수는 $2k-1$ 임을 참조하면 -- 2점

항의 개수를 $1, 2 \times 2 - 1 = 3, 2 \times 5 - 1 = 3^2, 2 \times 14 - 1 = 3^3, \dots$ 로 잡아나가 ---2점
 $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{n-1} = (3^n - 1)(3 - 1) = (3^n - 1)/2$ 까지 더하면 그 합은 n 보다 크게 된다. 즉,

$$1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{13}\right) + \dots \left(\dots + \frac{1}{(3^n - 1)/2}\right) = H_{(3^n - 1)/2} \geq n$$

-- 4점

가 성립한다.