2016학년도 모의논술 고사

자연계열 모범답안

표지를 제외한 페이지 수 : 3

2016학년도 자연계열 모의논술 모범답안

자연계열

[문제1]

[논제 1-1] $n=2$일 때 가능한 경우는

왼쪽부터 제 1단이 ○○ (X 가 0개), ○X (X 가 1개), X○ (X 가 1개) 경우로 나누어 가능한 경우를 모두 그린 것이다.

○	○
○	○

○	○
○	X

○	○
X	○

○	X
○	○

○	X
X	○

X	○
○	○

X	○
○	X

따라서 $a_2 = 7$이다.

$n=3$일 때 제 2단의 모양에 따라 분류한다.

(1) 제 2단이 ○○일 때 제 3단은 ○○, ○X, X○가 가능하므로 곱의 법칙에 의해 $n=2$일 때의 3가지와 곱하여 9

(2) 제 2단이 ○X일 때 제 3단은 ○○, X○가 가능하므로 곱의 법칙에 의해 $n=2$일 때의 2가지와 곱하여 4

(3) 제 2단이 X○일 때 제 3단은 ○○, ○X가 가능하므로 곱의 법칙에 의해 $n=2$일 때의 2가지와 곱하여 4

따라서 합의 법칙에 의해 $a_3 = 17$이다.

[논제 1-2] 제 n단이 ○○일 때를 b_n, 제 n단이 ○X 또는 X○일 때를 c_n이라하면

$a_n = b_n + c_n \ (n \geq 1)$ --- (1)

(1) 제 $n+1$ 단이 ○○인 경우는 제 n단에 무엇이 오더라도 상관이 없으므로

$b_{n+1} = a_n$ ---(2)

(2) 제 $n+1$ 단이 ○X 또는 X○일 때는 다음과 같은 경우가 가능하다.

제 n단이 ○○일 때 논제 1을 참조하면 제 $n+1$ 단은 ○X, X○ 의 2가지이므로 $2b_n$가지

제 n단이 ○X 또는 X○일 때 논제 1을 참조하면 제 $n+1$ 단도 X○ 또는 ○X이므로 c_n가지

따라서 $c_{n+1} = 2b_n + c_n$ ---(3)

(1), (2), (3)에서 $a_{n+1} = b_{n+1} + c_{n+1} = a_n + (2b_n + c_n) = a_n + (b_n + c_n) + b_n$

$= a_n + a_n + b_n = 2a_n + a_{n-1} \ (n \geq 2)$

이제 $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n \ (n \geq 1)$ 이므로 $c = 2,\ d = 1$

[논제 1-3] $a_1 = 3$ 이며 $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$ 에서 $n=0$ 일 때 성립해야 하므로 $7 = a_2 = 2a_1 + a_0 = 2\times 3 + a_0$에서 $a_0 = 1$. 따라서 $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n \ (n \geq 0)$.

$$f(x) = 1+3x+ \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}\, x^{n+2} = 1+3x+ \sum_{n=0}^{\infty} (2a_{n+1} + a_n)\, x^{n+2}$$

$= 1+3x+ 2x\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}x^{n+1} + x^2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1+3x+2x(f(x)-1)+x^2 f(x)$

따라서 $(x^2+2x-1)f(x) = -(x+1)$ 에서 $f(x) = \dfrac{x+1}{1-2x-x^2}$

답 $f(x) = \dfrac{x+1}{1-2x-x^2}$

(별해)

$a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$ $(n \geq 0)$ 은 2계 점화식이므로, 이 특성방정식 $x^2-2x-1=0$의 두 해 $x=1\pm\sqrt{2}$로부터 $a_n = a(1+\sqrt{2})^n + b(1-\sqrt{2})^n$ 를 얻는다. $a_1=3, a_2=7$을 이용하면, $a=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}, b=\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 임을 알 수 있다. 따라서

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-(1+\sqrt{2})x} + \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-(1-\sqrt{2})x} = \frac{x+1}{1-2x-x^2}$$ 이다.

(참고)

$a_{n+2}-\alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$로부터 α와 β는 $\alpha+\beta=2$, $\alpha\cdot\beta=-1$의 해, 즉 $x^2+2x-1=0$의 두 근이고, 이를 사용하여 a,b를 구하고 위와 같이 a_n의 점화식을 얻을 수도 있다.

[문제2]

[논제 2-1] 두 점 P와 Q를 지나는 직선의 방정식은 $y=-x-1$이다. 이 식을 곡선 C의 방정식에 대입하여 정리하면, 식 $x(x-2)(x+1)=0$을 얻는다. 따라서, 점 R의 좌표는 $(-1,0)$이다. 두 점 R과 E를 지나는 직선의 방정식은 $y=x+1$이다. 다시 이 식을 곡선 C의 방정식에 대입하여 정리하면, 식 $x(x-2)(x+1)=0$을 얻는다. 따라서, $P*Q$의 좌표는 (2,3)이다.

[논제 2-2] 변곡점을 구하기 위해 양함수 꼴로 바꾸면 $y=\pm\sqrt{x^3+1}$ 이다. 두 함수는 x축에 대해 대칭이므로 $y=\sqrt{x^3+1}$인 경우만 생각해도 무방하다. 두 번 미분하면 $y'=\dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}$ 및 $y''=\dfrac{12x(x^3+1)-9x^4}{4(x^3+1)^{3/2}}=\dfrac{3x(x^3+4)}{4(x^3+1)^{3/2}}$ 를 얻는다. 따라서 $y''=0$ 이면 $3x(x^3+4)=0$이고, 이때 $x^3+4=y^2+3>0$ 이므로 $x=0$이 유일한 근이다. 따라서 이 때 $y=\pm1$이고, 변곡점의 후보로 가능한 점은 $(0,\pm1)$ 뿐이다.

한편 $|x|<1$인 경우 $y''=\dfrac{3x(x^3+4)}{4(x^3+1)^{3/2}}$의 부호는 x에 의해서만 결정되므로, $(0,1)$에서 $-1<x<0$일 때 $y''(x)<0$ 및 $0<x<1$일 때 $y''(x)>0$을 얻는다. 대칭성에 의해 $(0,-1)$

에서도 같다. 즉, $(0, \pm 1)$은 실제로 변곡점이다.

(별해)

음함수 미분법에 의해 곡선 C의 방정식을 미분하여 정리하면, $y' = \dfrac{3x^2}{2y}$을 얻는다. 마찬가지로, $y'' = \dfrac{12xy^2 - 9x^4}{4y^3}$이다. 따라서, $y''=0$이면, 식 $3x(4y^2-3x^3)=0$을 얻는다. $y^2 = x^3+1$이므로, 본 식은 $3x(y^2+3)=0$으로 다시 쓸 수 있다. 따라서 이 식의 근은 $x=0$뿐이고, $y''=0$인 점의 좌표는 점 $E(0,1)$와 $(0,-1)$뿐이다. 한편, $y'' = \dfrac{12xy^2-9x^4}{4y^3} = \dfrac{3x(x^3+4)}{4y^3}$이므로, $-1<x<0$일 때 $y''(x)<0$ 및 $0<x<1$일 때 $y''(x)>0$이다. 따라서 $(0,1)$ 및 $(0,-1)$은 모두 변곡점이다.

[논제 2-3] (1) 정답: $A = (0,1),\ (0,-1),\ (2,-3)$

방정식 $y^2 = x^3+1$과 y축이 만나는 점은 $E(0,1)$ 및 $(0,-1)$뿐이고, 이 두 점에서 문제에 주어진 조건이 성립함은 당연하다. 이 두 점이 아닌 A의 좌표값을 (a,b)라고 하자. 그러면 직선 $\overline{EA}$의 방정식은 $y=mx+1$이고 $m = \dfrac{b-1}{a} \neq 0$이다. 이 식을 곡선의 방정식에 대입하여 풀면, $(mx+1)^2 = x^3+1$, 따라서 $x(x^2-m^2x-2m)=0$이다. 따라서 이 식이 A와 E이외의 다른 점에서 만나지 않으려면 방정식 $x^2-m^2x-2m=0$이 중근을 가져야 한다. 즉 $m^4+8m = m(m^3+8)=0$이고 m은 0이 아닌 실수이므로 $m=-2$이다. 이 때 중근은 $x=2$이므로 $x=2, y=-3$을 얻는다.

(2) 정답: $B = (0,1),\ (2,-3)$

$E*E=E$임은 정의에 의해 성립하므로, $B \neq E$이면서 조건을 만족하는 점 B를 구해보자.
$B*B$가 존재하므로, B에서의 접선이 지나는 점 R을 생각하자. 문제 1-3(1)에서 R이 E나 $(0,-1)$, $(2,-3)$이 아니면 $\overline{RE}$는 항상 E가 아닌 다른 점과 곡선에서 만난다. 한편 R이 $(0,-1)$ 또는 $(2,-3)$일 경우 조건 (1)로부터 $B*B$가 존재하지 않는다. 즉 $R=E$이다. 따라서, B에서의 접선이 E를 지나는 점 $B(a,b)$를 구하면 된다. $y = \pm\sqrt{x^3+1}$ 두 경우 모두 기울기는 $\dfrac{3a^2}{2b}$이고, 접선의 방정식은 $y = \dfrac{3a^2}{2b}(x-a)+b$이다. 이 점이 E를 지나므로 이를 대입하면 $1 = -a \cdot \dfrac{3a^2}{2b} + b = \dfrac{-3(b^2-1)}{2b} + b$, 정리하면 $(b-1)(b+3)=0$이고 $b=-3$을 얻는다. 따라서 $B=(2,-3)$이다.
이 때 B에서의 접선은 E를 지나므로, $R=E$인 경우에 해당하고 조건 (3)으로부터 $B*B=E$를 만족한다.