

2016학년도 모의논술 고사

자연계열



표지를 제외한 페이지 수 : 4



[문항1] 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

사건은 같은 조건에서 여러 번 할 수 있는 실험이나 관찰로 얻어진 결과를 말하며, 경우의 수는 사건이 일어날 수 있는 경우의 가짓수이다. 주사위를 던지면 1, 2, 3, 4, 5, 6이 나올 수 있고 총6가지이다. 따라서 주사위를 던졌을 때 경우의 수는 6이다. 경우의 수를 구하는 조직적인 방법은 [합의 법칙]과 [곱의 법칙]을 사용하는 것이다.

[합의 법칙]은 각 사건이 동시에 일어나지 않을 때 사용한다.

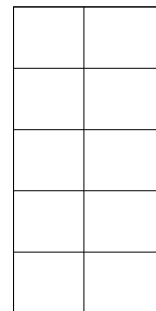
사건 A가 일어날 수 있는 경우의 수가 a , 사건 B가 일어날 수 있는 경우의 수가 b 이면
사건 A 또는 B 가 일어날 경우의 수는 $a+b$ 이다.

[곱의 법칙]은 사건이 동시에 일어나는 경우에 사용한다. 동시라는 것은 같은 시각을 의미하는 것이 아니고 경우의 수를 구하는 과정에서 두 사건이 모두 일어나야 한다는 뜻이다.

사건 A가 일어날 수 있는 경우의 수가 a , 사건 B가 일어날 수 있는 경우의 수가 b 이면
사건 A 와 사건 B가 동시에 일어날 경우의 수는 $a \times b$ 이다.

이런 경우의 수를 구할 때에는 빠뜨리는 경우가 없는지 확인할 수 있도록 명시해 주는 것이 중요하다. 다음과 같은 경우의 수를 구하는 문제를 통해 익혀보도록 하자.

가로 2개, 세로 n 개 로 이루어진 $2n$ 개의 모눈종이를 생각한다.
예를 들어 $n=5$ 일 때는 오른쪽 그림과 같은 모눈종이가 되며, 모눈에 \bigcirc, X 표를 한다. 이와 같이 \bigcirc, X 표를 하는 방법의 수를 a_n 이라 할 때 다음을 구하여라. (단, X 표는 가로나 세로 어디에도 연이어서 하는 일은 없다)





[문제 1-1] (15 점) 가로 2개, 세로 2개로 이루어진 모눈종이에 가능한 경우를 그림을 나열하여 경우의 수 a_2 를 구하고, a_3 를 구하는 풀이에서는 어디에서 [합의 법칙]과 [곱의 법칙]을 사용하였는지 나타내면서 구하여라.

[문제 1-2] (20 점) 모든 자연수 n 에 대하여 $a_{n+2} = ca_{n+1} + da_n$ 이 되는 상수 c, d 의 값을 구하고, 모든 자연수 n 에 대하여 성립함을 증명하여라.

[문제 1-3] (15 점) [문제 1-2]에서 정의된 식이 $n=0$ 일 때도 성립하게 하려면 a_0 는 무엇으로 정의하면 좋겠는가? 이 때 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 로 정의했을 때 $f(x)$ 를 유리함수로 나타내어라.

[문항2] 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

(가) 암호는 실생활에서 쉽게 찾아볼 수 있다. 무선 공유기의 경우, 커다란 수의 소인수 분해가 컴퓨터를 사용하더라도 시간이 많이 걸린다는 사실을 이용하는 RSA 암호 시스템을 사용한다. 또한, (그림 1)과 같은 곡선에서 곡선 위의 두 점 P, Q 에 관한 연산 $P * Q$ 를 정의하고 다음의 식

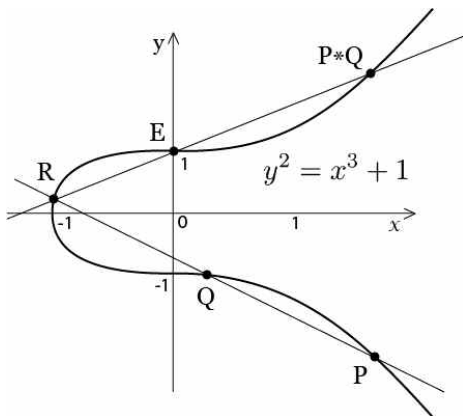
$$\underbrace{P * P * \dots * P}_n = S$$

에서 P 와 S 의 좌표가 주어졌을 때 컴퓨터를 사용하더라도 n 을 구하려면 시간이 오래 걸린다는 사실을 사용하는 암호시스템도 있다.

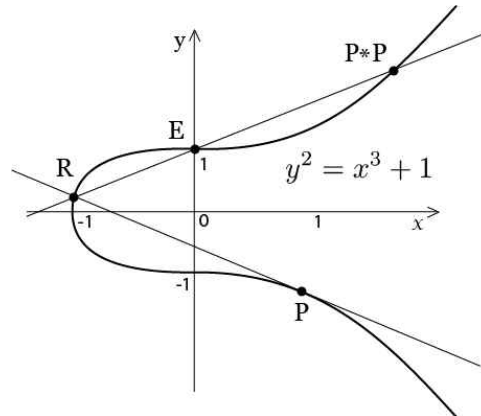
(나) 다음 그림에서 $y^2 = x^3 + 1$ 을 만족하는 곡선 C 와 이 곡선상의 점 $E(0,1)$ 를 생각하자. 이 곡선상의 두 점 P 와 Q 에 대해서, 연산 $P * Q$ 를 다음과 같이 정의한다.

[연산 $P * Q$ 의 정의]

- (1) P 와 Q 를 잇는 직선 \overline{PQ} 가 곡선 위의 P, Q 가 아닌 점 R 에서 만나고 (만일 $P = Q$ 일 때는 \overline{PQ} 는 곡선의 P 에서의 접선으로 생각한다.)
- (2) 이 때 R 과 E 를 잇는 직선이 곡선과 만나면, 그 점을 $P * Q$ ($P = Q$ 인 경우는 $P * P$)라 한다.
- (3) $P = Q = E$ 일 때는 E 에서의 접선을 생각해야 하고, 이 때 접선은 곡선과 한 점 E 에서 만나므로 $R = E$ 라 정의한다. 또한 $E * E = E$ 가 정의된다.



(그림 1) $P \neq Q$ 인 경우



(그림 2) $P = Q$ 인 경우

(다) (1), (2), (3)의 과정에서 P, Q 또는 R 이 변곡점인 경우에는 R 또는 $P * Q$ 를 정의하기 어렵다. 단, $y^2 = x^3 + 1$ 의 변곡점은 두 함수 $y = \sqrt{x^3 + 1}$, $y = -\sqrt{x^3 + 1}$ 의 변곡점들로 정의한다.



[문제 2-1] (10 점) 두 점 $P(0, -1)$ 와 $Q(2, -3)$ 를 잇는 직선이 곡선 C 와 만나는 점의 좌표와 점 $P * Q$ 의 좌표를 구하시오.

[문제 2-2] (20 점) 곡선 C 의 변곡점의 좌표를 모두 구하시오.

[문제 2-3] (20 점) (1) 다음 조건을 만족하는 곡선 위의 점 A 를 모두 구하여라.

점 A 와 점 E 를 지나는 직선이 곡선 C 와는 더 이상 만나지 않는다.

(2) 다음 조건 (a)와 (b)를 만족하는 곡선 위의 점 B 를 모두 구하시오.

- (a) (1), (2), (3)의 과정에서 나타나는 R 과 $B * B$ 가 존재한다.
- (b) $B * B = E$.