2015학년도 논술 고사

자연계열(오후)
모범답안

성　　명	
전　　형	
수험번호	

표지를 제외한 페이지 수 : 5

2015학년도 자연계열 논술고사 모범답안

자연계열 [오후]

[문제 1-1] <15점> $z^6 = 8i$의 해 중 실수부와 허수부가 모두 음수인 해들의 합을 구하라. (단, $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$)

[풀이] $|z|^6 = |z^6| = |8i| = 2^3$이고 $|z| \ge 0$이므로 $|z| = \sqrt{2}$이다.

또한 $6\arg(z) = \arg(z^6) = \arg(8i) = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$이므로 $\arg(z) = \frac{\pi}{3}n + \frac{\pi}{12}$가 성립한다. 따라서 위 식의 해인 6개의 편각은 $\frac{\pi}{12}$, $\frac{5\pi}{12}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{13\pi}{12}$, $\frac{17\pi}{12}$, $\frac{7\pi}{4}$이다. 이 중 실수부와 허수부가 모두 음수인 것에 해당하는 각은 제3사분면에 해당하는 각인 $\frac{13\pi}{12}$, $\frac{17\pi}{12}$이다. 문제의 조건을 만족하는 해들은 $z = \sqrt{2}(\cos(\frac{13\pi}{12}) + i\sin(\frac{13\pi}{12}))$, $z = \sqrt{2}(\cos(\frac{17\pi}{12}) + i\sin(\frac{17\pi}{12}))$이다. 한편 $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$이므로 삼각함수의 제곱공식으로부터 $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$이다. 이를 이용하여 $\frac{13\pi}{12} = \pi + \frac{\pi}{12}$, $\frac{17\pi}{12} = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{12}$의 삼각함수 값을 계산하면 $\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ 이다. 따라서 문제의 조건을 만족하는 해들의 합은 $-\sqrt{3} - \sqrt{3}i$이다.

[문제 1-2] <15점> 제시문 (나)에서 좌표평면 위의 점 $(1, 0)$을 버튼A만 2015번 눌러 이동시킨 뒤, 이어서 버튼B만 2016번, 이어서 버튼C만 2017번, 또 이어서 버튼D만 2018번 눌러 이동시켰을 때 마지막 점의 위치가 (x, y)라고 하자. $|x-y|$는 몇 자리수인지 답하라. (단, $\log_{10} 2 = 0.3010$)

[풀이] 버튼 A, B, C, D를 누르는 것은 각각 $a+bi$에 $\frac{1}{2}$, $1+i$, $2+i$, $3+i$를 곱하는 것과 같다. 복소수의 곱은 순서에 무관하므로 문제에서의 시행은 버튼A, 버튼B, 버튼C, 버튼D를 차례대로 누르는 시행을 2015번 반복한 후 버튼B를 한번, 버튼C를 두 번, 버튼D를 세 번 누르는 것과 같다.

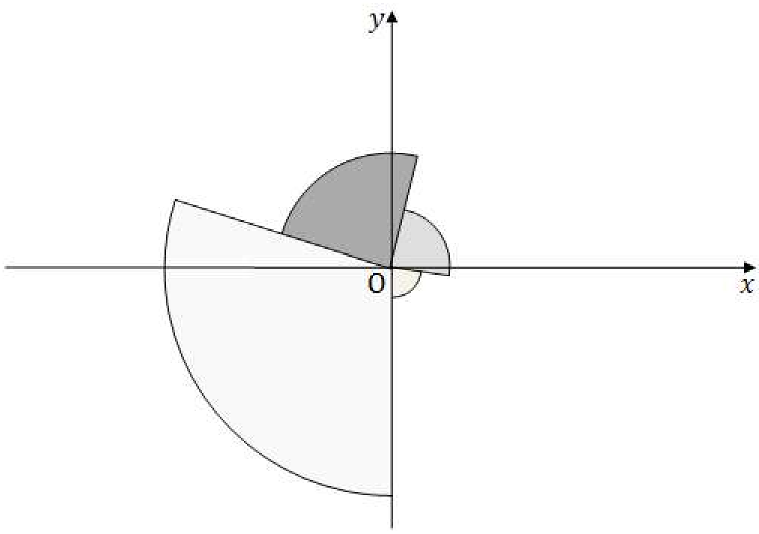
한편, $\frac{1}{2}(1+i)(2+i)(3+i) = 5i$이므로 이를 2015번 반복하면 $(5i)^{2015} = 5^{2015}i^3 = -5^{2015}i$가 된다. $(1+i)(2+i)^2(3+i)^3 = -200+100i$이므로, 점$(1,0)$에 해당하는 복소수 1에 앞에서 계산

하여 얻어진 수들을 곱하면 $4\times 5^{2017}+8\times 5^{2017}i$가 된다. 따라서 마지막 점의 위치는 $(4\times 5^{2017}, 8\times 5^{2017})$이므로, $|x-y|=4\times 5^{2017}$이다. 또한 $\log_{10}(4\times 5^{2017})=2017-2015\times\log_{10}2=1410.485$ 이므로 $|x-y|$는 1411자리수이다.

[문제 1-3] <20점> 복소수들의 집합 $A=\left\{z \;\middle|\; |z|\le 2,\ \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2015}\le \arg(z)\le\frac{\pi}{2}\right\}$를 생각하자. 자연수 k에 대하여 A_k를 $A_1=A$, $A_2=\{z^2 \mid z\in A\}$, $A_3=\{z^3 \mid z\in A\}, \ldots$ 와 같이 정의하고, $T_k=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k$라 하며, 좌표명면에서 T_k에 대응하는 영역의 넓이를 t_k라 하자. 다음 성질을 만족하는 최소의 자연수 n에 대하여 $\frac{t_n}{2^{2015}\pi}$의 정수부분을 구하라.

> T_n은 크기 2 이하인 복소수들을 모두 포함한다, 즉 $\{z \mid |z|\le 2\}\subset T_n$.

[풀이] $1\le k\le 4030$인 k에 대하여 A_k에 대응하는 영역은 반지름이 2^k이고 중심각이 $\frac{k\pi}{2015}$인 부채꼴 모양이다. 특히, $k=4m+\ell$ $(\ell=0,1,2,3)$ 꼴이라면 A_k는 제ℓ사분면에서 축으로부터 시계방향으로 $\frac{k\pi}{2015}$만큼 벌어진 모양이다. 반지름이 2인 원을 완전히 덮기 위해서는 각 사분면에 포함된 사분원을 덮어야 하므로 $\frac{k\pi}{2015}\ge\frac{\pi}{2}$가 성립해야 한다. 따라서 $k=1008$일 때, 처음으로 하나의 사분원을 덮게 되고, 네 개의 사분원을 모두 덮기 위한 최소의 n은 $1008+3=1011$이다. 이때 도형의 모양은 아래 그림과 같다.



반지름이 R이고 중심각이 θ인 부채꼴의 넓이는 $\dfrac{R^2\theta}{2}$ 이므로,

$$t_{1011} = \frac{(2^{1008})^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{4030}\right) + \frac{(2^{1009})^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{4030}\right) + \frac{(2^{1010})^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{4030}\right) + \frac{(2^{1011})^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{7\pi}{4030}\right)$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned} \frac{t_{1011}}{2^{2015}\pi} &= \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4030}\right) + 2^2\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{4030}\right) + 2^4\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{4030}\right) + 2^6\left(\frac{1}{2} + \frac{7}{4030}\right) \\ &= (2+8+32) + \frac{2015 - 3 - 8 - 32 + 64 \times 7}{4030} \end{aligned}$$

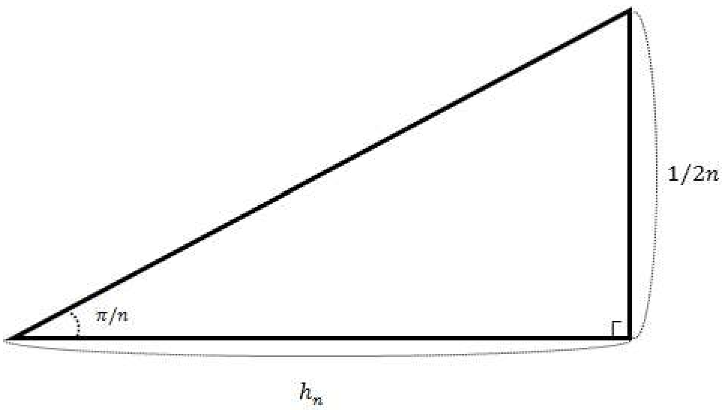
이므로 이 수의 정수부분은 42이다.

[문제 2-1] <10점> 제시문 (**나**)의 밑줄 친 문제에서 사각형 ABCD가 원에 내접하는 조건을 추가하는 경우 넓이의 최댓값은 얼마인가?

[풀이] 사각형이 원에 내접하기 위해서는 대내각의 합이 π이어야 한다. 따라서 $\theta = \dfrac{\pi}{2}$이며, 제시문 (**나**)의 결과에 이를 대입하면 넓이의 최댓값은 $\dfrac{1}{4}(a^2+b^2) + \dfrac{1}{2}ab$이다.

[문제 2-2] <20점> 둘레의 길이가 1인 정n각형의 넓이 S_n을 n을 이용하여 표현하고, 정n각형에 대하여 등주부등식이 성립함을 보여라.

[풀이] 아래 그림에서 $h_n = \dfrac{1}{2n\tan(\pi/n)}$이다. 따라서 $S_n = n \cdot 2 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2n} h_n = \dfrac{1}{4n\tan(\pi/n)}$이다. $g(x) = \tan x - x$라 하면 $g'(x) = \sec^2 x - 1 \geq 0$, 즉 $g(x)$는 증가함수이고, $g(0) = 0$이므로 $x \geq 0$에서 $g(x) \geq 0$ 이다. 따라서 $\tan\left(\dfrac{\pi}{n}\right) \geq \dfrac{\pi}{n}$, $4\pi S_n = \dfrac{\pi}{n\tan(\pi/n)} \leq 1 = 1^2$, 즉 등주부등식을 얻게 된다.



[문제 2-3] <20점> 그림 4에서와 같이 사잇각 ϕ로 만나는 두 반직선 위에 하나씩 끝점을 가지는 두 선분으로 만들어지는 사각형의 넓이를 최대화시키는 문제를 생각해 보자. 각 ϕ의 크기는 그림 5에 나타난 바와 같다. 두 선분의 길이를 a, b라 하고 제시문 (나)에서와 같이 변수 x, y를 도입하자. 사각형의 넓이를 x, y, a, b, θ를 이용하여 나타내고, 그 넓이의 최댓값을 구하라.

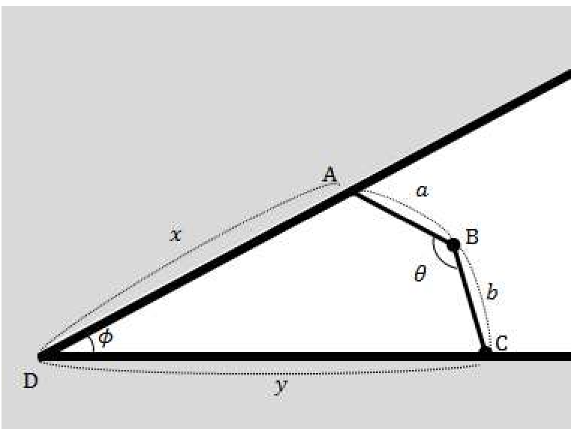


그림 4

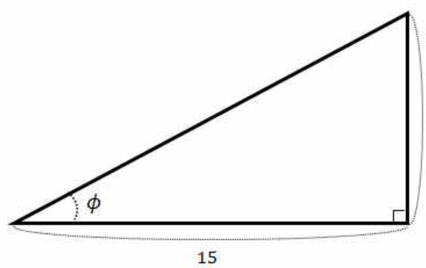


그림 5

[풀이] 사각형 ABCD의 넓이는 $S=\frac{1}{2}xy\sin\phi+\frac{1}{2}ab\sin\theta=\frac{4}{17}xy+\frac{1}{2}ab\sin\theta$이다.

한편 $a^2+b^2-2ab\cos\theta=x^2+y^2-2xy\cos\phi=x^2+y^2-\frac{30}{17}xy$ 이므로

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{4}{17}xy + \frac{1}{2}ab\sin\theta \\
&= 2xy - \frac{30}{17}xy + \frac{1}{2}ab\sin\theta \\
&\le x^2 + y^2 - \frac{30}{17}xy + \frac{1}{2}ab\sin\theta \\
&= a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta + \frac{1}{2}ab\sin\theta \\
&= a^2 + b^2 + \frac{1}{2}ab(\sin\theta - 4\cos\theta)
\end{aligned}
$$

한편 $\sin\theta - 4\cos\theta = \sqrt{17}\sin(\theta - \theta_0)$이다. (단 $\cos\theta_0 = \frac{1}{\sqrt{17}}$, $\sin\theta_0 = \frac{4}{\sqrt{17}}$)

따라서 $S \le a^2 + b^2 + \frac{\sqrt{17}}{2}ab$이다. 이 부등식에서 등호는 $x = y$ 일 때 성립하며 마지막 식을 최대화시키는 각 θ에 대하여 적절한 x를 구할 수 있으므로 이 부등식의 등호가 성립한다. 따라서 넓이의 최댓값은 $a^2 + b^2 + \frac{\sqrt{17}}{2}ab$이다.