2015학년도 논술 고사

자연계열(오후)

성　　명	
전　　형	
수험번호	

표지를 제외한 페이지 수 : 5

2015학년도 자연계열 논술고사 자연계열(오후)

[문제 1] <50점> 다음 제시문을 읽고 물음에 답하라.

(가) 복소수란 $a+bi$ 꼴로 나타낼 수 있는 수이다. 이 때 a, b는 각각 실수부, 허수부라 불리는 실수이고 i는 허수단위로서 $i^2=-1$을 만족한다. 모든 실수는 허수부가 0인 복소수로 표시할 수 있기 때문에 복소수는 실수의 확장이라고 생각할 수 있다. 따라서 복소수에서도 실수에서 성립하는 사칙 연산을 정의할 수 있다. 특히 $i^2=-1$이라는 조건을 이용하여 복소수의 곱셈을 다음과 같이 정의한다.

$$\boxed{(a+bi)(c+di)=ac+bci+adi+bdi^2=(ac-bd)+(bc+ad)i}$$

복소수를 좌표평면 위의 점으로 생각할 수 있는데, 평면의 x좌표는 실수부, y좌표는 허수부로 놓으면 좌표평면 위의 점 (a,b)는 복소수 $a+bi$와 대응된다. 복소수 $z=a+bi$의 크기 $|z|$는 좌표평면의 원점 O로부터 그 복소수에 대응하는 점 $\mathrm{P}(a,b)$까지의 거리인 $\sqrt{a^2+b^2}$으로 정의하고, z의 편각 $\arg(z)$는 반직선 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$가 x축의 양의 방향과 이루는 각(반시계방향)으로 정의한다. 이때 $|z|$는 음이 아닌 실수이고, 임의의 정수 n에 대하여 각 θ와 $2n\pi+\theta$는 같은 도형이므로 $\arg(z)$는 여러 값을 가질 수 있다.

행렬의 곱 $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ac-bd & -bc-ad \\ bc+ad & ac-bd \end{pmatrix}$으로부터, 복소수 $a+bi$를 행렬 $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$와 대응시키면 복소수의 곱 $(a+bi)(c+di)$와 행렬의 곱 $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$는 같은 결과를 유도한다. 한편 $\cos(\arg(z))=\dfrac{a}{|z|}$, $\sin(\arg(z))=\dfrac{b}{|z|}$에서

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}=\sqrt{a^2+b^2}\begin{pmatrix} \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \dfrac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix}=|z|\begin{pmatrix} \cos(\arg(z)) & -\sin(\arg(z)) \\ \sin(\arg(z)) & \cos(\arg(z)) \end{pmatrix}$$

이고, $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$는 원점을 중심으로 반시계방향으로 θ만큼 회전시키는 일차변환이다. 그러므로 어떤 복소수에 z를 곱하는 것은 그 크기를 $|z|$배만큼 늘리고, 편각을 $\arg(z)$만큼 더하는 변환으로 이해할 수 있다. 즉, 두 복소수 z, w의 곱 사이에는

$$|zw|=|z||w|, \quad \arg(zw)=\arg(z)+\arg(w)$$

가 성립한다. 또한, 이 사실로부터 복소수의 곱셈에 대한 교환법칙이 성립함을 알 수 있다.

예제 1. $z^3=1$을 만족하는 z를 모두 구해보자. $|z|^3=|z^3|=|1|=1$이므로 $|z|=1$이고, $3\arg(z)=\arg(z^3)=\arg(1)=2n\pi$ (단, n은 정수)이므로 $\arg(z)=\dfrac{2n}{3}\pi$이다. 이 중 평면 위에서 서로 다른 각은 0, $\dfrac{2\pi}{3}$, $\dfrac{4\pi}{3}$이므로 z는 1, $\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, $\cos\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$이다.

(나) 좌표평면 위의 점이 다음 [규칙]을 따라 이동한다.

[규 칙]

· 버튼A를 누르면 좌표평면 상의 점$(a,\, b)$가 점$(\frac{a}{2},\, \frac{b}{2})$로 이동
· 버튼B를 누르면 좌표평면 상의 점$(a,\, b)$가 점$(a-b,\, a+b)$로 이동
· 버튼C를 누르면 좌표평면 상의 점$(a,\, b)$가 점$(2a-b,\, a+2b)$로 이동
· 버튼D를 누르면 좌표평면 상의 점$(a,\, b)$가 점$(3a-b,\, a+3b)$로 이동

예를 들어 점$(2,\, 2)$를 시작으로 버튼A, 버튼B, 버튼C, 버튼D를 한번 씩 누르면 아래와 같이 이동한다.

$$(2,2) \xrightarrow{\text{버튼A}} (1,1) \xrightarrow{\text{버튼B}} (0,2) \xrightarrow{\text{버튼C}} (-2,4) \xrightarrow{\text{버튼D}} (-10,10)$$

한편 버튼B는 (a,b)를 $(a-b,\, a+b)$로 보내는 일차변환이고 이 일차변환의 행렬은 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$이다. 이 행렬과 대응되는 복소수는 $1+i$이므로 버튼B를 누르는 것은 $a+bi$에 $1+i$를 곱하는 것으로 이해할 수 있다.

예제 2. 점 $(1,\, 0)$은 버튼 B를 다섯 번 눌렀을 때 어느 위치로 이동할까? 점 $(1,0)$은 복소수 $1+0i$와 대응되고, 버튼 B를 다섯 번 누르는 것은 $(1+i)^5 = -4-4i$를 곱하는 것과 같으므로 최종 위치는 $-4-4i$와 대응되는 점인 $(-4,-4)$가 된다.

[문제 1-1] <15점> $z^6 = 8i$의 해 중 실수부와 허수부가 모두 음수인 해들의 합을 구하라.
(단, $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$)

[문제 1-2] <15점> 제시문 (나)에서 좌표평면 위의 점 $(1,\, 0)$을 버튼A만 2015번 눌러 이동시킨 뒤, 이어서 버튼B만 2016번, 이어서 버튼C만 2017번, 또 이어서 버튼D만 2018번 눌러 이동시켰을 때 마지막 점의 위치가 (x,y)라고 하자. $|x-y|$는 몇 자리수인지 답하라.
(단, $\log_{10} 2 = 0.3010$)

[문제 1-3] <20점> 복소수들의 집합 $A = \left\{ z \;\middle|\; |z| \le 2,\, \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2015} \le \arg(z) \le \frac{\pi}{2} \right\}$를 생각하자. 자연수 k에 대하여 A_k를 $A_1 = A$, $A_2 = \{z^2 \mid z \in A\}$, $A_3 = \{z^3 \mid z \in A\}, \ldots$ 와 같이 정의하고, $T_k = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k$라 하며, T_k좌표평면에서 T_k에 대응하는 영역의 넓이를 t_k라 하자. 다음 성질을 만족하는 최소의 자연수 n에 대하여 $\frac{t_n}{2^{2015}\pi}$의 정수부분을 구하라.

T_n은 크기 2 이하인 복소수들을 모두 포함한다, 즉 $\{z \mid |z| \le 2\} \subset T_n$.

[문제 2] <50점> 다음 제시문을 읽고 물음에 답하라.

(가) 일정 길이의 곡선으로 최대 면적을 둘러싸는 폐곡선의 형태를 구하는 문제를 등주문제라 한다. 평면 위에서 닫힌곡선 C의 길이를 L이라 하고 그 내부의 넓이를 A라 하면 다음 부등식이 성립한다.

$$\boxed{4\pi A \le L^2}$$

여기서 등호가 성립하기 위한 필요충분조건은 곡선 C가 원인 것이다. 이 부등식을 <u>등주부등식</u>이라고 부른다. 이와 연관된 문제로 디도의 문제(Dido's problem), 즉 주어진 직선과 이 직선 위에 끝점을 갖는 주어진 길이의 곡선으로 둘러쌀 수 있는 넓이의 최댓값을 구하는 문제를 들 수 있다.

디도의 문제를 변형하여 **그림** 1에서와 같이 주어진 직선과 이 직선 위에 끝점을 갖는 정해진 길이의 두 선분으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 최대화하는 문제를 생각해보자. 두 선분의 길이를 각각 a, b라 하고 두 선분의 끝점 중 직선 위에 있는 점을 각각 A, C, 두 선분이 만나는 점을 B, 두 선분이 이루는 각을 $\theta\,(0<\theta<\pi)$라 하자. 그러면 삼각형 ABC의 넓이는 $S=\dfrac{1}{2}ab\sin\theta$이다. 따라서 넓이의 최댓값은 $\dfrac{1}{2}ab$이고 이때 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$이다. 이 경우 최대 넓이의 삼각형은 **그림** 2에서와 같이 주어진 직선 위에 지름을 가진 원에 내접한다.

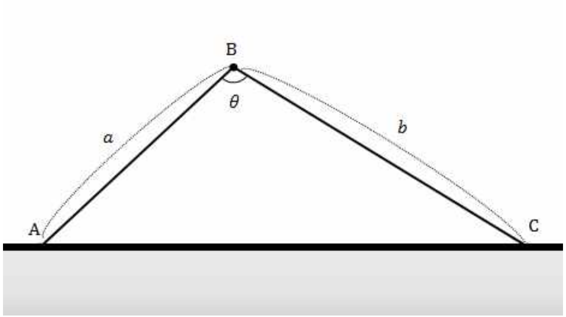

그림 1

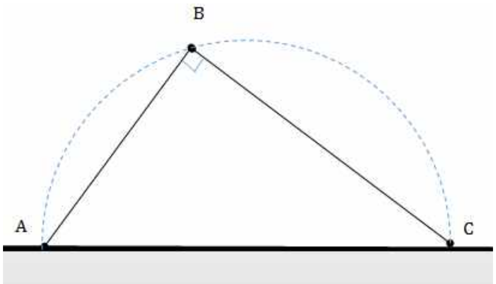

그림 2

(나) **그림** 3에서와 같이 서로 수직으로 만나는 두 반직선 위에 하나씩 끝점을 가지며 길이가 정해진 두 선분으로 만들어지는 사각형의 넓이를 최대화시키는 문제를 생각해 보자. 두 선분의 길이를 각각 a, b라 하고 **그림** 3과 같이 두 선분의 끝점 중 반직선 위의 점을 각각 A, C, 두 선분이 만나는 점을 B, 두 반직선이 만나는 점을 D, 두 선분이 이루는 각을 $\theta\ (0<\theta<\pi)$라 하자. 그리고 대각선 AC의 길이를 c, 변 DA, DC의 길이를 각각 x, y라 하자. 삼각형 ABC에 코사인 제2 법칙을 적용하면 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta$를 얻는다. 그리고 삼각형 ACD에 피타고라스 정리를 적용하면 아래 식을 얻는다.

$$x^2+y^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta \qquad (*)$$

한편 구하는 사각형 ABCD의 넓이는 $S=\frac{1}{2}xy+\frac{1}{2}ab\sin\theta$이다.

산술평균-기하평균 부등식과 삼각함수의 합성을 활용하면 아래 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} S &\le \frac{1}{4}(x^2+y^2)+\frac{1}{2}ab\sin\theta=\frac{1}{4}(a^2+b^2-2ab\cos\theta)+\frac{1}{2}ab\sin\theta \\ &=\frac{1}{4}(a^2+b^2)+\frac{1}{2}ab(\sin\theta-\cos\theta) \\ &=\frac{1}{4}(a^2+b^2)+\frac{1}{\sqrt{2}}ab\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

마지막 식은 $\theta=\frac{3}{4}\pi$일 때 최댓값을 가진다. 한편 처음 부등식에서 등호가 성립하는 경우는 $x=y$일 때이고 임의의 θ에 대하여 (*)를 만족하는 x, y를 구할 수 있으므로 S의 최댓값은 $\frac{1}{4}(a^2+b^2+2\sqrt{2}\,ab)$이다. 이 사각형은 원에 내접하지 않는다.

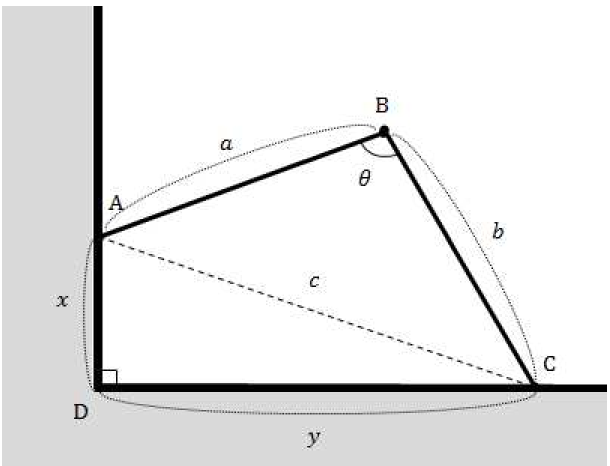

그림 3

[문제 2-1] **<10점>** 제시문 (**나**)의 밑줄 친 문제에서 사각형 ABCD가 원에 내접하는 조건을 추가하는 경우 넓이의 최댓값은 얼마인가?

[문제 2-2] **<20점>** 둘레의 길이가 1인 정n각형의 넓이 S_n을 n을 이용하여 표현하고, 정n각형에 대하여 등주부등식이 성립함을 보여라.

[문제 2-3] **<20점>** 그림 4에서와 같이 사잇각 ϕ로 만나는 두 반직선 위에 하나씩 끝점을 가지는 두 선분으로 만들어지는 사각형의 넓이를 최대화시키는 문제를 생각해 보자. 각 ϕ의 크기는 그림 5에 나타난 바와 같다. 두 선분의 길이를 a, b라 하고 제시문 (**나**)에서와 같이 변수 x, y를 도입하자. 사각형의 넓이를 x, y, a, b, θ를 이용하여 나타내고, 그 넓이의 최댓값을 구하라.

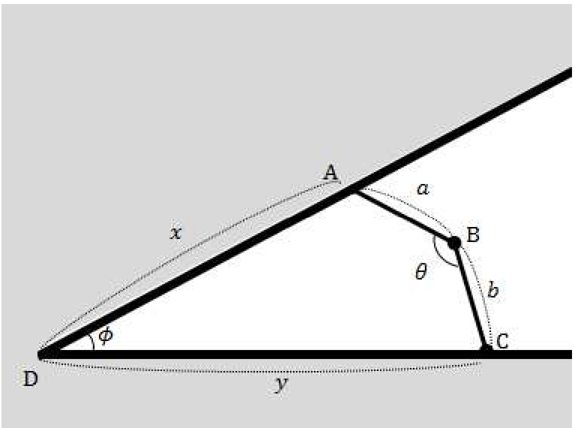

그림 4

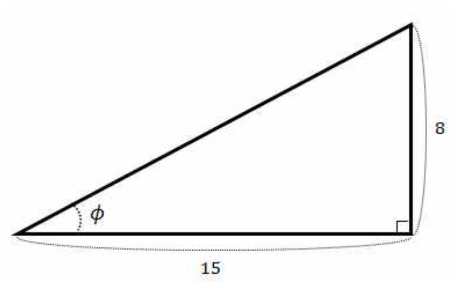

그림 5