2015학년도 논술 고사

자연계열(오전) (의학과제외)채점기준

성 명	
전 형	
수험번호	

표지를 제외한 페이지 수 : 8

2015학년도 논술 고사 채점기준

자연계열(오전)
(의학과제외)

[문제 1-1] <15점> 두 격자점 $(6,5)$와 $(7,a)$가 좋은 짝꿍이라고 하자. $(6,5)$를 m번, $(7,a)$를 n번 더해 $(2015,b)$가 될 때, 가능한 $a+b$의 값 중 가장 큰 값을 구하라. (단, m, n은 0 이상의 정수)

- 풀이

두 격자점 $(6,5)$과 $(7,a)$는 좋은 짝꿍이므로 $6a-35=\pm 1$이 된다. a는 정수이므로 $a=6$이다. $m(6,5)+n(7,6)=(2015,b)$ 이므로, $6m+7n=2015$, $5m+6n=b$이다. 따라서 $n=\dfrac{2015-6m}{7}$이 되고, $b=5m+6n=5m+6\left(\dfrac{2015-6m}{7}\right)=\dfrac{12090}{7}-\dfrac{m}{7}$이다. 따라서 m이 작을수록 b값이 증가하고, b는 정수이므로 $m=1$일 때 b의 최댓값은 1727이다. 따라서 $a+b=6+1727=1733$.

- 채점 기준

  - $a=6$ 구하기 **5점** (구하는 과정에서 $6a-35=\pm 1$의 마이너스 부호가 빠진 경우 **2점 감점**)
  - 식 $6m+7n=2015$, $5m+6n=b$ 적기 **+3점**
  - 완성하기 **+7점**

[문제 1-2] <15점> 황금 삼각형이란 이등변삼각형 중 밑변과 밑변이 아닌 변사이의 길이의 비가 $1:\varphi$인 것을 의미한다. 여기서 φ는 $x^2-x-1=0$의 양의 실수해로서 황금비로 불린다. 황금 삼각형이 격자다각형이 될 수 있는지 여부에 대하여 논하라.

- **풀이**

$\varphi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$이다. 황금 삼각형의 밑변의 길이를 a, 밑변이 아닌 변의 길이를 b라 하면, $b=\varphi a$가 성립하고, 이 삼각형의 높이는 $\sqrt{(\varphi a)^2-(a/2)^2}$이다. 따라서 이 도형의 넓이는

$$\frac{a^2}{2}\sqrt{\varphi^2-\frac{1}{4}}=\frac{a^2}{2}\sqrt{\varphi+\frac{3}{4}}=\frac{a^2}{4}\sqrt{5+2\sqrt{5}}\,.$$

이다. 만일 황금 삼각형이 격자다각형이라면 a^2은 정수이다. 한편, $q=\sqrt{5+2\sqrt{5}}$가 유리수라면 $\sqrt{5}=\dfrac{q^2-5}{2}$도 유리수이므로 모순이다. 따라서 q는 무리수이고, 이 도형의 넓이 또한 무리수이다. 한편 픽의 정리에 따르면 모든 격자 다각형의 넓이는 유리수이므로 모순이다. 따라서 격자다각형인 황금 삼각형은 존재하지 않는다.

- **채점 기준**
  - 논지가 옳고 황금 삼각형이 격자다각형이 될 수 없다는 결론을 얻은 경우 만점으로 처리하며, 다음과 같은 경우 **각 3점 감점** 요인이 있음
    - q가 무리수인 이유가 빠진 경우
    - 격자다각형이므로 a^2이 정수라는 내용이 빠진 경우
    - 황금비 계산이 잘못된 경우
    - 넓이 또는 높이 계산식이 잘못된 경우
  - 황금 삼각형이 격자다각형이 될 수 있다는 결론을 얻은 경우 답안의 수준을 고려하여 **3점 이내**로 부여할 수 있음.
- **비고**
  - q가 무리수인 이유가 황금비가 무리수라는 사실에 근거할 수 있음
  - 반드시 넓이의 고려가 필요한 것은 아니며 변의 길이의 제곱 간의 관계로도 풀이 가능

[문제 1-3] <20점> 원점 O를 내부에 포함하고 넓이가 2인 격자 사각형 ABCD가 있다. 이때, 사각형 ABCD의 대각선 중 하나는 O를 지남을 보여라.

● **풀이**

픽의 정리에 의하면 이 도형은 꼭짓점 A, B, C, D와 O를 제외하고는 어떤 격자점도 도형의 내부나 변에 포함하지 않는다. 따라서 A와 B, B와 C, C와 D, D와 A는 모두 좋은 짝꿍이다. A, B, C, D의 네 점을 차례대로 $(x_1,y_1),\ldots,(x_4,y_4)$라 두자. 한편 원점 O를 내부에 포함하므로 $x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i$의 값이 i와 상관없이 1 또는 -1로 항상 일정함을 알 수 있다. 일반성을 잃지 않고 이 값을 1이라 하자. 행렬 $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$의 역행렬은 $\frac{1}{x_1y_2-y_1x_2}\begin{pmatrix} y_2 & -x_2 \\ -y_1 & x_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_2 & -x_2 \\ -y_1 & x_1 \end{pmatrix}$이고 이 행렬 역시 좋은 짝꿍과 연관된 행렬이다. 이 행렬로 나타나는 일차변환 F로 네 꼭짓점 A, B, C, D를 보내자. 이때 네 점의 좌표는 각각 $(1,0)$, $(0,1)$, (p,q), (r,s)라 할 수 있고, 여전히 인접한 두 점의 계산 값이 1이므로 $p=-1, s=-1$이고, $ps-qr=1$임을 알 수 있다. 따라서 $qr=0$, 즉, q와 r중의 하나는 0이 되어야 한다. 이는 $F(\mathrm{A})$, O, $F(\mathrm{C})$, 혹은 $F(\mathrm{B})$, O, $F(\mathrm{D})$이 직선상에 있음을 의미한다. 일차변환 F에 의해 직선으로 변환되는 도형은 직선이므로 사각형 ABCD의 대각선 중 하나는 O를 지난다.

● **채점 기준**

1) 볼록인 격자 사각형인 경우

- 꼭짓점 A, B, C, D와 O를 제외하고는 어떤 격자점도 도형의 내부나 변에 포함하지 않음을 적시함 **5점**
- A와 B, B와 C, C와 D, D와 A는 모두 좋은 짝꿍이 됨을 확인함 **+5점**
- 적절한 일차변환을 도입하여 네 점 중 두 점의 좌표를 $(1,0)$, $(0,1)$로 가정할 수 있음을 설명함 **+5점**
  - $(1,0)$, $(0,1)$ 대신 $(1,0)$, $(0,-1)$로 시작할 수도 있음
  - (일차변환 도입과 같은) 근거 없이 단순화하는 경우 **2점 감점**
- 나머지 두 점이 만족할 관계식을 얻고 이로부터 결론을 도출함 **+5점**
- 특별한 경우로 한정하여 답안을 서술한 경우 합계 **10점 이내** 부여
- 유한 개의 경우만 있다고 하는 경우 합계 **8점 이내** 부여하되 좋은 짝꿍을 보인 경우 **13점 이내** 부여

2) 오목인 격자 사각형인 경우

- 오목인 경우 적절한 반례를 제시하며 주어진 명제가 거짓임을 주장한 경우는 만점(만점: 20점) 처리한다.
- 비록 적절한 반례를 제시하지는 못하였지만 명제가 거짓임을 주장한 경우 10점을 부여한다.
- 상반되는 두 방향의 답이 모두 제시된 경우에는 응시자에게 유리한 입장 하나를 바탕으로 채점한다.

[문제 2-1] <10점> 임의의 두 실수 a, b에 대하여

$$d(a,b)=\frac{(a-b)^2}{1+|a-b|}$$

와 같이 정의된 d가 실수 집합 위의 거리함수인지 여부를 제시문 (가)에 근거하여 논하라.

- **풀이**

$x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$ 인 경우, $d(x_1,x_3)=\frac{4}{1+2}=\frac{4}{3}$, $d(x_1,x_2)=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$, $d(x_2,x_3)=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$이다. 따라서 $d(x_1,x_3)>d(x_1,x_2)+d(x_2,x_3)$이다. 성질 (iv)가 성립하지 않으므로 거리함수가 아니다.

- **채점 기준**
  - 적절한 반례로 거리함수가 아니라고 결론 내린 경우 **만점**
  - 거리함수라고 결론 내린 경우
    - 예를 드는 경우는 **0점 처리**
    - 증명을 시도한 경우 **3점 이내**
  - 반례가 잘못된 경우
    - 계산 값들이 성질 (iv)를 충족함에도 거리함수가 아니라고 결론 내린 경우는 **3점 이내** 부여
    - 계산 상 실수가 있지만 그 결과 성질 (iv)를 충족하지 않아 거리함수가 아니라고 결론 내린 경우는 **5점 이내** 부여

[문제 2-2] <20점> 집합 X 위의 거리함수 d가 주어져 있다. X의 임의의 두 원소 P, Q 에 대하여 f를

$$f(\mathrm{P},\mathrm{Q})=\frac{\sqrt{d(\mathrm{P},\mathrm{Q})}}{1+\sqrt{d(\mathrm{P},\mathrm{Q})}}$$

와 같이 정의하면 f는 X 위의 거리함수임을 보여라.

- 풀이

제시문 (가)의 성질들을 확인해 보자.

(i)은 자명하다. (ii) $f(\mathrm{P},\mathrm{Q})=0\Leftrightarrow\frac{\sqrt{d(\mathrm{P},\mathrm{Q})}}{1+\sqrt{d(\mathrm{P},\mathrm{Q})}}=0\Leftrightarrow d(\mathrm{P},\mathrm{Q})=0\Leftrightarrow \mathrm{P}=\mathrm{Q}$

(iii) $f(\mathrm{P},\mathrm{Q})=\frac{\sqrt{d(\mathrm{P},\mathrm{Q})}}{1+\sqrt{d(\mathrm{P},\mathrm{Q})}}=\frac{\sqrt{d(\mathrm{Q},\mathrm{P})}}{1+\sqrt{d(\mathrm{Q},\mathrm{P})}}=f(\mathrm{Q},\mathrm{P})$

(iv) 0 이상의 실수들의 집합에서 정의된 함수 $h(t)=\frac{\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}$를 생각하자. $h(t)=1-\frac{1}{1+\sqrt{t}}$로부터 h는 증가함수임을 알 수 있다. 세 점 $\mathrm{P}(x_1,y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2,y_2)$, $\mathrm{R}(x_3,y_3)$에 대하여 $d(\mathrm{P},\mathrm{R})\le d(\mathrm{P},\mathrm{Q})+d(\mathrm{Q},\mathrm{R})$이므로

$$\begin{aligned}f(\mathrm{P},\mathrm{R})&=\frac{\sqrt{d(\mathrm{P},\mathrm{R})}}{1+\sqrt{d(\mathrm{P},\mathrm{R})}}\\&=h(d(\mathrm{P},\mathrm{R}))\le h(d(\mathrm{P},\mathrm{Q})+d(\mathrm{Q},\mathrm{R}))\\&=\frac{\sqrt{d(\mathrm{P},\mathrm{Q})+d(\mathrm{Q},\mathrm{R})}}{1+\sqrt{d(\mathrm{P},\mathrm{Q})+d(\mathrm{Q},\mathrm{R})}}\\&\le\frac{\sqrt{d(\mathrm{P},\mathrm{Q})}+\sqrt{d(\mathrm{Q},\mathrm{R})}}{1+\sqrt{d(\mathrm{P},\mathrm{Q})+d(\mathrm{Q},\mathrm{R})}}\\&=\frac{\sqrt{d(\mathrm{P},\mathrm{Q})}}{1+\sqrt{d(\mathrm{P},\mathrm{Q})+d(\mathrm{Q},\mathrm{R})}}+\frac{\sqrt{d(\mathrm{Q},\mathrm{R})}}{1+\sqrt{d(\mathrm{P},\mathrm{Q})+d(\mathrm{Q},\mathrm{R})}}\end{aligned}$$

여기서 두 번째 부등식은 제시문 (가)의 예제 2에 의해 성립한다.

한편 $d(\mathrm{P},\mathrm{Q})\ge 0$과 $d(\mathrm{Q},\mathrm{R})\ge 0$으로부터 부등식 $\frac{\sqrt{d(\mathrm{P},\mathrm{Q})}}{1+\sqrt{d(\mathrm{P},\mathrm{Q})+d(\mathrm{Q},\mathrm{R})}}\le\frac{\sqrt{d(\mathrm{P},\mathrm{Q})}}{1+\sqrt{d(\mathrm{P},\mathrm{Q})}}$ 와 $\frac{\sqrt{d(\mathrm{Q},\mathrm{R})}}{1+\sqrt{d(\mathrm{P},\mathrm{Q})+d(\mathrm{Q},\mathrm{R})}}\le\frac{\sqrt{d(\mathrm{Q},\mathrm{R})}}{1+\sqrt{d(\mathrm{Q},\mathrm{R})}}$이 성립하므로 $f(\mathrm{P},\mathrm{R})\le f(\mathrm{P},\mathrm{Q})+f(\mathrm{Q},\mathrm{R})$이 성립한다.

- **채점 기준**
  - 성질 (i), (ii), (iii) **8점(2+3+3)**
    - 성질 (ii). (iii)에서 d가 거리함수라는 사실을 사용(언급)하지 않은 경우 **1점씩 감점**
  - $h(t)$가 증가함수임(또는 삼각부등식(성질 (iv)) $f(\mathrm{P},\mathrm{R}) \le f(\mathrm{P},\mathrm{Q}) + f(\mathrm{Q},\mathrm{R})$을 보여야 함을 인지하고 이를 보이기 위한 적절한 내용)을 서술함 +4**점**
  - 부등식을 보이는 과정 +8**점**
    - 부등식의 유도에서 논리적 비약의 가능성이 있으므로 이를 체크하여 적절히 감점함

- **별해**

성질 (iv)를 보이는 과정만...

$A = \sqrt{d(\mathrm{P},\mathrm{Q})}$, $B = \sqrt{d(\mathrm{Q},\mathrm{R})}$, $C = \sqrt{d(\mathrm{P},\mathrm{R})}$ 이라 놓으면

$A^2 + B^2 \ge C^2$, 따라서 $(A+B)^2 \ge C^2 + 2AB \ge C^2$, 그러므로, $A + B \ge C$.

$$\begin{aligned}
\frac{A}{1+A} + \frac{B}{1+B} - \frac{C}{1+C} &= \frac{A+B+2AB}{1+A+B+AB} - \frac{C}{1+C} \\
&= 1 + \frac{AB-1}{1+A+B+AB} - 1 + \frac{1}{1+C} \\
&= \frac{AB-1+ABC-C+1+A+B+AB}{(1+A+B+AB)(1+C)} \\
&= \frac{ABC+2AB+A+B-C}{(1+A+B+AB)(1+C)} \ge \frac{ABC+2AB}{(1+A+B+AB)(1+C)} \ge 0
\end{aligned}$$

[문제 2-3] <20점> 두 양수 a, b의 산술평균($A=\frac{a+b}{2}$), 기하평균($G=\sqrt{ab}$), 조화평균($H=\frac{2ab}{a+b}$)이 삼각형의 세 변의 길이가 될 필요충분조건은

$$\boxed{\alpha_1+\beta_1\varphi+\gamma_1\sqrt{1+2\varphi} \ < \ \frac{b}{a} \ < \ \alpha_2+\beta_2\varphi+\gamma_2\sqrt{1+2\varphi}}$$

이다. 유리수 α_1, α_2, β_1, β_2, γ_1, γ_2의 곱을 구하라.

- **풀이**

$\lambda=\frac{b}{a}$라 하면 $\lambda>0$이다. $AH=G^2$이므로 조화평균, 기하 평균, 산술 평균은 이 순서대로 등비수열을 이룬다. 공비 $r=\frac{\frac{a+b}{2}}{\sqrt{ab}}=\frac{1+\lambda}{2\sqrt{\lambda}}$라 두자. $1+\lambda\geq 2\sqrt{\lambda}$이므로 $r\geq 1$이다. 제시문 (나)에 의하여, $1\leq r<\varphi$이다. 즉, $1\leq\frac{1+\lambda}{2\sqrt{\lambda}}<\varphi$이다. 이 부등식을 풀면 $\varphi-\sqrt{\varphi}<\sqrt{\lambda}<\varphi+\sqrt{\varphi}$이고 따라서

$$(\varphi-\sqrt{\varphi})^2<\lambda<(\varphi+\sqrt{\varphi})^2$$

이다. 한편

$$\begin{aligned}(\varphi\pm\sqrt{\varphi})^2&=\varphi^2+\varphi\pm 2\varphi\sqrt{\varphi}=1+2\varphi\pm 2\sqrt{\varphi^3}\\&=1+2\varphi\pm 2\sqrt{\varphi^2+\varphi}=1+2\varphi\pm 2\sqrt{\varphi^3}=1+2\varphi\pm 2\sqrt{1+2\varphi}\end{aligned}$$

이므로 부등식의 해는

$$1+2\varphi-2\sqrt{1+2\varphi}<\lambda<1+2\varphi+2\sqrt{1+2\varphi}$$

이다. 이로부터 답 -16을 얻는다.

- **채점 기준**
  - $AH = G^2$ 또는 H, G, A가 등비수열을 이룸을 서술함 **5점**
  - 제시문에 근거하여 부등식 $1 \le \frac{1+\lambda}{2\sqrt{\lambda}} < \varphi$ 를 얻음 **+5점**
  - 부등식을 풀어 λ의 범위를 정하고 이로부터 문제의 답을 구함 **+10점**

- **별해**

$\lambda = \frac{b}{a}$라 하면 $\lambda > 0$이다. 두 수 a, b의 산술 평균, 기하 평균, 조화 평균은 각각 $a \cdot \frac{1+\lambda}{2}$, $a \cdot \sqrt{\lambda}$, $a \cdot \frac{2\lambda}{1+\lambda}$ 이며 이 중 산술 평균이 가장 큰 값이다. 따라서 이 수들이 삼각형의 세 변이 되기 위한 필요충분조건은 $\frac{1+\lambda}{2} < \sqrt{\lambda} + \frac{2\lambda}{1+\lambda}$이다. 방정식 $\frac{1+\lambda}{2} = \sqrt{\lambda} + \frac{2\lambda}{1+\lambda}$의 근을 구해 보자. $\frac{1+\lambda}{2} - \frac{2\lambda}{1+\lambda} = \sqrt{\lambda}$, 이를 제곱하면 $\left(\frac{1+\lambda}{2} - \frac{2\lambda}{1+\lambda}\right)^2 = \lambda$, 이를 정리한 후 양변에 $4(1+\lambda)^2$ 을 곱하면 $\lambda^4 - 8\lambda^3 - 2\lambda^2 - 8\lambda + 1 = 0$, 양변을 λ^2으로 나누고

$$z = \lambda + \frac{1}{\lambda} \qquad (ㄱ)$$

라 두면 $z^2 - 8z - 4 = 0$을 얻는다. 이 방정식의 양수 해는 $z = 4 + 2\sqrt{5} = 2(1+2\varphi)$이다. 이를 식 (ㄱ)에 대입하고 풀면 $\lambda = 1 + 2\varphi \pm 2\sqrt{\varphi + \varphi^2}$ 을 얻는다. 따라서 부등식의 해는

$$1 + 2\varphi - 2\sqrt{1+2\varphi} < \lambda < 1 + 2\varphi + 2\sqrt{1+2\varphi}$$

이다. 이로부터 답 -16을 얻는다.

- **채점 기준 (별해)**
  - $\frac{1+\lambda}{2} < \sqrt{\lambda} + \frac{2\lambda}{1+\lambda}$ 유도 **5점**
  - 4차식 유도 **+5점**
  - 마무리 **+10점**