2015학년도 논술 고사

자연계열(오전)
(의학과제외)모범답안

성　　명	
전　　형	
수험번호	

표지를 제외한 페이지 수 : 4

2015학년도 자연계열 논술고사 모범답안

자연계열(오전) (의학과제외)

[문제 1-1] <15점> 두 격자점 $(6,5)$와 $(7,a)$가 좋은 짝꿍이라고 하자. $(6,5)$를 m번, $(7,a)$를 n번 더해 $(2015,b)$가 될 때, 가능한 $a+b$의 값 중 가장 큰 값을 구하라. (단, m, n은 0 이상의 정수)

[풀이] 두 격자점 $(6,5)$과 $(7,a)$는 좋은 짝꿍이므로 $6a-35=\pm 1$이 된다. a는 정수이므로 $a=6$이다. $m(6,5)+n(7,6)=(2015,b)$ 이므로, $6m+7n=2015$, $5m+6n=b$이다. 따라서 $n=\dfrac{2015-6m}{7}$이 되고, $b=5m+6n=5m+6\left(\dfrac{2015-6m}{7}\right)=\dfrac{12090}{7}-\dfrac{m}{7}$이다. 따라서 m이 작을수록 b값이 증가하고, b는 정수이므로 $m=1$일 때 b의 최댓값은 1727이다. 따라서 $a+b=6+1727=1733$.

[문제 1-2] <15점> 황금 삼각형이란 이등변삼각형 중 밑변과 밑변이 아닌 변사이의 길이의 비가 $1:\varphi$인 것을 의미한다. 여기서 φ는 $x^2-x-1=0$의 양의 실수해로서 황금비로 불린다. 황금 삼각형이 격자다각형이 될 수 있는지 여부에 대하여 논하라.

[풀이] $\varphi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$이다. 황금 삼각형의 밑변의 길이를 a, 밑변이 아닌 변의 길이를 b라 하면, $b=\varphi a$가 성립하고, 이 삼각형의 높이는 $\sqrt{(\varphi a)^2-(a/2)^2}$이다, 따라서 이 도형의 넓이는

$$\frac{a^2}{2}\sqrt{\varphi^2-\frac{1}{4}}=\frac{a^2}{2}\sqrt{\varphi+\frac{3}{4}}=\frac{a^2}{4}\sqrt{5+2\sqrt{5}}\,.$$

이다. 만일 황금 삼각형이 격자다각형이라면 a^2은 정수이다. 한편, $q=\sqrt{5+2\sqrt{5}}$가 유리수라면 $\sqrt{5}=\dfrac{q^2-5}{2}$도 유리수이므로 모순이다. 따라서 q는 무리수이고, 이 도형의 넓이 또한 무리수이다. 한편 픽의 정리에 따르면 모든 격자 다각형의 넓이는 유리수이므로 모순이다. 따라서 격자다각형인 황금 삼각형은 존재하지 않는다.

[문제 1-3] <20점> 원점 O를 내부에 포함하고 넓이가 2인 격자 사각형 ABCD가 있다. 이때, 사각형 ABCD의 대각선 중 하나는 O를 지남을 보여라.

[풀이1:볼록한 경우] 픽의 정리에 의하면 이 도형은 꼭짓점 A, B, C, D와 O를 제외하고는 어떤 격자점도 도형의 내부나 변에 포함하지 않는다. 따라서 A와 B, B와 C, C와 D, D와 A는 모두 좋은 짝꿍이다. A, B, C, D의 네 점을 차례대로 $(x_1,y_1),\ldots,(x_4,y_4)$라 두자. 한편 원점 O를 내부에 포함하므로 $x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i$의 값이 i와 상관없이 1 또는 -1로 항상 일정함을 알 수 있다. 일반

성을 잃지 않고 이 값을 1이라 하자. 행렬 $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$의 역행렬은 $\frac{1}{x_1y_2 - y_1x_2}\begin{pmatrix} y_2 & -x_2 \\ -y_1 & x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 & -x_2 \\ -y_1 & x_1 \end{pmatrix}$이고 이 행렬 역시 좋은 짝꿍과 연관된 행렬이다. 이 행렬로 나타나는 일차변환 F로 네 꼭짓점 A, B, C, D를 보내자. 이때 네 점의 좌표는 각각 $(1,0)$, $(0,1)$, (p,q), (r,s)라 할 수 있고, 여전히 인접한 두 점의 계산 값이 1이므로 $p=-1, s=-1$이고, $ps-qr=1$임을 알 수 있다. 따라서 $qr=0$, 즉, q와 r중의 하나는 0이 되어야 한다. 이는 $F(\mathrm{A})$, O, $F(\mathrm{C})$, 혹은 $F(\mathrm{B})$, O, $F(\mathrm{D})$이 직선상에 있음을 의미한다. 일차변환 F에 의해 직선으로 변환되는 도형은 직선이므로 사각형 ABCD의 대각선 중 하나는 O를 지난다.

[풀이2: 오목한 경우] 오목인 격자 사각형인 경우 적절한 반례를 제시하며 주어진 명제가 거짓임을 논리적으로 주장한 경우 만점처리함

[문제 2-1] <10점> 임의의 두 실수 a, b에 대하여

$$d(a,b) = \frac{(a-b)^2}{1+|a-b|}$$

와 같이 정의된 d가 실수 집합 위의 거리함수인지 여부를 제시문 **(가)**에 근거하여 논하라.

[풀이] $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ 인 경우, $d(x_1, x_3) = \frac{4}{1+2} = \frac{4}{3}$, $d(x_1, x_2) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$, $d(x_2, x_3) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$이다. 따라서 $d(x_1, x_3) > d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3)$이다. 성질 (iv)가 성립하지 않으므로 거리함수가 아니다.

[문제 2-2] <20점> 집합 X 위의 거리함수 d가 주어져 있다. X의 임의의 두 원소 P, Q에 대하여 f를

$$f(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = \frac{\sqrt{d(\mathrm{P}, \mathrm{Q})}}{1+\sqrt{d(\mathrm{P}, \mathrm{Q})}}$$

와 같이 정의하면 f는 X 위의 거리함수임을 보여라.

[풀이] 제시문 **(가)**의 성질들을 확인해 보자.

(i)은 자명하다. (ii) $f(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{d(\mathrm{P}, \mathrm{Q})}}{1+\sqrt{d(\mathrm{P}, \mathrm{Q})}} = 0 \Leftrightarrow d(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{P} = \mathrm{Q}$

(iii) $f(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = \frac{\sqrt{d(\mathrm{P}, \mathrm{Q})}}{1+\sqrt{d(\mathrm{P}, \mathrm{Q})}} = \frac{\sqrt{d(\mathrm{Q}, \mathrm{P})}}{1+\sqrt{d(\mathrm{Q}, \mathrm{P})}} = f(\mathrm{Q}, \mathrm{P})$

(iv) 0 이상의 실수들의 집합에서 정의된 함수 $h(t)=\frac{\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}$를 생각하자. $h(t)=1-\frac{1}{1+\sqrt{t}}$로부터 h는 증가함수임을 알 수 있다. 세 점 $\mathrm{P}(x_1,y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2,y_2)$, $\mathrm{R}(x_3,y_3)$에 대하여 $d(\mathrm{P},\mathrm{R}) \le d(\mathrm{P},\mathrm{Q})+d(\mathrm{Q},\mathrm{R})$이므로

$$\begin{aligned} f(\mathrm{P},\mathrm{R}) &= \frac{\sqrt{d(\mathrm{P},\mathrm{R})}}{1+\sqrt{d(\mathrm{P},\mathrm{R})}} \\ &= h(d(\mathrm{P},\mathrm{R})) \le h(d(\mathrm{P},\mathrm{Q})+d(\mathrm{Q},\mathrm{R})) \\ &= \frac{\sqrt{d(\mathrm{P},\mathrm{Q})+d(\mathrm{Q},\mathrm{R})}}{1+\sqrt{d(\mathrm{P},\mathrm{Q})+d(\mathrm{Q},\mathrm{R})}} \\ &\le \frac{\sqrt{d(\mathrm{P},\mathrm{Q})}+\sqrt{d(\mathrm{Q},\mathrm{R})}}{1+\sqrt{d(\mathrm{P},\mathrm{Q})+d(\mathrm{Q},\mathrm{R})}} \\ &= \frac{\sqrt{d(\mathrm{P},\mathrm{Q})}}{1+\sqrt{d(\mathrm{P},\mathrm{Q})+d(\mathrm{Q},\mathrm{R})}} + \frac{\sqrt{d(\mathrm{Q},\mathrm{R})}}{1+\sqrt{d(\mathrm{P},\mathrm{Q})+d(\mathrm{Q},\mathrm{R})}} \end{aligned}$$

여기서 두 번째 부등식은 제시문 (가)의 예제 2에 의해 성립한다.

한편 $d(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \ge 0$과 $d(\mathrm{Q},\mathrm{R}) \ge 0$으로부터 부등식 $\frac{\sqrt{d(\mathrm{P},\mathrm{Q})}}{1+\sqrt{d(\mathrm{P},\mathrm{Q})+d(\mathrm{Q},\mathrm{R})}} \le \frac{\sqrt{d(\mathrm{P},\mathrm{Q})}}{1+\sqrt{d(\mathrm{P},\mathrm{Q})}}$ 와 $\frac{\sqrt{d(\mathrm{Q},\mathrm{R})}}{1+\sqrt{d(\mathrm{P},\mathrm{Q})+d(\mathrm{Q},\mathrm{R})}} \le \frac{\sqrt{d(\mathrm{Q},\mathrm{R})}}{1+\sqrt{d(\mathrm{Q},\mathrm{R})}}$이 성립하므로 $f(\mathrm{P},\mathrm{R}) \le f(\mathrm{P},\mathrm{Q})+f(\mathrm{Q},\mathrm{R})$이 성립한다.

[별해] (성질 (iv)를 보이는 과정에서)

$A=\sqrt{d(\mathrm{P},\mathrm{Q})}$, $B=\sqrt{d(\mathrm{Q},\mathrm{R})}$, $C=\sqrt{d(\mathrm{P},\mathrm{R})}$이라 놓으면

$A^2+B^2 \ge C^2$, 따라서 $(A+B)^2 \ge C^2+2AB \ge C^2$, 그러므로, $A+B \ge C$.

$$\begin{aligned} \frac{A}{1+A}+\frac{B}{1+B}-\frac{C}{1+C} &= \frac{A+B+2AB}{1+A+B+AB}-\frac{C}{1+C} \\ &= 1+\frac{AB-1}{1+A+B+AB}-1+\frac{1}{1+C} \\ &= \frac{AB-1+ABC-C+1+A+B+AB}{(1+A+B+AB)(1+C)} \\ &= \frac{ABC+2AB+A+B-C}{(1+A+B+AB)(1+C)} \ge \frac{ABC+2AB}{(1+A+B+AB)(1+C)} \ge 0 \end{aligned}$$

[문제 2-3] <20점> 두 양수 a, b의 산술평균($A=\frac{a+b}{2}$), 기하평균($G=\sqrt{ab}$), 조화평균($H=\frac{2ab}{a+b}$)이 삼각형의 세 변의 길이가 될 필요충분조건은

$$\alpha_1+\beta_1\varphi+\gamma_1\sqrt{1+2\varphi} \;<\; \frac{b}{a} \;<\; \alpha_2+\beta_2\varphi+\gamma_2\sqrt{1+2\varphi}$$

이다. 유리수 α_1, α_2, β_1, β_2, γ_1, γ_2의 곱을 구하라.

[풀이] $\lambda=\dfrac{b}{a}$라 하면 $\lambda>0$이다. $AH=G^2$이므로 조화평균, 기하 평균, 산술 평균은 이 순서대로 등비수열을 이룬다. 공비 $r=\dfrac{\frac{a+b}{2}}{\sqrt{ab}}=\dfrac{1+\lambda}{2\sqrt{\lambda}}$라 두자. $1+\lambda\ge 2\sqrt{\lambda}$이므로 $r\ge 1$이다. 제시문 (나)에 의하여, $1\le r<\varphi$이다. 즉, $1\le\dfrac{1+\lambda}{2\sqrt{\lambda}}<\varphi$이다. 이 부등식을 풀면 $\varphi-\sqrt{\varphi}<\sqrt{\lambda}<\varphi+\sqrt{\varphi}$이고 따라서

$$(\varphi-\sqrt{\varphi})^2<\lambda<(\varphi+\sqrt{\varphi})^2$$

이다. 한편

$$\begin{aligned}(\varphi\pm\sqrt{\varphi})^2&=\varphi^2+\varphi\pm 2\varphi\sqrt{\varphi}=1+2\varphi\pm 2\sqrt{\varphi^3}\\&=1+2\varphi\pm 2\sqrt{\varphi^2+\varphi}=1+2\varphi\pm 2\sqrt{\varphi^3}=1+2\varphi\pm 2\sqrt{1+2\varphi}\end{aligned}$$

이므로 부등식의 해는

$$1+2\varphi-2\sqrt{1+2\varphi}<\lambda<1+2\varphi+2\sqrt{1+2\varphi}$$

이다. 이로부터 답 -16을 얻는다.

[별해] $\lambda=\dfrac{b}{a}$라 하면 $\lambda>0$이다. 두 수 a, b의 산술 평균, 기하 평균, 조화 평균은 각각 $a\cdot\dfrac{1+\lambda}{2}$, $a\cdot\sqrt{\lambda}$, $a\cdot\dfrac{2\lambda}{1+\lambda}$ 이며 이 중 산술 평균이 가장 큰 값이다. 따라서 이 수들이 삼각형의 세 변이 되기 위한 필요충분조건은 $\dfrac{1+\lambda}{2}<\sqrt{\lambda}+\dfrac{2\lambda}{1+\lambda}$이다. 방정식 $\dfrac{1+\lambda}{2}=\sqrt{\lambda}+\dfrac{2\lambda}{1+\lambda}$의 근을 구해 보자. $\dfrac{1+\lambda}{2}-\dfrac{2\lambda}{1+\lambda}=\sqrt{\lambda}$, 이를 제곱하면 $\left(\dfrac{1+\lambda}{2}-\dfrac{2\lambda}{1+\lambda}\right)^2=\lambda$, 이를 정리한 후 양변에 $4(1+\lambda)^2$ 을 곱하면 $\lambda^4-8\lambda^3-2\lambda^2-8\lambda+1=0$, 양변을 λ^2으로 나누고

$$(\text{ㄱ})\qquad\qquad z=\lambda+\frac{1}{\lambda}$$

라 두면 $z^2-8z-4=0$을 얻는다. 이 방정식의 양수 해는 $z=4+2\sqrt{5}=2(1+2\varphi)$이다. 이를 식 (ㄱ)에 대입하고 풀면 $\lambda=1+2\varphi\pm 2\sqrt{\varphi+\varphi^2}$ 을 얻는다. 따라서 부등식의 해는

$$1+2\varphi-2\sqrt{1+2\varphi}<\lambda<1+2\varphi+2\sqrt{1+2\varphi}$$

이다. 이로부터 답 -16을 얻는다.