2015학년도 논술 고사

자연계열(오전)
(의학과제외)

성　　명	
전　　형	
수험번호	

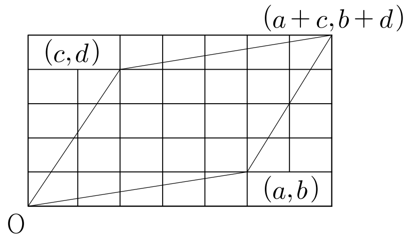
표지를 제외한 페이지 수 : 6

2015학년도 자연계열 논술고사

자연계열(오전)
(의학과제외)

[문제 1] <50점> 다음 제시문을 읽고 물음에 답하라.

(가) 격자점이란 평면 위에서 x, y 좌표가 모두 정수인 점을 의미한다. 격자다각형이란 모든 꼭짓점이 격자점인 다각형이다. 평행사변형인 격자다각형의 넓이는 비교적 쉽게 구할 수 있다. 원점 O와 세 격자점 (a,b), (c,d), $(a+c,b+d)$를 꼭짓점으로 하는 평행사변형 P의 넓이는 다음과 같은 간단한 계산을 통해 얻어진다. 만일 (a,b), (c,d)가 아래 그림처럼

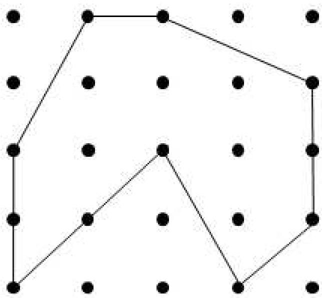


주어지면 P의 넓이는 전체 사각형에서 바깥 부분의 넓이를 빼서 얻을 수 있으므로 P의 넓이 $=(a+c)(b+d)-2\left(\frac{ab}{2}+\frac{cd}{2}+bc\right)=ad-bc$이다. 보다 일반적으로 평행사변형 P의 넓이는 $|ad-bc|$으로 얻을 수 있다.

격자다각형의 넓이를 구하는 일반적인 방법으로 픽의 정리(Pick's theorem)가 있다. 격자다각형 내부의 격자점 개수를 I, 변 위의 격자점 개수를 B라 하면 다각형의 넓이 S는

$$S=I+\frac{B}{2}-1$$

로 계산할 수 있다. 이때 다각형이 반드시 볼록 다각형일 필요는 없다. 예를 들어 아래와 같은 격자다각형은 내부에 6개의 격자점, 변 위에 11개의 격자점이 있으므로 그 넓이가 $\frac{21}{2}$이다.



픽의 정리를 활용하여 정삼각형은 격자다각형이 될 수 없음을 보이자. 정삼각형인 격자다각형이 있다고 가정하자. 이 도형의 한 변의 길이를 a라 하면 이 도형의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$이 되는데 격자삼각형이라는 사실로부터 a^2은 정수이다. 따라서 이 도형의 넓이는 무리수이다. 한편 픽의 정리에 따르면 모든 격자다각형의 넓이는 유리수이므로 모순이다. 결론적으로 정삼각형은 격자다각형이 될 수 없다.

(나) 평면 위의 두 격자점 (a,b), (c,d)를 생각하자. 이 두 격자점의 덧셈과 뺄셈을 다음과 같이 정의한다.

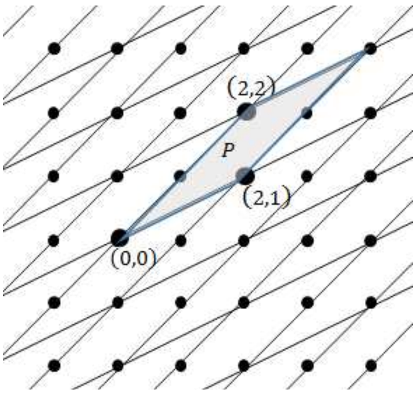
$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d),\ (a,b)-(c,d)=(a-c,b-d)$$

두 격자점을 유한 번 더하거나 빼서 평면 위의 모든 격자점을 표현할 수 있으면 이 두 격자점을 **좋은 짝꿍**이라고 하자. 즉, 임의의 격자점 (x,y)를

$$m(a,b)+n(c,d)=(ma+nc,\ mb+nd)\ (\text{단, } m,n\text{은 정수})$$

로 표현할 수 있으면 두 격자점 (a,b), (c,d)는 좋은 짝꿍이 된다. 예를 들어, 두 격자점이 (1,0), (0,1)이면 임의의 격자점 (x,y)는 $x(1,0)+y(0,1)$로 표현할 수 있으므로 (1,0), (0,1)은 좋은 짝꿍이 된다. 하지만 두 격자점이 (2,1), (2,2)라면 이 두 점으로는 (1,1)을 표현할 수 없으므로 이 두 점은 좋은 짝꿍이 아니다.

이제 두 격자점 (a,b), (c,d)가 좋은 짝꿍이기 위한 필요충분조건을 찾아보자. 원점과 세 점 (a,b), (c,d), $(a+c,b+d)$를 꼭짓점으로 하는 평행사변형을 P라 하자. 원점에서 (a,b), (c,d) 방향으로 두 직선을 긋고 이 두 직선과 평행하면서 같은 간격을 가지도록 여러 직선을 그어 평행사변형 P와 합동인 도형이 반복해서 나오도록 하자.



이때 각 평형사변형의 꼭짓점은 정확히 $m(a,b)+n(c,d)$ 꼴로 표현될 수 있음을 알 수 있고 이들 꼭짓점을 제외하고는 $m(a,b)+n(c,d)$로 표현될 수 있는 격자점은 없다. 따라서 두 격자점이 좋은 짝꿍일 필요충분조건은 P의 내부나 변에 네 꼭짓점을 제외한 다른 격자점이 존재하지 않는 것이다. 픽의 정리에 따르면 이러한 P의 넓이는 1이다. 따라서 **(가)**에 의하면, 두 격자점 (a,b), (c,d)가 좋은 짝꿍이 될 필요충분조건은 $|ad-bc|=1$이다.

한편 좋은 짝꿍인 두 격자점 (a,b), (c,d)에 대하여 일차변환 F의 행렬을 $A=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$라 하자. 만일 또 다른 두 격자점 (e,f), (g,h)가 좋은 짝꿍이라면 이 두 격자점을 일차변환 F로 보내서 얻어지는 두 점 $(ae+cf,be+df)$, $(ag+ch,bg+dh)$ 역시

$$|(ae+cf)(bg+dh)-(be+df)(ag+ch)|=|(ad-bc)(eh-gf)|=1$$

을 만족하므로 좋은 짝꿍이 된다.

[문제 1-1] <15점> 두 격자점 $(6,5)$와 $(7,a)$가 좋은 짝꿍이라고 하자. $(6,5)$를 m번, $(7,a)$를 n번 더해 $(2015,b)$가 될 때, 가능한 $a+b$의 값 중 가장 큰 값을 구하라. (단, m, n은 0 이상의 정수)

[문제 1-2] <15점> 황금 삼각형이란 이등변삼각형 중 밑변과 밑변이 아닌 변사이의 길이의 비가 $1:\varphi$인 것을 의미한다. 여기서 φ는 $x^2-x-1=0$의 양의 실수해로서 황금비로 불린다. 황금 삼각형이 격자다각형이 될 수 있는지 여부에 대하여 논하라.

[문제 1-3] <20점> 원점 O를 내부에 포함하고 넓이가 2인 격자 사각형 ABCD가 있다. 이때, 사각형 ABCD의 대각선 중 하나는 O를 지남을 보여라.

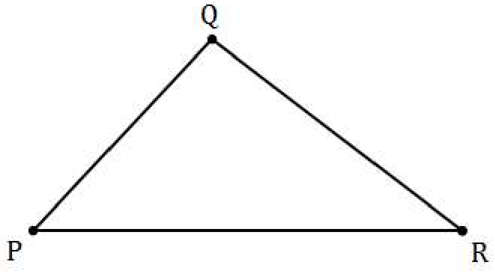
[문제 2] <50점> 다음 제시문을 읽고 물음에 답하라.

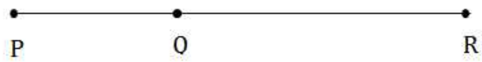
(가) 거리함수란 주어진 집합에 속한 임의의 두 원소 간의 거리를 정하는 함수이다. 거리라는 개념은 유클리드 기하에서와 같이 우리가 그동안 사용해 오던 방식으로 정할 수 있지만, 수학적으로 더욱 일반화할 수도 있다. 구체적으로 집합 X의 임의의 두 원소 P, Q에 대하여 실수 $d(\mathrm{P},\mathrm{Q})$가 주어져 있다고 하자. X에 속하는 모든 원소 P, Q, R에 대하여 다음 성질들이 성립할 때 d를 X 위의 거리함수라고 한다.

(i) $d(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \geq 0$
(ii) $d(\mathrm{P},\mathrm{Q}) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{P}=\mathrm{Q}$
(iii) $d(\mathrm{P},\mathrm{Q}) = d(\mathrm{Q},\mathrm{P})$
(iv) $d(\mathrm{P},\mathrm{R}) \leq d(\mathrm{P},\mathrm{Q}) + d(\mathrm{Q},\mathrm{R})$

이 성질들은 우리가 평소에 사용하는 거리라는 개념의 일반적인 성질들을 나타낸다. 거리는 음이 아닌 실수 값을 가지고, 같은 점 사이의 거리는 0이지만 서로 다른 두 점 사이의 거리는 양수이다. 또한, 두 점 P와 Q 사이의 거리는 Q와 P 사이의 거리와 같다.

거리함수의 성질 중 (iv)는 **삼각부등식**으로 알려져 있으며, 삼각형에서 두변의 길이의 합은 나머지 한 변의 길이보다 크다는 사실을 일반화한 것이다. 아래 그림에서와 같이 평면 위의 서로 다른 세 점 P, Q, R이 삼각형을 이루는 경우 $\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QR}} > \overline{\mathrm{PR}}$이고, 세 점 P, Q, R이 차례대로 일직선 위에 있는 경우에는 $\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QR}} = \overline{\mathrm{PR}}$이 성립한다. 이로부터 삼각부등식은 거리함수의 자연스러운 성질임을 확인할 수 있다.





예제 1. 평면 위의 임의의 두 점 $\mathrm{P}(x_1,y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2,y_2)$에 대하여 $d(\mathrm{P},\mathrm{Q})$를

$$d(\mathrm{P},\mathrm{Q}) = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

으로 정의하면 d는 거리함수가 된다. 성질 (i), (ii), (iii)은 쉽게 확인 가능하다. 성질 (iv)를 증명해 보자. $\mathrm{P}(x_1,y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2,y_2)$, $\mathrm{R}(x_3,y_3)$에 대하여

$$
\begin{aligned}
(d(\mathrm{P},\mathrm{Q})+d(\mathrm{Q},\mathrm{R}))^2-(d(\mathrm{P},\mathrm{R}))^2 = &\ (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2 \\
&+2\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\ \sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2} \\
&-(x_1-x_3)^2-(y_1-y_3)^2 \\
=&\ 2\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\ \sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2} \\
&-2(x_1-x_2)(x_2-x_3)-2(y_1-y_2)(y_2-y_3)
\end{aligned}
$$

이 성립한다. 코시-슈바르츠 부등식, 즉 $|a_1b_1+a_2b_2| \le \sqrt{a_1^2+a_2^2}\ \sqrt{b_1^2+b_2^2}$ 을 적용하면 $(d(\mathrm{P},\mathrm{Q})+d(\mathrm{Q},\mathrm{R}))^2-(d(\mathrm{P},\mathrm{R}))^2 \ge 0$을 얻고 따라서 $d(\mathrm{P},\mathrm{Q})+d(\mathrm{Q},\mathrm{R}) \ge d(\mathrm{P},\mathrm{R})$이 성립한다.

예제 2. 실수들의 집합에서 두 실수 a와 b에 대하여 $d(a,b)=\sqrt{|a-b|}$로 정의하면 d는 거리함수이다. 성질 (i), (ii), (iii)은 쉽게 확인 가능하며 성질 (iv)는 아래 식으로부터 확인할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
(\sqrt{|a-b|}+\sqrt{|b-c|})^2-(\sqrt{|a-c|})^2 &= |a-b|+|b-c|+2\sqrt{|a-b|}\ \sqrt{|b-c|}-|a-c| \\
&\ge |a-c|+2\sqrt{|a-b|}\ \sqrt{|b-c|}-|a-c| \\
&= 2\sqrt{|a-b|}\ \sqrt{|b-c|} \ge 0
\end{aligned}
$$

예제 3. 실수들의 집합에서 두 실수 a와 b에 대하여 $d(a,b)=(a-b)^2$으로 정의하면 d는 거리함수가 아니다. $d(0,2)=2^2=4$, $d(0,1)=1$, $d(1,2)=1$로부터 성질 (iv)가 성립하지 않음을 확인할 수 있다.

(**나**) 세 양수가 주어졌을 때 평면에서 이 수들을 세 변의 길이로 갖는 삼각형이 존재하기 위한 필요충분조건은 가장 큰 수가 나머지 두 수의 합보다 작다는 것이다. 이 사실을 바탕으로 등비수열을 이루는 세 양수 a, ar, ar^2이 삼각형의 세 변의 길이가 되기 위한 조건을 살펴보자. 우선 $r \ge 1$인 경우 ar^2이 가장 큰 수이므로 $1+r>r^2$이다. 이를 풀면 $1 \le r < \varphi$이 된다. 여기서 φ는 황금비라 불리며 $\varphi^2-\varphi-1=0$을 만족하는 양의 실수이다. 한편 $0<r<1$인 경우는 a가 가장 큰 수이므로 $r+r^2>1$이고, 이를 풀면 $\varphi-1<r<1$을 얻는다. 따라서 a, ar, ar^2이 삼각형의 세 변의 길이가 되기 위한 필요충분조건은 $\varphi-1<r<\varphi$ 임을 알 수 있다.

[문제 2-1] <10점> 임의의 두 실수 a, b에 대하여

$$d(a,b)=\frac{(a-b)^2}{1+|a-b|}$$

와 같이 정의된 d가 실수 집합 위의 거리함수인지 여부를 제시문 (가)에 근거하여 논하라.

[문제 2-2] <20점> 집합 X 위의 거리함수 d가 주어져 있다. X의 임의의 두 원소 P, Q에 대하여 f를

$$f(\mathrm{P},\mathrm{Q})=\frac{\sqrt{d(\mathrm{P},\mathrm{Q})}}{1+\sqrt{d(\mathrm{P},\mathrm{Q})}}$$

와 같이 정의하면 f는 X 위의 거리함수임을 보여라.

[문제 2-3] <20점> 두 양수 a, b의 산술평균($A=\frac{a+b}{2}$), 기하평균($G=\sqrt{ab}$), 조화평균($H=\frac{2ab}{a+b}$)이 삼각형의 세 변의 길이가 될 필요충분조건은

$$\boxed{\alpha_1+\beta_1\varphi+\gamma_1\sqrt{1+2\varphi} \;<\; \frac{b}{a} \;<\; \alpha_2+\beta_2\varphi+\gamma_2\sqrt{1+2\varphi}}$$

이다. 유리수 α_1, α_2, β_1, β_2, γ_1, γ_2의 곱을 구하라.