2015학년도 모의논술 의학계열 예시문제

[문제1]

〈50점〉 다음 제시문을 읽고 물음에 답하라.

(가) 주어진 수열 a_n, $n=0,1,2,\cdots$을 계수로 가지는 무한 급수 $A(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots$ 를 수열 $\{a_n\}$의 **생성함수**라고 한다. 수열 $1,-1,0,0,0,0,\cdots$의 생성함수는 $1-1x+0x^2+0x^3+\cdots=1-x$이며 수열 $1,1,1,1,1,1,\cdots$의 생성함수는 $1+1x+1x^2+1x^3+\cdots=1+x+x^2+x^3+\cdots$이다. $B(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\cdots$ 가 수열 $\{b_n\}$의 생성함수이고 두 생성함수의 합을 $A(x)+B(x):=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2+(a_3+b_3)x^3+\cdots$ 로 정의하면 $A(x)+B(x)$ 는 수열 $\{a_n+b_n\}$의 생성함수가 됨을 알 수 있다. 두 생성함수 $A(x)$와 $B(x)$의 곱을 다음과 같이 정의하는 것은 매우 자연스럽다:

$$A(x)B(x)$$
$$=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2+(a_0b_3+a_1b_2+a_2b_1+a_3b_0)x^3+\cdots$$

이제 $A(x)B(x)$ 는 수열 $\{a_n\}$과 수열 $\{b_n\}$에 의해서 만들어지는 새로운 수열 $\{c_n\}$, $c_n=\sum_{i=0}^{n}a_ib_{n-i}$, 의 생성함수임을 알 수 있다.

$(1-x)(1+x+x^2+x^3+\cdots)=1+(1-1)x+(1-1)x^2+(1-1)x^3+\cdots=1$ 이므로 $1+x+x^2+x^3+\cdots=\dfrac{1}{1-x}$라고 표현할 수 있다.

(나) 수열 a_n, $n=0,1,2,\cdots$ 은 초깃값 a_0과 함수 f_n, $n\ge 1$, 들에 의해 정해지는 점화식 $a_n=f_n(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})$, $n\ge 1$, 이 주어지면 유일한 방법으로 결정된다. 예를 들어 $d_0=d_1=1$, $d_n=d_{n-1}+d_{n-2}$, $n\ge 2$ 에 의하여 수열 $\{d_n\}$ 은 완벽히 결정 된다: $d_0=d_1=1$, $d_2=d_1+d_0=2$, $d_3=d_2+d_1=2+1=3,\ldots$

따라서 초깃값과 점화식이 같은 두 수열은 같은 수열이며 같은 생성함수를 가지게 됨을 알 수 있다.

예제 1. 자연수 n을 1과 2의 합으로 나타내는 방법의 수를 d_n이라고 하자. 이 때 더하는 순서가 다르면 다른 방법으로 생각한다. 예를 들어 $n=4$ 이면 다음 다섯 가지 서로 다른 방법이 존재 한다: $1+1+1+1$, $1+1+2$, $1+2+1$, $2+1+1$, $2+2$. 따라서 $d_4=5$ 이다. 수열 $\{d_n\}$의 점화식을 구해보자. n을 1과 2의 합으로 나타내는 방법은 그 첫 번째 수가 1인 경우와 2인 경우로 나누어 생각해볼 수 있으며 첫 수

가 1이면 나머지 수들은 그 합이 $n-1$ 그리고 첫 수가 2이면 나머지 수들은 그 합이 $n-2$ 가 되어야 함을 알 수 있다. 따라서 $d_n = d_{n-1} + d_{n-2}\,, n \geq 3,$이 성립하며 편의상 $d_0 = 1$ 이라 약속하면 $d_2 = d_1 + d_0$ 도 성립한다.

(1) 이제 수열 $\{d_n\}$의 생성함수를 $D(x)$라고 하면 $\{d_n\}$이 만족하는 점화식을 적절히 사용하여 다음과 같은 계산을 할 수 있다.

$$\begin{aligned} D(x) &= d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + d_3 x^3 + \cdots \\ &= 1 + x + (d_1 + d_0)x^2 + (d_2 + d_1)x^3 + \cdots \\ &= 1 + x + (d_1 x^2 + d_2 x^3 + d_3 x^4 + \cdots) + (d_0 x^2 + d_1 x^3 + d_2 x^4 + \cdots) \\ &= 1 + x + (x\,D(x) - d_0 x) + x^2 D(x) \end{aligned}$$

따라서 $D(x)(1-x-x^2) = 1$ 이며, $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ 일 때,

$$\begin{aligned} D(x) &= \frac{1}{(1-x-x^2)} = \frac{1}{(1-\alpha x)(1-\beta x)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}\,x}\left(\frac{1}{(1-\alpha x)} - \frac{1}{(1-\beta x)}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}\,x}\left((1 + \alpha x + \alpha^2 x^2 + \cdots) - (1 + \beta x + \beta^2 x^2 + \cdots)\right) \end{aligned}$$

이 된다. 그리고 $D(x)$에서 x^n의 계수를 읽으면 $d_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}\right)$ 이 된다.

(2) 점화식 $d_n = d_{n-1} + d_{n-2}\,, n \geq 2,$ 을 다른 방법으로 생각해보자.

$d_n = d_{n-1} + d_{n-2} \; = 0\,d_n + 1 d_{n-1} + 1 d_{n-2} + 0 d_{n-3} + \cdots + 0 d_0$ 이므로

$a_0 = 0,\ a_1 = 1, a_2 = 1,\ a_3 = a_4 = a_5 = \cdots = 0$ 이라하면 $d_n = \sum_{i=0}^{n} a_i d_{n-i}\,, n \geq 2,$ 가 만족된다. 따라서 수열 $\{a_n\}$의 생성함수는 $A(x) = x + x^2$ 이며 생성함수의 곱의 규칙에 의하여

$$\begin{aligned} D(x) &= d_0 + d_1 x + (a_0 d_2 + a_1 d_1 + a_2 d_0)x^2 + (a_0 d_3 + a_1 d_2 + a_2 d_1 + a_3 d_0)x^3 + \cdots \\ &= d_0 + d_1 x - (a_0 d_0) - (a_0 d_1 + a_1 d_0)x \\ &\quad + (a_0 d_0) + (a_0 d_1 + a_1 d_0)x + (a_0 d_2 + a_1 d_1 + a_2 d_0)x^2 + (a_0 d_3 + a_1 d_2 + a_2 d_1 + a_3 d_0)x^3 + \cdots \\ &= 1 + x - x + A(x)D(x) = 1 + (x + x^2)D(x) \end{aligned}$$

이며 (1)에서와 같이 $D(x) = \dfrac{1}{1-x-x^2}$ 이 된다.

예제 2. 다섯 개의 수 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5를 더하는 순서를 정하는 방법의 수를 구해보자. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$를 계산하는 순서는 괄호를 이용하면 자연스럽게 정해진다. 예를 들어 $(x_1 + x_2) + (x_3 + (x_4 + x_5))$는 $(x_1 + x_2)$ 와 $(x_3 + (x_4 + x_5))$를 더하는 일을 마지막에 해야 함을 뜻한다. 덧셈기호 양쪽의 값을 계산하는 순서는 덧셈기호의 왼쪽을 먼저 계산하는 것으로 정하면 $(x_1 + x_2)$ 을 먼저 계산하고 $(x_3 + (x_4 + x_5))$를

계산한 후에 두수의 합을 계산하면 된다.
n개의 수 $x_1, x_2, \cdots, x_n$를 더하는 순서를 정하는 방법의 수를 e_n이라고 한다면 우리가 구하고자 하는 수 는 e_5이며, $e_1 = 1$로 약속하면 마지막으로 실행하는 덧셈의 위치에 따라 $e_5 = e_1e_4 + e_2e_3 + e_3e_2 + e_4e_1$ 로 쓸 수 있음을 알 수 있다. 이때 $e_0 = 0$ 이라 하면 $\underline{n \geq 2\text{일 때}}$ $e_n = \sum_{i=0}^{n} e_i e_{n-i}$ 이 성립한다. 따라서 $E(x)$을 수열 $\{e_n\}$의 생성함수라 하면 $E(x)$가 만족하는 식을 얻을 수 있다.

[문제 1-1]

〈20점〉 자연수 n에 대하여, 길이가 n인 0과 1의 나열방법의 수를 a_n이라 하자. 그리고 a_n개의 가능한 나열 중에서 1이 연달아서 나타나지 않는 방법의 수를 b_n이라 하자.

〈5점〉 $n \geq 1$ 일 때 a_n을 계산하라.

〈15점〉 편의상 $b_0 = 1$ 이라 하였을 때, 수열 $\{b_n\}$이 만족하는 점화식과 생성함수를 찾으라.

[문제 1-2]

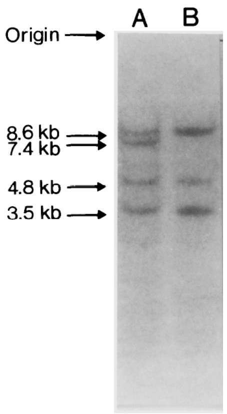
〈15점〉 $X(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ 를 수열 $1, 1, 1, 1, 1, \cdots$ 의 생성함수라 하자. $\{d_n\}$은 예제 1에서 소개한 수열이며 수열 $\{w_n\}$은 $w_n = d_0 + d_1 + \cdots + d_n$ 을 만족한다고 할 때, $\{w_n\}$의 생성함수를 $\{d_n\}$ 의 생성함수 $D(x)$와 $X(x)$를 이용하여 나타내라.

[문제 1-3]

〈15점〉 예제 1의 (2)번 방법을 참조하여 예제 2의 수열 $\{e_n\}$의 생성함수 $E(x) = e_0 + e_1x + e_2x^2 + e_3x^3 + \cdots$ 가 만족하는 식을 찾으라.

[문제2]
〈50점〉 다음 제시문을 읽고 물음에 답하라.

5 만개이하의 유전자를 가지고 있음에도 불구하고 인간의 면역계는 10^{12} 개 이상의 다른 항체를 만들 수 있다. 다음은 한정된 유전자로 다양한 항체를 만들 수 있는 기전의 일부를 밝힌 도네가와 연구팀의 연구 결과 중 일부이다 (Cell, 15 권, 1-14, 1978)



생쥐의 배아로부터 추출한 게놈 DNA (B)와 항체의 짧은 사슬을 생산하는 형질세포에서 유래한 암세포의 게놈 DNA (A)를 제한효소 EcoRI 으로 자른 후, 전기영동하였다. 여기에 동위원소로 표지 시킨 항체의 짧은 사슬의 cDNA 를 접합한 다음 자기방사법으로 방사능을 현상하였다.

[문제 2-1]
〈12.5점〉 실험결과를 설명하고 실험자가 증명하고자 하는 항체 다양성의 기전을 설명하시오.

[문제 2-2]
〈12.5점〉 인간과 쥐는 동일한 기능을 하는 염색체를 이배체(2n)로 가지고 있다. 이를 바탕으로 그림의 A 레인 결과가 보여주는 항체 유전자 발현 특징을 설명하시오.

[문제 2-3]
〈12.5점〉 후천성 면역반응의 특징을 설명하시오.

[문제 2-4]
〈12.5점〉 단일클론항체의 정의와 제조법을 설명하시오.