2015학년도 모의논술 자연계열(의학과제외) 모범답안

[문제 1-1]

〈20점〉 자연수 n에 대하여, 길이가 n인 0과 1의 나열방법의 수를 a_n이라 하자. 그리고 a_n 개의 가능한 나열 중에서 1이 연달아서 나타나지 않는 방법의 수를 b_n이라 하자.

1) 〈5점〉 $n \geq 1$ 일 때 a_n을 계산하라.

풀이 n개의 자리에 0 또는 1이 들어갈 수 있으므로 $a_n = 2^n$이다.

2) 〈15점〉 편의상 $b_0 = 1$ 이라 하였을 때, 수열 $\{b_n\}$이 만족하는 점화식과 생성함수를 찾으라.

풀이 $b_1 = 2$ 이다. $n \geq 2$일 때 b_n을 다음 두 가지 경우로 나누어 계산해 보자:

– 첫 자리에 1이 오는 경우: 1이 연달아서 나타날 수 없으므로 두 번째 자리에는 반드시 0이 와야 한다. 세 번째부터는 1이 연달아 나타나지 않는 길이 $n-2$인 0과 1의 나열이면 되므로 이 경우 가능한 개수는 b_{n-2}이다.

– 첫 자리에 0이 오는 경우: 두 번째 자리부터의 나열이 1이 연달아 나타나지 않는 길이 $n-1$ 인 0과 1의 나열이면 되므로 b_{n-1}개의 나열이 가능하다.

따라서 $b_n = b_{n-1} + b_{n-2}$ 이다. 이는 예제 1의 수열 $\{d_n\}$의 점화식과 동일하며

$b_0 = d_1 \quad b_1 = d_2$ 이므로 $\{b_n\}$의 생성함수

$B(x) = d_1 + d_2 x + d_3 x^2 + \cdots = \frac{1}{x}\left(d_1 x + d_2 x^2 + d_3 x^3 + \cdots\right)$이다.

즉 $B(x) = \frac{1}{x}(D(x) - 1)$. 이를 정리하면 $B(x) = \frac{1+x}{1-x-x^2}$ 이다.

[문제 1-2]

〈15점〉 $X(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ 를 수열 $1, 1, 1, 1, 1, \cdots$ 의 생성함수라 하자.
$\{d_n\}$은 **예제** 1에서 소개한 수열이며 수열 $\{w_n\}$은 $w_n = d_0 + d_1 + \cdots + d_n$ 을 만족한다고 할 때, $\{w_n\}$의 생성함수를 $\{d_n\}$ 의 생성함수 $D(x)$와 $X(x)$를 이용하여 나타내라.

풀이 $x_0 = x_1 = x_2 = \cdots = 1$ 이라 하면 $w_n = d_0 + d_1 + \cdots + d_n = d_0 x_n + d_1 x_{n-1} + \cdots + d_n x_0$ 이므로 $\{w_n\}$의 생성함수는 $D(x)X(x) = \frac{1}{(1-x-x^2)(1-x)}$ 이다.

[문제 1-3]

〈15점〉 **예제** 1의 (2)번 방법을 참조하여 **예제** 2의 수열 $\{e_n\}$의 생성함수 $E(x)=e_0+e_1x+e_2x^2+e_3x^3+\cdots$ 가 만족하는 식을 찾으라.

풀이

$$\begin{aligned} E(x) &= e_0+e_1x+e_2x^2+e_3x^3+\cdots \\ &= 0+x+(e_0e_0)+(e_0e_1+e_1e_0)x+(e_0e_2+e_1e_1+e_2e_0)x^2+(e_0e_3+e_1e_2+e_2e_1+e_3e_0)x^3+\cdots \\ &= x+E(x)E(x) \end{aligned}$$

이므로 $E(x)$는 $E(x)E(x)-E(x)+x=0$ 를 만족한다.

(따라서 $E(x)=\dfrac{1\pm\sqrt{1-4x}}{2}$가 되며 이 중 $x=0$일 때 0이 되는 함수는 .

$\dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2}$이므로 $E(x)=\dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2}$ 이다.)

[문제 2-1] 〈15점〉

풀이 $\displaystyle\int_0^{\pi}\sin x\,dx = 2,$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi}F(x)\,G(x)\,dx &= \int_0^{\pi}\cos(\cos\ x)\ \sin\ x\ dx \\ &= \int_0^{\pi/2}\cos(\cos\ x)\ \sin\ x\ dx+\int_{\pi/2}^{\pi}\cos(\cos\ x)\ \sin\ x\ dx \\ &= \int_0^{1}\cos\ t\ dt\ +\ \int_{-1}^{0}\cos\ t\ dt\ =\ 2\int_0^{1}\cos\ t\ dt\ =\ 2\ \sin\ 1 \end{aligned}$$

문제에서 주어진 조건에 따라 $\cos\ (\cos\ c)\ =\ \sin\ 1$이다. 이제 $t=\cos\ c$ $(-1\le t\le 1)$라 하면 $\cos\ t\ =\ \sin\ 1\ =\ \cos\ (\pi/2-1)$ 을 만족하는 t의 값은 $\pi/2-1$ 또는 $1-\pi/2$임을 알 수 있다.

[문제 2-2] 〈20점〉

풀이 1) $p(x)=(x-a)(x-b)$라 하면 $p(a)=p(b)=0,\ -p'(a)=p'(b)=b-a,$ $p''(x)=2$가 성립한다. 부분적분 공식을 두 번 이용하면

$$\begin{aligned} 2\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^b f(x)p''(x)\,dx = [f(x)p'(x)]_a^b-\int_a^b f'(x)p'(x)\,dx \\ &= f(b)p'(b)-f(a)p'(a)-\int_a^b f'(x)p'(x)\,dx \\ &= [f(a)+f(b)](b-a)-[f'(x)p(x)]_a^b+\int_a^b f''(x)p(x)\,dx \\ &= [f(a)+f(b)](b-a)-f'(b)p(b)+f'(a)p(a)+\int_a^b f''(x)p(x)\,dx \\ &= [f(a)+f(b)](b-a)+\int_a^b f''(x)p(x)\,dx \end{aligned}$$

따라서 $\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] + \frac{1}{2}\int_a^b f''(x)p(x)\,dx$ 이다.

2) 제시문 (가)의 정리 1에 의하여 적당한 c가 열린구간 (a,b)에 존재하여

$\int_a^b f''(x)p(x)\,dx = f''(c)\int_a^b p(x)\,dx = -f''(c)\frac{(b-a)^3}{6}$을 만족한다. 이로부터

정리 2가 성립함을 알 수 있다.

[문제 2-3] 〈15점〉

풀이

정확도가 0 이상이기 위해서는 $\frac{n}{n+1}+(1-t)+\frac{n}{n+1}=2$, 즉 $t=\frac{n-1}{n+1}$이다.

정확도가 1 이상이기 위해서는 $\frac{n}{n+1}(-\alpha)+\frac{n}{n+1}\beta=0$ 이어야 하므로 $\alpha=\beta$ 이다.

정확도가 2 이상이기 위해서는 $2\frac{n}{n+1}\alpha^2=2/3$ 즉 $\alpha^2=\beta^2=\frac{n+1}{3n}$. 즉,

$\alpha_n=\beta_n=\sqrt{\frac{n+1}{3n}}$, $t_n=\frac{n-1}{n+1}$이다. 이렇게 선택하면 기함수의 성질에 인하여 정확도는 3 이상이 된다. 주어진 수치적 구적법이 x^4에 대해서는 정확할 수 없으므로 $r_n=3$이다. 따라서 $\lim_{n\to\infty}\alpha_n\beta_n t_n r_n = 1$ 이다.