

2015학년도 논술 고사

자연계열(의학과) 모범답안



성 명	
전 형	
수험번호	



2015학년도 자연계열 논술고사 자연계열(오전)

모범답안 (의학과)

[문제 1-1] <15점> 두 격자점 $(6,5)$ 와 $(7,a)$ 가 좋은 짝공이라고 하자. $(6,5)$ 를 m 번, $(7,a)$ 를 n 번 더해 $(2015,b)$ 가 될 때, 가능한 $a+b$ 의 값 중 가장 큰 값을 구하라. (단, m, n 은 0 이상의 정수)

[풀이] 두 격자점 $(6,5)$ 과 $(7,a)$ 는 좋은 짝공이므로 $6a-35=\pm 1$ 이 된다. a 는 정수이므로 $a=6$ 이다. $m(6,5)+n(7,6)=(2015,b)$ 이므로, $6m+7n=2015$, $5m+6n=b$ 이다. 따라서 $n=\frac{2015-6m}{7}$ 이 되고, $b=5m+6n=5m+6\left(\frac{2015-6m}{7}\right)=\frac{12090}{7}-\frac{m}{7}$ 이다. 따라서 m 이 작을수록 b 값이 증가하고, b 는 정수이므로 $m=1$ 일 때 b 의 최댓값은 1727이다. 따라서 $a+b=6+1727=1733$.

[문제 1-2] <15점> 황금 삼각형이란 이등변삼각형 중 밑변과 밑변이 아닌 변사이의 길이의 비가 $1:\varphi$ 인 것을 의미한다. 여기서 φ 는 $x^2-x-1=0$ 의 양의 실수해로서 황금비로 불린다. 황금 삼각형이 격자다각형이 될 수 있는지 여부에 대하여 논하라.

[풀이] $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 이다. 황금 삼각형의 밑변의 길이를 a , 밑변이 아닌 변의 길이를 b 라 하면, $b=\varphi a$ 가 성립하고, 이 삼각형의 높이는 $\sqrt{(\varphi a)^2-(a/2)^2}$ 이다. 따라서 이 도형의 넓이는

$$\frac{a^2}{2} \sqrt{\varphi^2 - \frac{1}{4}} = \frac{a^2}{2} \sqrt{\varphi + \frac{3}{4}} = \frac{a^2}{4} \sqrt{5+2\sqrt{5}}.$$

이다. 만일 황금 삼각형이 격자다각형이라면 a^2 은 정수이다. 한편, $q=\sqrt{5+2\sqrt{5}}$ 가 유리수라면 $\sqrt{5}=\frac{q^2-5}{2}$ 도 유리수이므로 모순이다. 따라서 q 는 무리수이고, 이 도형의 넓이 또한 무리수이다. 한편 픽의 정리에 따르면 모든 격자 다각형의 넓이는 유리수이므로 모순이다. 따라서 격자다각형인 황금 삼각형은 존재하지 않는다.

[문제 1-3] <20점> 원점 O 를 내부에 포함하고 넓이가 2인 격자 사각형 $ABCD$ 가 있다. 이때, 사각형 $ABCD$ 의 대각선 중 하나는 O 를 지남을 보여라.

[풀이] 픽의 정리에 의하면 이 도형은 꼭짓점 A, B, C, D 와 O 를 제외하고는 어떤 격자점도 도형의 내부나 모서리에 포함하지 않는다. 따라서 A 와 B, B 와 C, C 와 D, D 와 A 는 모두 좋은 짝공이다. A, B, C, D 의 네 점을 차례대로 $(x_1, y_1), \dots, (x_4, y_4)$ 라 두자. 한편 원점 O 를 내부에 포함하므로 $x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i$ 의 값이 i 와 상관없이 1 또는 -1 로 항상 일정함을 알 수 있다.

일반성을 잃지 않고 이 값을 1이라 하자. 행렬 $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$ 의 역행렬은

$$\frac{1}{x_1 y_2 - y_1 x_2} \begin{pmatrix} y_2 & -x_2 \\ -y_1 & x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 & -x_2 \\ -y_1 & x_1 \end{pmatrix}$$

이고 이 행렬 역시 좋은 짝공과 연관된 행렬이다. 이

행렬로 나타나는 일차변환 F 로 네 꼭짓점 A, B, C, D 를 보내자. 이때 네 점의 좌표는 각각 $(1,0), (0,1), (p,q), (r,s)$ 라 할 수 있고, 여전히 인접한 두 점의 계산 값이 1이므로



2015학년도 자연계열 논술고사

자연계열(오전)

모범답안

[의학과]

$p = -1, s = -1$ 이고, $ps - qr = 1$ 임을 알 수 있다. 따라서 $qr = 0$, 즉, q 와 r 중의 하나는 0이 되어야 한다. 이는 $F(A), O, F(C)$, 혹은 $F(B), O, F(D)$ 이 직선상에 있음을 의미한다. 일차변환 F 에 의해 직선으로 변환되는 도형은 직선이므로 사각형 ABCD의 대각선 중 하나는 O를 지난다.