2015학년도 논술 고사

자연계열(오후)
채점기준

성　　명	
전　　형	
수험번호	

표지를 제외한 페이지 수 : 8

2015학년도 논술 고사 채점기준

자연계열 (오후)

[문제 1-1] <15점> $z^6 = 8i$의 해 중 실수부와 허수부가 모두 음수인 해들의 합을 구하라. (단, $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$)

- <u>풀이</u>

$|z|^6 = |z^6| = |8i| = 2^3$이고 $|z| \geq 0$이므로 $|z| = \sqrt{2}$이다. 또한 $\arg(8i) = \frac{\pi}{2} + 2n\pi = \arg(z^6) = 6\arg(z)$이므로 $\arg(z) = \frac{\pi}{3}n + \frac{\pi}{12}$가 성립한다. 따라서 위 식의 해인 6개의 편각은 $\frac{\pi}{12}$, $\frac{5\pi}{12}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{13\pi}{12}$, $\frac{17\pi}{12}$, $\frac{7\pi}{4}$이다. 이 중 실수부와 허수부가 모두 음수인 것에 해당하는 각은 제3사분면에 해당하는 각인 $\frac{13\pi}{12}$, $\frac{17\pi}{12}$이다. 문제의 조건을 만족하는 해들은 $z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)\right)$, $z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right)$이다. 한편 $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$이므로 삼각함수의 제곱공식으로부터 $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$이다. 이를 이용하여 $\frac{13\pi}{12} = \pi + \frac{\pi}{12}$, $\frac{17\pi}{12} = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{12}$의 삼각함수 값을 계산하면 $\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ 이다. 따라서 문제의 조건을 만족하는 해들의 합은 $-\sqrt{3} - \sqrt{3}i$이다.

- <u>채점 기준</u>

  - $|z| = \sqrt{2}$ 구하기 **+4점**
  - $\arg(z) = \frac{\pi}{3}n + \frac{\pi}{12}$ 또는 $\frac{\pi}{12}$, $\frac{5\pi}{12}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{13\pi}{12}$, $\frac{17\pi}{12}$, $\frac{7\pi}{4}$ 얻기 **+6점(개당 1점)**
  - $z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)\right)$, $z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right)$ 구하기 **+2점**
  - 필요한 삼각함수 값들을 구하여 답 구하기 **+3점**

[문제 1-2] <15점> 제시문 (**나**)에서 좌표평면 위의 점 $(1,0)$을 버튼A만 2015번 눌러 이동시킨 뒤, 이어서 버튼B만 2016번, 이어서 버튼C만 2017번, 또 이어서 버튼D만 2018번 눌러 이동시켰을 때 마지막 점의 위치가 (x,y)라고 하자. $|x-y|$는 몇 자리수인지 답하라. (단, $\log_{10}2=0.3010$)

● **풀이**

버튼 A, B, C, D를 누르는 것은 각각 $a+bi$에 $\frac{1}{2}$, $1+i$, $2+i$, $3+i$를 곱하는 것과 같다. 복소수의 곱은 순서에 무관하므로 문제에서의 시행은 버튼A, 버튼B, 버튼C, 버튼D를 차례대로 누르는 시행을 2015번 반복한 후 버튼B를 한번, 버튼C를 두 번, 버튼D를 세 번 누르는 것과 같다.

한편, $\frac{1}{2}(1+i)(2+i)(3+i)=5i$이므로 이를 2015번 반복하면 $(5i)^{2015}=5^{2015}i^3=-5^{2015}i$가된다. $(1+i)(2+i)^2(3+i)^3=-200+100i$이므로, 점$(1,0)$에 해당하는 복소수 1에 앞에서 계산하여 얻어진 수들을 곱하면 $4\times5^{2017}+8\times5^{2017}i$가 된다. 따라서 마지막 점의 위치는 $(4\times5^{2017},8\times5^{2017})$이므로, $|x-y|=4\times5^{2017}$이다. 또한

$\log_{10}(4\times5^{2017})=2017-2015\times\log_{10}2=1410.485$ 이므로 $|x-y|$는 1411자리수이다.

● **채점 기준**

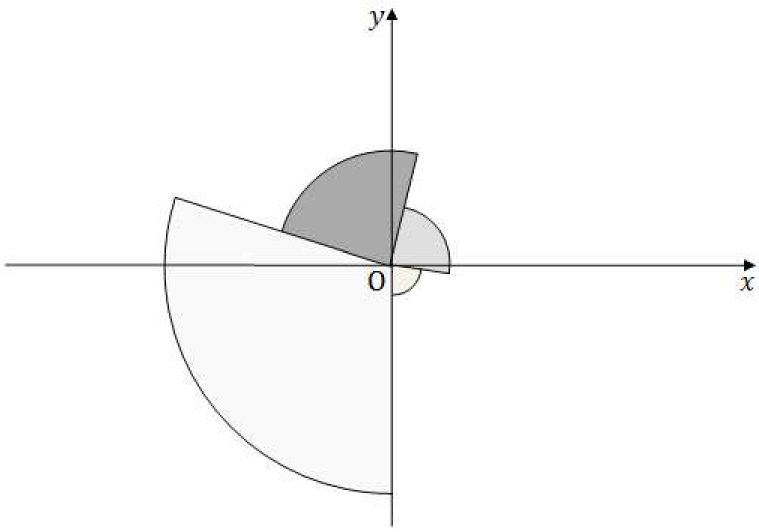
- 버튼을 복소수의 곱, 회전변환 관련 행렬 등의 수학적 대상으로 수식화 함 ($1+i$와 같이) **3점**
- 복소수(또는 대응하는 행렬)의 곱에 대한 교환법칙 또는 결합법칙을 인지하고 필요한 식을 적음 **+5점**
- 계산하여 좌표 구하기 **+5점**
- 자릿수 구하기 **+2점**

[문제 1-3] <20점> 복소수들의 집합 $A=\left\{z \;\middle|\; |z|\le 2,\ \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2015}\le \arg(z)\le \frac{\pi}{2}\right\}$를 생각하자. 자연수 k에 대하여 A_k를 $A_1=A$, $A_2=\{z^2 \mid z\in A\}$, $A_3=\{z^3 \mid z\in A\}$,... 와 같이 정의하고, $T_k=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k$라 하며, 좌표명면에서 T_k에 대응하는 영역의 넓이를 t_k라 하자. 다음 성질을 만족하는 최소의 자연수 n에 대하여 $\frac{t_n}{2^{2015}\pi}$의 정수부분을 구하라.

> T_n은 크기 2 이하인 복소수들을 모두 포함한다, 즉 $\{z \mid |z|\le 2\}\subset T_n$.

- **풀이**

$1\le k\le 4030$인 k에 대하여 A_k에 대응하는 영역은 반지름이 2^k이고 중심각이 $\frac{k\pi}{2015}$인 부채꼴 모양이다. 특히, $k=4m+\ell$ $(\ell=0,1,2,3)$ 꼴이라면 A_k는 제ℓ사분면에서 축으로부터 시계방향으로 $\frac{k\pi}{2015}$만큼 벌어진 모양이다. 반지름이 2인 원을 완전히 덮기 위해서는 각 사분면에 포함된 사분원을 덮어야 하므로 $\frac{k\pi}{2015}\ge\frac{\pi}{2}$가 성립해야 한다. 따라서 $k=1008$일 때, 처음으로 하나의 사분원을 덮게 되고, 네 개의 사분원을 모두 덮기 위한 최소의 n은 $1008+3=1011$이다. 이때 도형의 모양은 아래 그림과 같다.



반지름이 R이고 중심각이 θ인 부채꼴의 넓이는 $\dfrac{R^2\theta}{2}$ 이므로,

$$t_{1011}=\frac{(2^{1008})^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{4030}\right)+\frac{(2^{1009})^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{4030}\right)+\frac{(2^{1010})^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{4030}\right)+\frac{(2^{1011})^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{7\pi}{4030}\right)$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned}\frac{t_{1011}}{2^{2015}\pi}&=\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4030}\right)+2^2\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{4030}\right)+2^4\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{4030}\right)+2^6\left(\frac{1}{2}+\frac{7}{4030}\right)\\&=(2+8+32)+\frac{2015-3-8-32+64\times7}{4030}\end{aligned}$$

이므로 이 수의 정수부분은 42이다.

- <u>채점 기준</u>
  - 영역 A_k의 모양 또는 규칙(부채꼴이 부채꼴로 변환됨)의 서술 **5점**
  - 조건을 충족하는 최소의 n 구하기 **+8점**
  - t_{1011} 구하기 **+4점**
  - 답 구하기 **+3점**

[문제 2-1] <10점> 제시문 (나)의 밑줄 친 문제에서 사각형 ABCD가 원에 내접하는 조건을 추가하는 경우 넓이의 최댓값은 얼마인가?

- 풀이

사각형이 원에 내접하기 위해서는 대내각의 합이 π이어야 한다. 따라서 $\theta = \frac{\pi}{2}$이며, 제시문 (나)의 결과에 이를 대입하면 넓이의 최댓값은 $\frac{1}{4}(a^2 + b^2) + \frac{1}{2}ab$이다.

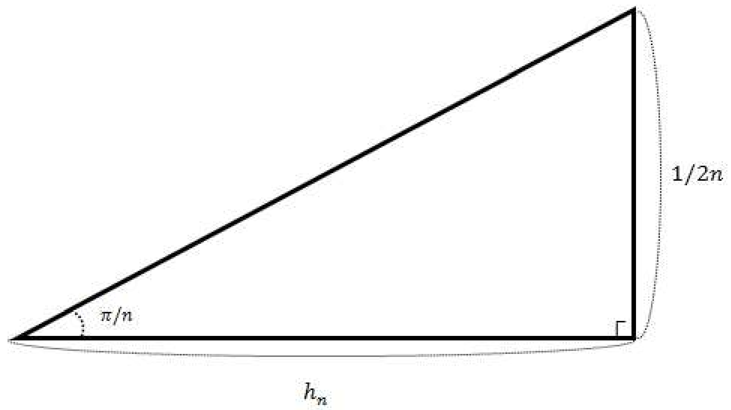
- 채점 기준

  - $\theta = \frac{\pi}{2}$ 얻기 **5점**
  - 넓이 구하기 **+5점**

[문제 2-2] <20점> 둘레의 길이가 1인 정n각형의 넓이 S_n을 n을 이용하여 표현하고, 정n각형에 대하여 등주부등식이 성립함을 보여라.

- **풀이**

아래 그림에서 $h_n = \frac{1}{2n\tan(\pi/n)}$이다. 따라서 $S_n = n \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2n} h_n = \frac{1}{4n\tan(\pi/n)}$이다. $g(x) = \tan x - x$라 하면 $g'(x) = \sec^2 x - 1 \geq 0$, 즉 $g(x)$는 증가함수이고, $g(0) = 0$이므로 $x \geq 0$에서 $g(x) \geq 0$ 이다. 따라서 $\tan\left(\frac{\pi}{n}\right) \geq \frac{\pi}{n}$, $4\pi S_n = \frac{\pi}{n\tan(\pi/n)} \leq 1 = 1^2$, 즉 등주부등식을 얻게 된다.



- **채점 기준**
  - 정n각형을 삼각형으로 분할한 후 (h_n과 같은) 필요한 요소를 정확히 계산하고 삼각형의 넓이 공식을 적절히 활용하여 S_n을 구함 **+10점**
  - 등주부등식의 식별하고 $\tan\left(\frac{\pi}{n}\right) \geq \frac{\pi}{n}$임을 이용하여 부등식을 보임 **+7점**
  - $\tan\left(\frac{\pi}{n}\right) \geq \frac{\pi}{n}$의 증명 **+3점**

- **비고**
  - S_n의 다른 표현
    - $S_n = \frac{n}{2}\left(\frac{1}{2n\sin(\pi/n)}\right)^2 \sin(2\pi/n)$
    - $S_n = \frac{\sin(2\pi/n)}{8n\sin^2(\pi/n)}$
  - 넓이 S_n은 헤론의 공식으로도 유도 가능함

[문제 2-3] <20점> 그림 4에서와 같이 사잇각 ϕ로 만나는 두 반직선 위에 하나씩 끝점을 가지는 두 선분으로 만들어지는 사각형의 넓이를 최대화시키는 문제를 생각해 보자. 각 ϕ의 크기는 그림 5에 나타난 바와 같다. 두 선분의 길이를 a, b라 하고 제시문 (나)에서와 같이 변수 x, y를 도입하자. 사각형의 넓이를 x, y, a, b, θ를 이용하여 나타내고, 그 넓이의 최댓값을 구하라.

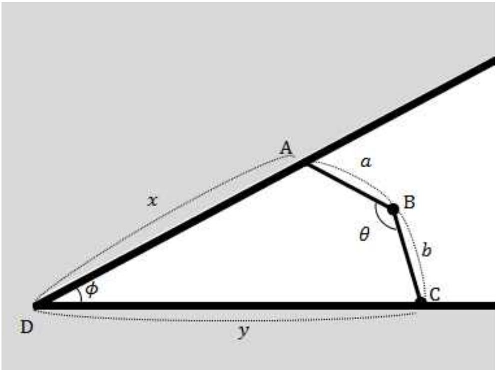


그림 4

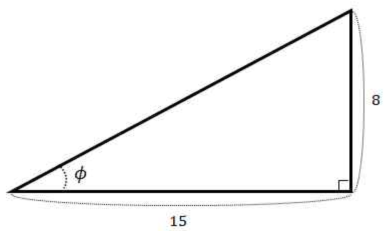


그림 5

● **풀이**

사각형 ABCD의 넓이는 $S=\frac{1}{2}xy\sin\phi+\frac{1}{2}ab\sin\theta=\frac{4}{17}xy+\frac{1}{2}ab\sin\theta$이다.

한편 $a^2+b^2-2ab\cos\theta=x^2+y^2-2xy\cos\phi=x^2+y^2-\frac{30}{17}xy$ 이므로

$$\begin{aligned} S&=\frac{4}{17}xy+\frac{1}{2}ab\sin\theta \\ &=2xy-\frac{30}{17}xy+\frac{1}{2}ab\sin\theta \\ &\le x^2+y^2-\frac{30}{17}xy+\frac{1}{2}ab\sin\theta \\ &=a^2+b^2-2ab\cos\theta+\frac{1}{2}ab\sin\theta \\ &=a^2+b^2+\frac{1}{2}ab(\sin\theta-4\cos\theta) \end{aligned}$$

한편 $\sin\theta-4\cos\theta=\sqrt{17}\sin(\theta-\theta_0)$이다. (단 $\cos\theta_0=\frac{1}{\sqrt{17}}$, $\sin\theta_0=\frac{4}{\sqrt{17}}$)

따라서 $S\le a^2+b^2+\frac{\sqrt{17}}{2}ab$이다. 이 부등식에서 등호는 $x=y$ 일 때 성립하며 마지막 식을 최대화시키는 각 θ에 대하여 적절한 x를 구할 수 있으므로 이 부등식의 등호가 성립한다. 따라서 넓이의 최댓값은 $a^2+b^2+\frac{\sqrt{17}}{2}ab$이다.

- <u>채점 기준</u>
  - $S=\dfrac{4}{17}xy+\dfrac{1}{2}ab\sin\theta$ 구하기 **10점** (넓이 식에 ϕ가 포함된 경우 5**점 감점**)
  - S와 a, b, θ 만으로 이루어진 **부등식**의 유도 **+5점**
  - 삼각함수의 합성을 이용하여 S의 최댓값 후보 구하기 **+3점**
  - 등호가 성립하는 경우를 확인하여 최댓값 확인 **+2점**