2015학년도 모의논술 자연계열(의학과제외) 예시문제

[문제1]

〈50점〉 다음 제시문을 읽고 물음에 답하라.

(가) 주어진 수열 a_n, $n=0,1,2,\cdots$을 계수로 가지는 무한 급수 $A(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots$ 를 수열 $\{a_n\}$의 **생성함수**라고 한다. 수열 $1,-1,0,0,0,0,\cdots$의 생성함수는 $1-1x+0x^2+0x^3+\cdots=1-x$이며 수열 $1,1,1,1,1,1,\cdots$의 생성함수는 $1+1x+1x^2+1x^3+\cdots=1+x+x^2+x^3+\cdots$이다.
$B(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\cdots$ 가 수열 $\{b_n\}$의 생성함수이고 두 생성함수의 합을 $A(x)+B(x):=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2+(a_3+b_3)x^3+\cdots$ 로 정의하면 $A(x)+B(x)$ 는 수열 $\{a_n+b_n\}$의 생성함수가 됨을 알 수 있다. 두 생성함수 $A(x)$와 $B(x)$의 곱을 다음과 같이 정의하는 것은 매우 자연스럽다:

$$A(x)B(x)$$
$$=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2+(a_0b_3+a_1b_2+a_2b_1+a_3b_0)x^3+\cdots$$

이제 $A(x)B(x)$ 는 수열 $\{a_n\}$과 수열 $\{b_n\}$에 의해서 만들어지는 새로운 수열 $\{c_n\}$, $c_n=\sum_{i=0}^{n}a_ib_{n-i}$, 의 생성함수임을 알 수 있다.
$(1-x)(1+x+x^2+x^3+\cdots)=1+(1-1)x+(1-1)x^2+(1-1)x^3+\cdots=1$ 이므로 $1+x+x^2+x^3+\cdots=\dfrac{1}{1-x}$라고 표현할 수 있다.

(나) 수열 a_n, $n=0,1,2,\cdots$ 은 초깃값 a_0과 함수 $f_n, n\ge 1$, 들에 의해 정해지는 점화식 $a_n=f_n(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})$, $n\ge 1$, 이 주어지면 유일한 방법으로 결정된다. 예를 들어 $d_0=d_1=1$, $d_n=d_{n-1}+d_{n-2}$, $n\ge 2$ 에 의하여 수열 $\{d_n\}$ 은 완벽히 결정 된다:
$d_0=d_1=1$, $d_2=d_1+d_0=2$, $d_3=d_2+d_1=2+1=3,\ldots$
따라서 초깃값과 점화식이 같은 두 수열은 같은 수열이며 같은 생성함수를 가지게 됨을 알 수 있다.
예제 1. 자연수 n을 1과 2의 합으로 나타내는 방법의 수를 d_n이라고 하자. 이 때 더하는 순서가 다르면 다른 방법으로 생각한다. 예를 들어 $n=4$ 이면 다음 다섯 가지 서로 다른 방법이 존재 한다: $1+1+1+1$, $1+1+2$, $1+2+1$, $2+1+1$, $2+2$.
따라서 $d_4=5$ 이다. 수열 $\{d_n\}$의 점화식을 구해보자. n을 1과 2의 합으로 나타내는 방법은 그 첫 번째 수가 1인 경우와 2인 경우로 나누어 생각해볼 수 있으며 첫 수가 1이면

나머지 수들은 그 합이 $n-1$ 그리고 첫 수가 2이면 나머지 수들은 그 합이 $n-2$ 가 되어야 함을 알 수 있다. 따라서 $d_n = d_{n-1} + d_{n-2}$, $n \geq 3$,이 성립하며 편의상 $d_0 = 1$ 이라 약속하면 $d_2 = d_1 + d_0$ 도 성립한다.

(1) 이제 수열 $\{d_n\}$의 생성함수를 $D(x)$라고 하면 $\{d_n\}$이 만족하는 점화식을 적절히 사용하여 다음과 같은 계산을 할 수 있다.

$$\begin{aligned}
D(x) &= d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + d_3 x^3 + \cdots \\
&= 1 + x + (d_1 + d_0)x^2 + (d_2 + d_1)x^3 + \cdots \\
&= 1 + x + (d_1 x^2 + d_2 x^3 + d_3 x^4 + \cdots) + (d_0 x^2 + d_1 x^3 + d_2 x^4 + \cdots) \\
&= 1 + x + (x D(x) - d_0 x) + x^2 D(x)
\end{aligned}$$

따라서 $D(x)(1-x-x^2) = 1$ 이며, $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 일 때,

$$\begin{aligned}
D(x) &= \frac{1}{(1-x-x^2)} = \frac{1}{(1-\alpha x)(1-\beta x)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}\,x}\left(\frac{1}{(1-\alpha x)} - \frac{1}{(1-\beta x)}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}\,x}\left((1+\alpha x + \alpha^2 x^2 + \cdots) - (1 + \beta x + \beta^2 x^2 + \cdots)\right)
\end{aligned}$$

이 된다. 그리고 $D(x)$에서 x^n의 계수를 읽으면 $d_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}\right)$ 이 된다.

(2) 점화식 $d_n = d_{n-1} + d_{n-2}$, $n \geq 2$, 을 다른 방법으로 생각해보자.

$d_n = d_{n-1} + d_{n-2} = 0\,d_n + 1 d_{n-1} + 1 d_{n-2} + 0 d_{n-3} + \cdots + 0 d_0$ 이므로

$a_0 = 0,\ a_1 = 1, a_2 = 1,\ a_3 = a_4 = a_5 = \cdots = 0$ 이라하면 $d_n = \sum_{i=0}^{n} a_i d_{n-i}, n \geq 2,$ 가

만족된다. 따라서 수열 $\{a_n\}$의 생성함수는 $A(x) = x + x^2$ 이며 생성함수의 곱의 규칙에 의하여

$$\begin{aligned}
D(x) &= d_0 + d_1 x + (a_0 d_2 + a_1 d_1 + a_2 d_0)x^2 + (a_0 d_3 + a_1 d_2 + a_2 d_1 + a_3 d_0)x^3 + \cdots \\
&= d_0 + d_1 x - (a_0 d_0) - (a_0 d_1 + a_1 d_0)x \\
&\quad + (a_0 d_0) + (a_0 d_1 + a_1 d_0)x + (a_0 d_2 + a_1 d_1 + a_2 d_0)x^2 + (a_0 d_3 + a_1 d_2 + a_2 d_1 + a_3 d_0)x^3 + \cdots \\
&= 1 + x - x + A(x)D(x) = 1 + (x + x^2)D(x)
\end{aligned}$$

이며 (1)에서와 같이 $D(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$ 이 된다.

예제 2. 다섯 개의 수 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5를 더하는 순서를 정하는 방법의 수를 구해보자. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$를 계산하는 순서는 괄호를 이용하면 자연스럽게 정해진다.

예를 들어 $(x_1 + x_2) + (x_3 + (x_4 + x_5))$는 $(x_1 + x_2)$ 와 $(x_3 + (x_4 + x_5))$를 더하는 일을 마지막에 해야 함을 뜻한다. 덧셈기호 양쪽의 값을 계산하는 순서는 덧셈기호의 왼쪽을 먼저 계산하는 것으로 정하면 $(x_1 + x_2)$ 을 먼저 계산하고 $(x_3 + (x_4 + x_5))$를 계산한 후

에 두수의 합을 계산하면 된다.
n개의 수 $x_1, x_2, \cdots, x_n$를 더하는 순서를 정하는 방법의 수를 e_n이라고 한다면 우리가 구하고자 하는 수 는 e_5이며, $e_1 = 1$로 약속하면 마지막으로 실행하는 덧셈의 위치에 따라 $e_5 = e_1e_4 + e_2e_3 + e_3e_2 + e_4e_1$ 로 쓸 수 있음을 알 수 있다. 이 때 $e_0 = 0$ 이라 하면 $n \geq 2$일 때 $e_n = \sum_{i=0}^{n} e_i e_{n-i}$ 이 성립한다. 따라서 $E(x)$을 수열 $\{e_n\}$의 생성함수라 하면 $E(x)$가 만족하는 식을 얻을 수 있다.

[문제 1-1]

〈20점〉 자연수 n에 대하여, 길이가 n인 0과 1의 나열방법의 수를 a_n이라 하자. 그리고 a_n 개의 가능한 나열 중에서 1이 연달아서 나타나지 않는 방법의 수를 b_n이라 하자.

1) 〈5점〉 $n \geq 1$ 일 때 a_n을 계산하라.
2) 〈15점〉 편의상 $b_0 = 1$ 이라 하였을 때, 수열 $\{b_n\}$이 만족하는 점화식과 생성함수를 찾으라.

[문제 1-2]

〈15점〉 $X(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ 를 수열 $1, 1, 1, 1, 1, \cdots$ 의 생성함수라 하자.
$\{d_n\}$은 **예제** 1에서 소개한 수열이며 수열 $\{w_n\}$은 $w_n = d_0 + d_1 + \cdots + d_n$ 을 만족한다고 할 때, $\{w_n\}$의 생성함수를 $\{d_n\}$ 의 생성함수 $D(x)$와 $X(x)$를 이용하여 나타내라.

[문제 1-3]

〈15점〉 **예제** 1의 (2)번 방법을 참조하여 **예제** 2의 수열 $\{e_n\}$의 생성함수
$E(x) = e_0 + e_1x + e_2x^2 + e_3x^3 + \cdots$ 가 만족하는 식을 찾으라.

[문제2]

〈50점〉 다음 제시문을 읽고 물음에 답하라.

(가) 정적분에 관한 가중 평균값의 정리

정리 1. 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속인 두 함수 F, G를 생각하자. 그리고 G는 구간 전체에서 부호가 바뀌지 않는다고 가정하자. 그러면, 다음 식을 만족하는 점 c가 열린구간 (a,b) 안에 존재한다.

$$\boxed{\int_a^b F(x)\,G(x)\,dx \;=\; F(c)\int_a^b G(x)\,dx}$$

정리 1은 연속함수의 대표적인 성질인 중간값의 정리를 이용하여 증명할 수 있으며, 정적분에 관한 평균값의 정리는 **정리** 1에서 G가 상수함수 1인 특수한 경우이다.

예제 1. 정리 1에서 $a=0$, $b=\pi$, $F(x)=x$, $G(x)=\sin x$ 인 경우를 생각해보자. $\int_0^\pi x\ \sin x\,dx=\pi$, $\int_0^\pi \sin x\,dx=2$ 이므로 $c=\dfrac{\pi}{2}$ 로 택하면 위의 등식이 성립한다.

(나) 수치적 구적법

정적분을 계산할 때 원시 함수를 구체적으로 구하기 어려워 정확한 값을 얻을 수 없는 경우가 흔히 발생한다. 정적분 $\int_a^b f(x)\,dx$의 값을 근사하는데 자주 사용하는 방법으로 수치적 구적법(numerical quadrature)을 들 수 있으며, 이는 적당한 점 $x_1, \cdots, x_n$과 적당한 수 $a_1, \cdots, a_n$를 이용하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k\,f(x_k)$$

형태로 나타낸다.

예제 2. 중점 규칙 (Midpoint rule)

가장 간단한 수치적 구적법으로 중점 규칙을 들 수 있다.

$$M(f) = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

예제 3. 사다리꼴 규칙 (Trapezoid rule)

정적분의 값을 구간의 양 끝점에서의 함숫값으로 근사하는 가장 간단한 방법은 그

림 1에 나타난 것과 같은 사다리꼴 규칙이다.

$$T(f) = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$$

사다리꼴 규칙은 다음 정리와 밀접한 관계가 있다.

정리 2. 닫힌구간 $[a,b]$를 포함하는 열린구간에서 정의된 두 번 미분 가능한 함수 f를 생각하자. 이계도함수 f''이 $[a,b]$에서 연속이면,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] - \frac{(b-a)^3}{12}f''(c)$$

을 만족하는 점 c가 열린구간 (a,b)에 존재한다.

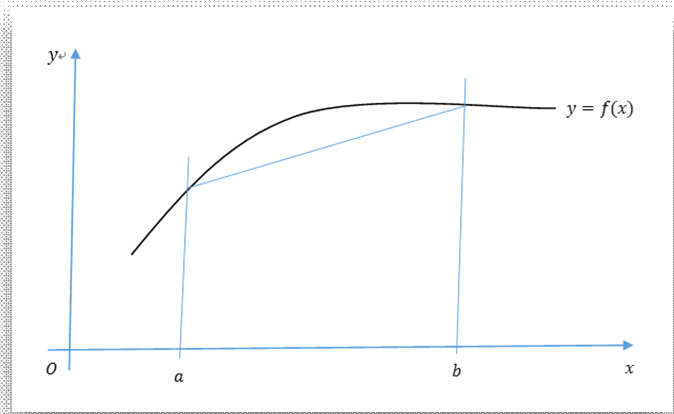

그림 1. 사다리꼴 규칙

(다) 정확도 주어진 구적법의 정확도(degree of accuracy)는 0 이상 n 이하의 모든 k 에 대하여 함수 x^k의 구적법에 의한 근삿값과 적분값이 같아지는 n 중 가장 큰 값을 의미한다.

예제 4. $a=0$, $b=1$이라 하고 **예제** 2에서와 같이의 중점 규칙으로 정적분을 근사하는 경우를 생각해 보자. 우선, $\int_0^1 1\,dx = 1 = M(1)$, $\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2} = M(x)$이다. 하지만 $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3} \neq \left(\frac{1}{2}\right)^2 = M(x^2)$이므로 중점 규칙은 정확도 1을 가짐을 알 수 있다.

예제 5. $a=0$, $b=1$이라 하고 **예제** 3에서와 같이 사다리꼴 규칙으로 정적분을 근

사하는 경우, $\int_0^1 1\,dx = 1 = \frac{1}{2}[1+1] = T(1)$, $\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}[0+1] = T(x)$이 성립한다. 하지만 $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{2}[0+1] = T\left(x^2\right)$이므로 사다리꼴 법칙은 정확도 1을 가짐을 알 수 있다. 한편 **정리 2**를 이용하여 사다리꼴 규칙의 정확도가 1임을 확인할 수도 있다. 1차 이하의 다항 함수의 이계도함수가 0이므로 정확도는 1 이상이고, 2차 다항식의 이계도함수는 0이 아닌 상수이므로 오차가 0일 수 없어 정확도는 1이하가 되기 때문이다.

[문제 2-1]

〈15점〉 제시문 (가)의 **정리** 1을 $a=0$, $b=\pi$, $F(x) = \cos(\cos\ x)$, $G(x)=\sin x$에 적용할 때 $\cos\ c$의 값은 얼마인가?

[문제 2-2]

〈20점〉 사다리꼴 규칙에 대한 다음 물음에 답하라.

1) 〈10점〉 $p(a)=p(b)=0$, $-p'(a)=p'(b)=b-a$를 만족하는 최고차항의 계수가 1인 이차 다항식 $p(x)$를 구하고, 부분적분 공식을 적절히 적용하여 $\int_a^b f(x)\,dx$를 $T(f)$와 $\int_a^b f''(x)p(x)\,dx$를 이용하여 나타내라.

2) 〈10점〉 정리 2를 증명하라.

[문제 2-3]

〈15점〉 자연수 n에 대하여 $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$를 근사하는 다음과 같은 수치적 구적법을 생각하자.

$$\frac{n}{n+1}f(-\alpha)+(1-t)\cdot f(0)+\frac{n}{n+1}f(\beta)$$

이 구적법이 가장 높은 정확도를 갖도록 하는 음이 아닌 실수 α, β, t를 각각 α_n, β_n, t_n 이라 하고, 이때의 정확도를 r_n이라 할 때 아래 극한 값을 구하라.

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n\beta_n t_n r_n$$